Д. В. Пономарев, Импульсно-скользящие режимы управляемых механических систем,
Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 2013, выпуск 3, 65–78

УДК 517.911.5

© *Д. В. Пономарев*

ИМПУЛЬСНО-СКОЛЬЗЯЩИЕ РЕЖИМЫ УПРАВЛЯЕМЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ [1]

Рассматривается управляемая механическая система с сухим трением и позиционным импульсным или позиционным разрывным управлением. Она может быть представлена в виде уравнений Лагранжа второго рода:

$$A(t,q)\ddot{q} = g(t,q,\dot{q}) + Q^A(t,q,\dot{q}) + Q^T(t,q,\dot{q}) + u, \quad t \in I = [t_0, t_0+T]. \tag{1}$$

Целью управления является движение системы по множеству $S = \big\{(t,q,\dot{q}) \in I \times R^n \times R^n : \sigma(t,q,\dot{q}) = 0\big\}$ (задача стабилизации) или в окрестности этого множества (задача сближения). Первая задача решается с использованием позиционного управления релейного типа с ограниченными ресурсами, для которых режим декомпозиции является устойчивым скользящим режимом системы (1). При недостаточности ресурсов обычного разрывного управления движение системы в окрестности множества S происходит при помощи высокочастотных импульсных воздействий на нее в дискретные моменты времени в импульсно-скользящем режиме, равномерный предел которого (идеальный импульсно-скользящий режим) совпадает с режимом декомпозиции. Отличительной особенностью поставленных задач является наличие в системе (1) сил сухого трения, которые, вообще говоря, могут рассматриваться как некоторые неуправляемые разрывные или многозначные возмущения.

Основные понятия даны во введении статьи. В первом разделе показана связь между идеальными импульсно-скользящими режимами включения

$$A(t,x)\dot{x} \in F(t,x) + u,$$

где u — позиционное импульсное управление, и скользящими режимами системы

$$A(t,x)\dot{x} \in F(t,x) + B(t,x)\tilde{u}(t,x)$$

с позиционным разрывным управлением. Второй раздел посвящен системам вида (1). В третьем разделе рассматривается важное для приложений целевое множество S системы (1), которое определяется векторной функцией $\sigma(t,q,\dot{q}) = \dot{q} - \varphi(t,q)$. Для последнего случая использованы более простые и содержательные условия, гарантирующие существование скользящих режимов для системы с позиционным разрывным управлением. В заключении рассмотрен пример.

Ключевые слова: дифференциальное включение, позиционное импульсное управление, импульсно-скользящий режим, скользящий режим.

Введение

В данной статье используется терминология из работ [1, 2], объектом исследования которых являлась система вида

$$\dot{x} = f(t,x) + v(t) + u, \quad x(t_0) = x_0, \tag{0.1}$$

с позиционным импульсным управлением u, и продолжаются исследования, начатые в [3], где рассматривалось дифференциальное включение вида

$$\dot{x} \in F(t,x) + u, \quad x(t_0) = x_0, \tag{0.2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», проект № 2012–1.2.1–12–000–1001–011).

где $x \in R^n$, R^n — n-мерное векторное пространство с нормой $\|\cdot\|$, $t \in I = [t_0, t_0+T]$. Импульсное позиционное управление u в задачах (0.1) и (0.2) определяется как некий абстрактный оператор $u \leftarrow p(t,x)\delta_t$, который каждому моменту времени t и состоянию объекта x ставит в соответствие импульс $p(t,x)\delta_t$. Здесь δ_t — дельта-функция, сосредоточенная в момент времени t, $p(t,x)$ — функция, определяющая интенсивность импульса.

Оператор $u \leftarrow p(t,x)\delta_t$ как обобщенная функция смысла не имеет и означает лишь тот факт, что в системе (0.2) функционирует импульсное позиционное управление, подразумевающее дискретную реализацию «бегущего импульса» в виде последовательности корректирующих импульсов, сосредоточенных в узлах некоторого разбиения $h : t_0 < t_1 < \ldots < t_N = t_0 + T$ отрезка I. Совокупность всех разбиений в дальнейшем будем обозначать H.

Действие дискретной реализации «бегущего импульса» в системе (0.2) приводит к появлению разрывных кривых $x^h(t)$, называемых ломаными Эйлера, которые определяются на промежутках $(t_k, t_{k+1}]$ как решения следующих задач Коши:

$$\dot{x} \in F(t,x), \quad x(t_k) = x^h(t_k) + p\big(t_k, x^h(t_k)\big), \quad k = \overline{0, N-1},$$

где $x^h(t_0) = x_0$. Множество ломаных Эйлера является сетью, направленной по убыванию $d(h) = \max\{\Delta t_k, k = \overline{0, N-1}\}$. Последовательность ломаных Эйлера $\{x^{h_i}(t)\}$ назовем конфинальной, если $d(h_i) \to 0$ при $i \to \infty$, где $d(h)$ — мелкость разбиения h. При этом если конфинальная последовательность ломаных Эйлера равномерно на отрезке I сходится к кусочно-непрерывной функции $r(t)$, то функцию $r(t)$ будем называть предельным режимом системы (0.2) с управлением $u \leftarrow p(t,x)\delta_t$.

В [3] рассматривались такие управления, которые в результате воздействия приводят систему (0.2) на некоторое множество

$$S = \big\{(t,x) \in I \times R^n : \sigma^i(t,x) = 0, i = \overline{1,m}\big\},$$

где $m \leqslant n$. В этом случае сеть ломаных Эйлера называется импульсно-скользящим режимом, а траектории $r(t)$, предельные для равномерно сходящихся на промежутке $J = (t_0, t_0 + T]$ последовательностей ломаных Эйлера, — идеальными (предельными) импульсно-скользящими режимами. Было показано, что при выполнении определенных условий идеальные импульсно-скользящие режимы системы (0.2) совпадают со скользящими режимами включения

$$\dot{x} \in F(t,x) + B(t,x)\widetilde{u}(t,x),$$

где $B(t,x)$ — непрерывная $n \times m$-матрица, $\widetilde{u}(t,x) = \big(\widetilde{u}_1(t,x), \ldots, \widetilde{u}_m(t,x)\big)$ — векторное позиционное разрывное управление, $\widetilde{u}_i(t,x) = H_i(t,x)\operatorname{sgn}\sigma^i(t,x)$, $i = \overline{1,m}$, $H_i(t,x)$ — положительные функции, которые представляют собой ресурс управления.

В первом разделе данной работы рассматриваются импульсно-скользящие режимы включений с импульсным позиционным управлением и матрицей $A(t,x)$ при $\dot{x}$ в виде

$$A(t,x)\dot{x} \in F(t,x) + u.$$

Второй раздел посвящен механическим системам, представленным в виде уравнений Лагранжа второго рода с импульсным позиционным управлением:

$$A(t,q)\ddot{q} = g(t,q,\dot{q}) + Q^A(t,q,\dot{q}) + Q^T(t,q,\dot{q}) + u. \tag{0.3}$$

В третьем разделе в качестве цели управляющего воздействия рассматривается приведение механической системы на множество S, определяемое уравнениями $\dot{q} = \varphi(t,q)$, для которого использованы более простые и содержательные условия, гарантирующие существование скользящих режимов для системы с позиционным разрывным управлением из работы [6]. В заключении рассмотрен содержательный пример уравнений двухзвенного манипулятора на шероховатой горизонтальной плоскости с сухим трением.

§ 1. Импульсно-скользящие режимы дифференциальных включений с матрицей при производной $\dot{x}$

Рассмотрим систему

$$A(t,x)\dot{x} \in F(t,x) + u,\\ x(t_0) = x_0, \quad t \in I. \tag{1.1}$$

Здесь $A(t,x)$ — $n \times n$-матричная функция, невырожденная на $I \times R^n$; $F(t,x)$ — многозначное отображение; u — позиционное импульсное управление. Для системы (1.1) ломаные Эйлера на интервалах $(t_k, t_{k+1}]$, $k = \overline{0, N-1}$, совпадают с решениями следующих задач Коши:

$$\begin{cases} A(t,x)\dot{x} \in F(t,x), \\ x(t_k) = x^h(t_k) + A^{-1}\big(t_k, x^h(t_k)\big)p\big(t_k, x^h(t_k)\big), \end{cases}$$

где $A^{-1}(t,x)$ — обратная матрица, $x^h(t_0) = x_0$.

Отметим, что ломаные Эйлера удовлетворяют равенству

$$x^h(t) = x_0 + A^{-1}(t_0, x_0)p(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{x}^h(\tau)\,d\tau + \sum_{i=1}^{m_t} A^{-1}\big(t_i, x^h(t_i)\big)p\big(t_i, x^h(t_i)\big), \tag{1.2}$$

где m_t — номер ближайшего слева к t узла разбиения h, не совпадающего с t, $A(t, x^h(t))\dot{x}^h(t) \in F(t, x^h(t))$ для п.в. $t \in I$.

В дальнейшем рассматриваются такие управления, которые после каждого импульсного воздействия приводят систему (1.1) на множество S, определяемое m-мерной непрерывно дифференцируемой вектор-функцией $\sigma(t,x)$ с матрицей Якоби по x ранга m для всех $(t,x) \in S$:

$$S = \big\{(t,x) \in I \times R^n : \sigma(t,x) = 0\big\}.$$

Дополнительно предполагается отсутствие импульсов на множестве S, то есть

$$(t,x) \in S \Leftrightarrow A^{-1}(t,x)p(t,x) = 0.$$

Введем обозначения $\widehat{p}(t,x) = A^{-1}(t,x)p(t,x)$, $\widehat{F}(t,x) = A^{-1}(t,x)F(t,x)$. Тогда ломаные Эйлера (1.2) примут вид

$$x^h(t) = x_0 + \widehat{p}(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{x}^h(\tau)\,d\tau + \sum_{i=1}^{m_t} \widehat{p}\big(t_i, x^h(t_i)\big),$$

где $\dot{x}^h(t) \in \widehat{F}\big(t, x^h(t)\big)$ для п.в. $t \in I$, и будут совпадать с ломаными Эйлера импульсной управляемой системы

$$\dot{x} \in \widehat{F}(t,x) + \widehat{u},\\ x(t_0) = x_0, \tag{1.3}$$

где $\widehat{u} \leftarrow \widehat{p}(t,x)\delta_t$. При этом условия, обеспечивающие попадание системы на S после действия корректирующего импульса и равенство нулю величины импульса в случае, если $(t,x) \in S$, запишем в следующем виде:

$$\sigma\big(t, x + \widehat{p}(t,x)\big) = 0 \quad \forall (t,x) \in I \times R^n,\\ \sigma(t,x) = 0 \Leftrightarrow \widehat{p}(t,x) = 0.$$

Для полноты изложения сформулируем следующие леммы из [3]:

Лемма 1. *Пусть функции* $\widehat{p}(t,x)$ *и* $x^h(t)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

$$\|\widehat{p}(\tau,y)-\widehat{p}(t,x)\| \leqslant L\,(|\tau-t|+\|y-x\|) \tag{1.4}$$

для всех $(t,x)\in I\times R^n$;

$$\|\dot{x}^h(t)\| \leqslant C(t)\bigl(1+\|x^h(t)\|\bigr)$$

для почти всех $t\in I$ *и всех разбиений* $h\in H$, *где* $C(t)$ — *суммируемая по Лебегу функция;*

$$\widehat{p}\bigl(t_k,x^h(t_k+0)\bigr)=0$$

для всех $k=\overline{0,N-1}$ *и всех разбиений* $h\in H$. *Тогда существует константа* M *такая, что для всех разбиений* $h\in H$ *и всех* $t\in I$ *выполняется*

$$\|x^h(t)\|\leqslant M.$$

Лемма 2. *Пусть выполняются все условия леммы* 1. *Тогда из любой конфинальной последовательности функций* $\{x^{h_i}(t)\}$ *можно выделить подпоследовательность, равномерно на отрезке* I *сходящуюся к некоторой абсолютно непрерывной на промежутке* $J=(t_0;t_0+T]$ *функции, и любой равномерный на промежутке* J *предел* $r(t)$ *конфинальной последовательности функций удовлетворяет условиям*

$$\widehat{p}\bigl(t,r(t)\bigr)=0,\quad r(t_0+0)=x_0+\widehat{p}(t_0,x_0).$$

Таким образом, при указанных в лемме 1 условиях ломаные Эйлера для системы (1.1) будут ограничены и из любой конфинальной последовательности можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся к абсолютно непрерывной функции.

Пусть величина импульсного воздействия удовлетворяет равенству $p(t,x)=B(t,x)\sigma(t,x)$, где $B(t,x)$ — некоторая непрерывная $n\times m$-матричная функция. Тогда $\widehat{p}(t,x)$ удовлетворяет равенству $\widehat{p}(t,x)=A^{-1}(t,x)B(t,x)\sigma(t,x)$ и в силу леммы 2.2 из [1] на множестве S выполняется условие

$$\sigma_x(t,x)A^{-1}(t,x)B(t,x)=-E_m. \tag{1.5}$$

Предположим, что функция $\widehat{B}(t,x)=A^{-1}(t,x)B(t,x)$ непрерывна, $\widehat{p}(t,x)$ удовлетворяет условию (1.4), $\widehat{F}(t,x)$ удовлетворяет следующим условиям:

(B0) для любых $(t,x)\in I\times R^n$ множество $\widehat{F}(t,x)$ является непустым выпуклым компактом;

(B1) при почти каждом $t\in I$ отображение $x\to\widehat{F}(t,x)$ полунепрерывно сверху;

(B2) для любой непрерывной функции $x: I\to R^n$ многозначное отображение $t\to\widehat{F}\bigl(t,x(t)\bigr)$ измеримо (свойство суперпозиционной измеримости);

(B3) для любых $(t,x)\in I\times R^n$, $w\in\widehat{F}(t,x)$ выполняется неравенство $\|w\|\leqslant l(t)\bigl(1+\|x\|\bigr)$, где $l(t)$ — суммируемая по Лебегу на I функция (свойство подлинейного роста).

Пусть, далее, существуют такие непрерывные положительные функции $H_i(t,x): I\times R^n\to R$, $i=\overline{1,m}$, что для каждой точки $(t,x)\in S$ найдутся $\varepsilon>0$ и окрестность $W_\delta(t,x)$ этой точки такие, что для всех $(t',x')\in W_\delta(t,x)$ выполняются неравенства

$$\max_{w\in\widehat{F}(t',x')}\bigl|\sigma_t^i(t,x)+\langle\nabla_x\sigma^i(t,x),w\rangle\bigr|<H_i(t,x)-\varepsilon,\quad i=\overline{1,m}, \tag{1.6}$$

где $\nabla_x\sigma^i(t,x)$ — градиент i-й координаты вектор-функции $\sigma(t,x)$ по переменной x, $\sigma_t^i(t,x)$ — частная производная по времени i-й координаты вектор-функции $\sigma(t,x)$. Тогда в силу теорем 4 и 5 из [3] для включения (1.3) существует идеальный импульсно-скользящий режим и любой идеальный импульсно-скользящий режим $r(t)$ включения (1.3) на интервале J совпадает со скользящим режимом системы с позиционным разрывным управлением

$$\begin{aligned}&\dot{x}\in\widehat{F}(t,x)+\widehat{B}(t,x)\widetilde{u}(t,x),\\&x(t_0)=x_0+\widehat{p}(t_0,x_0),\end{aligned} \tag{1.7}$$

где $\widetilde{u}_i(t,x) = H_i(t,x)\mathrm{sgn}\,\big(\sigma^i(t,x)\big)$, $i = \overline{1,m}$. При этом под скользящим режимом включения (1.7) понимается абсолютно непрерывная функция $x(t)$ такая, что $\big(t,x(t)\big) \in S$ и $x(t)$ — решение включения

$$\begin{aligned} &\dot{x} \in \widehat{F}(t,x) + \widehat{B}(t,x)\widetilde{U}(t,x),\\ &x(t_0) = x_0 + \widehat{p}(t_0,x_0), \end{aligned} \tag{1.8}$$

где $\widetilde{U}(t,x)$ представляет собой простейшее выпуклое доопределение в смысле Филиппова (см. [4]) разрывной функции $\widetilde{u}(t,x)$.

Отметим, что неравенства (1.6) обеспечивают устойчивость множества S (см. теорему 3 из [3]) в следующем смысле: для любых начальных данных $(t_0,x_0) \in S$ и $\tau > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при условиях $\|x_0 - \widetilde{x}_0\| < \delta$ и $|t_0 - \widetilde{t}_0| < \delta$ для любого решения дифференциального включения (1.8) с начальным условием $(\widetilde{t}_0, \widetilde{x}_0)$ выполняется $(t,x(t)) \in S$ для всех точек $t \geqslant t_0 + \tau$, в которых это решение существует. Однако для описания всех возможных скользящих режимов системы (1.8) устойчивость множества S не требуется. Из теоремы 2 (см. [3]) следует, что все движения системы (1.8) по множеству S находятся из включения

$$\dot{x} \in \widehat{F}(t,x) + \widehat{B}(t,x)\widetilde{U}^{*eq}(t,x), \tag{1.9}$$

где $\widetilde{U}^{*eq}(t,x) = \widetilde{U}^{eq}(t,x) \bigcap \widetilde{U}(t,x)$ и

$$\widetilde{U}^{eq}(t,x) = \sigma_t(t,x) + \sigma_x(t,x)F(t,x). \tag{1.10}$$

Таким образом, все возможные скользящие режимы системы (1.8) находятся из включения (1.9) в случае, если $\widetilde{U}^{*eq}(t,x) = \widetilde{U}^{eq}(t,x)$, что обеспечивается выполнением неравенств

$$\max_{w \in \widehat{F}(t,x)} \big|\sigma_t^i(t,x) + \langle \nabla_x \sigma^i(t,x), w\rangle\big|_{(t,x)\in S} \leqslant H_i(t,x), \quad i = \overline{1,m}. \tag{1.11}$$

Следовательно, имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть $A(t,x)$, $F(t,x)$, $p(t,x)$ таковы, что многозначное отображение $\widehat{F}(t,x) = A^{-1}(t,x)F(t,x)$ удовлетворяет условиям (B0)–(B3), $\widehat{p}(t,x) = A^{-1}(t,x)p(t,x)$ удовлетворяет условию (1.4), и пусть существуют такие непрерывные положительные функции $H_i(t,x) : I \times R^n \to R$, $i = \overline{1,m}$, что выполняются неравенства (1.11).*

Тогда для включения (1.1) с импульсным позиционным управлением $u \leftarrow p(t,x)\delta_t$ существует идеальный импульсно-скользящий режим и любой идеальный импульсно-скользящий режим $r(t)$ системы (1.1) на интервале J является скользящим режимом системы

$$\begin{aligned} &A(t,x)\dot{x} \in F(t,x) + B(t,x)\widetilde{u}(t,x),\\ &x(t_0) = x_0 + A^{-1}(t_0,x_0)p(t_0,x_0) \end{aligned}$$

с разрывными позиционными управлениями $\widetilde{u}_i(t,x) = H_i(t,x)\mathrm{sgn}\,\big(\sigma^i(t,x)\big)$, $i = \overline{1,m}$, который реализуется на некотором управлении $\widetilde{u}^{eq}\big(t,r(t)\big) \in \widetilde{U}^{eq}\big(t,r(t)\big)$.

Определим матричную норму $\|A\|_1 = \max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Следствие 1. *Пусть $A(t,x)$ — непрерывная матрица; для любых $(t,x) \in I \times R^n$ выполняется неравенство $\|A^{-1}(t,x)\|_1 \leqslant C$, где C — некоторая константа; $F(t,x)$ удовлетворяет условиям (B0)–(B3); $p(t,x) = B(t,x)\sigma(t,x)$ удовлетворяет условию (1.4). И пусть существуют такие непрерывные положительные функции $H_i(t,x) : I \times R^n \to R^m$, $i = \overline{1,m}$, что выполняются неравенства (1.11).*

Тогда справедливо утверждение теоремы 1.

§ 2. Импульсно-скользящие режимы механических систем

Рассмотрим механическую систему с n степенями свободы и с силами сухого трения, движение которой, следуя [5], запишем в виде (0.3) [2] с начальным условием $(t_0, q_0, \dot{q}_0)$. В (0.3) для нас представляет интерес наличие разрывной по $\dot{q}$ функции $Q^T(t,q,\dot{q})$ (обобщенные силы кулонова трения) и непрерывной, положительно определенной при любых $(t,q) \in I \times R^n$ матрицы $A(t,q)$, которая в общем случае может отличаться от единичной матрицы. Будем предполагать, что управляющие силы u носят характер импульсного воздействия: $u \leftarrow p(t,q,\dot{q})\delta_t$.

Запишем систему (0.3) с импульсным позиционным управлением в виде включения

$$A(t,q)\ddot{q} \in F(t,q,\dot{q}) + u, \tag{2.1}$$

где $F(t,q,\dot{q}) = g(t,q,\dot{q}) + Q^A(t,q,\dot{q}) + \overline{Q^T}(t,q,\dot{q})$ — многозначное отображение, полученное в результате простейшего выпуклого доопределения $\overline{Q^T}(t,q,\dot{q})$ в смысле Филиппова функции $Q^T(t,q,\dot{q})$. При этом ломаные Эйлера $\big(q^h(t), \dot{q}^h(t)\big)$ на каждом интервале $(t_k, t_{k+1}]$, $k = \overline{0, N-1}$ будут совпадать с решениями задач Коши

$$\begin{cases} A(t,q)\ddot{q} \in F(t,q,\dot{q}), \\ q(t_k) = q^h(t_k), \\ \dot{q}(t_k) = \dot{q}^h(t_k) + A^{-1}\big(t_k, q^h(t_k)\big)p\big(t_k, q^h(t_k), \dot{q}^h(t_k)\big), \end{cases} \tag{2.2}$$

где $q^h(t_0) = q_0$, $\dot{q}^h(t_0) = \dot{q}_0$. Под решением (2.2) на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ будем понимать пару функций $\big(q(t), \dot{q}(t)\big)$, состоящую из непрерывно дифференцируемой функции $q(t)$ и абсолютно непрерывной функции $\dot{q}(t)$, которые удовлетворяют начальным условиям и включению (2.2) п.в. на $[t_k, t_{k+1}]$.

Поставим цель управления: обеспечить движение системы по множеству S, которое определяется n-мерной непрерывно дифференцируемой функцией $\sigma(t,q,\dot{q})$ с невырожденной на $I \times R^n \times R^n$ матрицей Якоби $I_{\sigma,\dot{q}}(t,q,\dot{q})$ по переменной $\dot{q}$:

$$S = \big\{(t,q,\dot{q}) \in I \times R^n \times R^n : \sigma(t,q,\dot{q}) = 0\big\}.$$

Введем переменную $\chi = \dot{q}$, тогда включение (2.1) примет вид

$$\begin{cases} A(t,q)\dot{\chi} \in F(t,q,\chi) + u, \\ \dot{q} = \chi. \end{cases} \tag{2.3}$$

Отметим, что при условии $\dot{q} = \chi$ идеальные импульсно-скользящие режимы включений (2.1) и (2.3) совпадают.

Воспользовавшись следующими обозначениями:

$$x = \begin{pmatrix} \chi \\ q \end{pmatrix}, \quad \widehat{F}(t,x) = \begin{pmatrix} F(t,q,\chi) \\ \chi \end{pmatrix},$$
$$\widehat{u} = \begin{pmatrix} u \\ 0_n \end{pmatrix}, \quad \widehat{A}(t,x) = \begin{pmatrix} A(t,q) & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & E_n \end{pmatrix},$$

где 0_n — нулевой вектор-столбец размерности n, $0_{n\times n}$ — нулевая $n \times n$-матрица, перепишем систему (2.3) в виде

$$\widehat{A}(t,x)\dot{x} \in \widehat{F}(t,x) + \widehat{u}. \tag{2.4}$$

Здесь $\widehat{u}$ — импульсное воздействие, которое определяется как абстрактный оператор $\widehat{u} \leftarrow \widehat{p}(t,x)\delta_t$, где

$$\widehat{p}(t,x) = \begin{pmatrix} p(t,q,\chi) \\ 0_n \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

[2] Детальное описание системы (0.3) см. в [5].

Как и ранее, определим величину импульсного воздействия равенством

$$\widehat{p}(t,x)=\widehat{B}(t,x)\sigma(t,x).$$

Здесь $\sigma(t,x)=\sigma(t,q,\chi)=\sigma(t,q,\dot{q})$, $\widehat{B}(t,x)$ с учетом (2.5) представляет собой $2n\times n$-матрицу вида

$$\widehat{B}(t,x)=\begin{pmatrix}\widehat{B}_1(t,x)\\ 0_{n\times n}\end{pmatrix},$$

где $\widehat{B}_1(t,x)$ — некоторая $n\times n$-матричная функция.

Пусть для включения (2.4) выполняются все условия следствия 1. Тогда любой идеальный импульсно-скользящий режим включения (2.4) с позиционным импульсным управлением и начальным условием (t_0,x_0) совпадает на J со скользящим режимом включения

$$\widehat{A}(t,x)\dot{x}\in\widehat{F}(t,x)+\widehat{B}(t,x)\widetilde{u}(t,x)$$

с разрывным позиционным управлением $\widetilde{u}(t,x)=H(t,x)\mathrm{sgn}\big(\sigma(t,x)\big)$ и начальным условием $\big(t_0,x_0+\widehat{A}^{-1}(t_0,x_0)\widehat{p}(t_0,x_0)\big)$.

Найдем матрицу $\widehat{B}_1(t,x)$. Из условия (1.5) следует

$$\sigma_x(t,x)\widehat{A}^{-1}(t,x)\widehat{B}(t,x)=\Big(I_{\sigma,\chi}(t,x)\quad I_{\sigma,q}(t,x)\Big)\begin{pmatrix}A^{-1}(t,x) & 0_{n\times n}\\ 0_{n\times n} & E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{B}_1(t,x)\\ 0_{n\times n}\end{pmatrix}=$$
$$=\Big(I_{\sigma,\chi}(t,x)A^{-1}(t,x)\quad I_{\sigma,q}(t,x)\Big)\begin{pmatrix}\widehat{B}_1(t,x)\\ 0_{n\times n}\end{pmatrix}=I_{\sigma,\chi}(t,x)A^{-1}(t,x)\widehat{B}_1(t,x)=-E_n.$$

Здесь $I_{\sigma,q}(t,x)=I_{\sigma,q}(t,q,\chi)$ и $I_{\sigma,\chi}(t,x)=I_{\sigma,\chi}(t,q,\chi)$ — матрицы Якоби функции $\sigma(t,q,\chi)$ по переменным q и χ соответственно, $A(t,x)=A(t,q)$. Таким образом, $\widehat{B}_1(t,x)=-A(t,x)I^{-1}_{\sigma,\chi}(t,x)$ и

$$\widehat{B}(t,x)=\begin{pmatrix}-A(t,x)I^{-1}_{\sigma,\chi}(t,x)\\ 0_{n\times n}\end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Следует отметить, что (1.4) выполняется в силу определения $\widehat{p}(t,x)=\widehat{B}(t,x)\sigma(t,x)$. Неравенства (1.11) для переменных $(q,\dot{q})$ примут вид

$$\begin{gathered}\max_{w\in A^{-1}(t,q)F(t,q,\dot{q})}\big|\sigma^i_t(t,q,\dot{q})+\langle\nabla_{\dot{q}}\sigma^i(t,q,\dot{q}),w\rangle+\\ +\langle\nabla_q\sigma^i(t,q,\dot{q}),\dot{q}\rangle\big|_{(t,q,\dot{q})\in S}\leqslant H_i(t,q,\dot{q}),\quad i=\overline{1,n}.\end{gathered} \tag{2.7}$$

Условие (1.5) следует из (2.6). Таким образом, имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть $F(t,q,\dot{q})$ удовлетворяет условию* (B3), $\|A^{-1}(t,q)\|_A\leqslant C$, *где C — некоторая константа. Пусть существуют такие непрерывные положительные функции $H_i(t,q,\dot{q}):I\times R^n\times R^n\to R$, $i=\overline{1,n}$, что выполняются неравенства* (2.7).

Тогда для системы (0.3) *с импульсным позиционным управлением существует идеальный импульсно-скользящий режим и любой идеальный импульсно-скользящий режим системы* (0.3) *с начальным условием $(t_0,q_0,\dot{q}_0)$ на интервале J является скользящим режимом этой системы с управляющим воздействием $u=-A(t,q)I^{-1}_{\sigma,\dot{q}}(t,q,\dot{q})\widetilde{u}(t,q,\dot{q})$ и начальным условием $\big(t_0,q_0,\dot{q}_0-I^{-1}_{\sigma,\dot{q}}(t_0,q_0,\dot{q}_0)\sigma(t_0,q_0,\dot{q}_0)\big)$.*

§ 3. Частный случай целевого множества S для механической системы

В этом разделе рассматривается множество S вида

$$S = \big\{(t,q,\dot q) \in I \times R^n \times R^n : \sigma(t,q,\dot q) = \dot q - \varphi(t,q) = 0\big\},$$

где $\varphi(t,q)$ — непрерывно дифференцируемая n-мерная вектор-функция. Тогда $I_{\sigma,\dot q} \equiv E$,

$$\widehat{B}(t,q,\dot q) = \begin{pmatrix} -A(t,q) \\ 0_{n\times n} \end{pmatrix},$$

начальные условия $\big(t_0, q_0, \dot q_0 - I^{-1}_{\sigma,\dot q}(t_0,q_0,\dot q_0)\sigma(t_0,q_0,\dot q_0)\big)$ примут вид $\big(t_0,q_0,\varphi(t_0,q_0)\big)$ и, в силу теоремы 2, имеет место следующее

Следствие 2. *Пусть $F(t,q,\dot q)$ удовлетворяет условию* (B3), $\|A^{-1}(t,q)\|_A \leqslant C$, *где C — некоторая константа. Пусть существуют такие непрерывные положительные функции $H_i(t,q,\dot q) : I \times R^n \times R^n \to R$, $i = \overline{1,n}$, что выполняются неравенства*

$$\max_{w \in A^{-1}(t,q)F(t,q,\dot q)} \big|-\varphi^i_t(t,q) + w_i - \langle \nabla_q \varphi^i(t,q), \varphi(t,q)\rangle\big|_{\dot q = \varphi(t,q)} \leqslant H_i(t,q,\dot q), \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.1}$$

Тогда для системы (0.3) *с импульсным позиционным управлением существует идеальный импульсно-скользящий режим и любой идеальный импульсно-скользящий режим системы* (0.3) *с начальным условием* $(t_0,q_0,\dot q_0)$ *на интервале J является скользящим режимом этой системы с коэффициентом при разрывном позиционном управлении*

$$u = -A(t,q)\widetilde{u}(t,q,\dot q) \tag{3.2}$$

и начальным условием $\big(t_0,q_0,\varphi(t_0,q_0)\big)$, *где* $\widetilde{u}_i = H_i(t,q,\dot q)\operatorname{sgn}\big(\dot q_i - \varphi^i(t,q)\big)$.

Здесь w_i — i-я координата вектора w, $\varphi^i_t(t,q)$ — частная производная по времени i-й координаты векторной функции $\varphi(t,q)$, $\nabla_q \varphi^i(t,q)$ — градиент i-й координаты векторной функции $\varphi(t,q)$ по переменной q.

Так как левая часть неравенств (3.1) содержит элементы w из значений многозначного отображения $A^{-1}(t,q)F(t,q,\dot q)$, то проверка этих неравенств может представлять определенные трудности. В связи с этим рассмотрим систему (0.3) с разрывным позиционным управлением

$$u = \overline{u}(t,q,\dot q), \tag{3.3}$$

где $\overline{u_i}(t,q,\dot q) = -\overline{H}_i \operatorname{sgn}\big(\dot q_i - \varphi^i(t,q)\big)$, $i = \overline{1,n}$. Для данного случая матричная функция $A(t,q)$ предполагается непрерывной, симметричной, положительно определенной на $I \times R^n$. Для этой системы в [6] были сформулированы неравенства на ресурсы управления, аналогичные (3.1):

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_j}\varphi_j\right) - \big[g_i + Q^A_i + Q^T_i\big]\right|_{\dot q = \varphi(t,q)} \leqslant \overline{H}_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.4}$$

которые выполняются в точках непрерывности функций Q^T_i, $i = \overline{1,n}$.

Предположим, что неравенства (3.4) выполняются. Перепишем систему (0.3) с управлением (3.3) в виде

$$A(t,q)\ddot q \in F(t,q,\dot q) + \overline{u}(t,q,\dot q), \tag{3.5}$$

где $F(t,q,\dot q) = g(t,q,\dot q) + Q^A(t,q,\dot q) + \overline{Q^T}(t,q,\dot q)$ — многозначное отображение, полученное в результате выпуклого доопределения $\overline{Q^T}(t,q,\dot q)$ по Филиппову разрывной функции $Q^T(t,q,\dot q)$, и найдем многозначное эквивалентное управление, продифференцировав систему $\dot q = \varphi(t,q)$ в силу включения (3.5):

$$\overline{U}^{*eq}(t,q,\dot q) = A(t,q)\big(\varphi_t(t,q) + I_{\varphi,q}(t,q)\varphi(t,q)\big) - F(t,q,\dot q),$$

где $I_{\varphi,q}(t,q)$ — матрица Якоби векторной функции φ по переменной q.

Для системы (0.3) с управлением (3.2) многозначное эквивалентное управление примет вид

$$\widetilde{U}^{*eq}(t,q,\dot{q}) = -\varphi_t(t,q) - I_{\varphi,q}(t,q) + A^{-1}(t,q)F(t,q,\dot{q}).$$

Отметим, что $-A(t,q)\widetilde{U}^{*eq}(t,q) \equiv \overline{U}^{*eq}(t,q)$. Таким образом, для системы (0.3) с управлениями (3.2) и (3.3) скользящие режимы удовлетворяют одному и тому же дифференциальному включению, но условия (3.1) и (3.4) их возникновения различаются. Если для системы с управлением (3.2) выполняются условия (3.1), а для (3.3) — условия (3.4), то множества скользящих режимов этих систем совпадают.

Следствие 3. *Пусть $F(t,q,\dot{q})$ удовлетворяет условию* (B3), *$A(t,q)$ — симметричная матрица, $\|A^{-1}(t,q)\|_A \leqslant C$, где C — некоторая константа. Пусть существуют такие непрерывные положительные функции $H_i(t,q,\dot{q}) : I \times R^n \times R^n \to R$, $i = \overline{1,n}$, что выполняются неравенства* (3.4).

Тогда для системы (0.3) *с импульсным позиционным управлением существует идеальный импульсно-скользящий режим и любой идеальный импульсно-скользящий режим системы* (0.3) *с начальным условием $(t_0,q_0,\dot{q}_0)$ на интервале J является скользящим режимом этой системы с разрывным позиционным управлением* (3.3) *и начальным условием $\big(t_0,q_0,\varphi(t_0,q_0)\big)$.*

§ 4. Заключение

В работе [3] было показано соответствие между идеальными импульсно-скользящими режимами системы (1.3) и скользящими режимами системы (1.7). При этом, как отмечалось ранее, любой скользящий режим системы (1.7) может быть найден как решение включения (1.9) при условии $\widetilde{U}^{*eq}(t,x) = \widetilde{U}^{eq}(t,x)$, где $\widetilde{U}^{eq}(t,x)$ определяется равенством (1.10). Данное условие обеспечивается неравенствами (1.11), которые фактически означают требование $|\widetilde{u}_i^{eq}(t,x)|_{(t,x)\in S} \leqslant H_i$, $i = \overline{1,m}$, для всех $\widetilde{u}^{eq}(t,x) \in \widetilde{U}^{eq}(t,x)$, где $\widetilde{u}_i^{eq}(t,x)$ — i-я координата вектора $\widetilde{u}^{eq}(t,x)$.

Для механических систем движение по пересечению множеств $S_i = \big\{(t,q,\dot{q}) : \dot{q}_i = \varphi_i(t,q)\big\}$, $i = \overline{1,n}$, называется режимом декомпозиции (см. [7, 8]). Такие движения позволяют решать задачи слежения (движение по наперед заданной траектории), задачи стабилизации системы или задачи полной управляемости. В работах [7, 8] развита соответствующая теория (принцип декомпозиции) для уравнений Лагранжа второго рода (без учета сил трения) в рамках некоторых условий, более сильных, чем неравенства (3.4), которые предполагают наличие в системе ресурсов управления H_i, $i = \overline{1,n}$, достаточных для обеспечения режимов декомпозиции.

В данной работе показано, что идеальный импульсно-скользящий режим и есть, собственно, режим декомпозиции для механических систем и он может обеспечиваться импульсно-скользящими режимами с любой точностью. Однако в тех областях, где выполняются неравенства (2.7) или более сильные неравенства, движение может быть реализовано на разрывном позиционном управлении релейного типа и при этом будет устойчивым в том или ином смысле (см., например, теорему 2 из [6]), то есть импульсное воздействие на систему излишне. Условия, накладываемые на правую часть уравнения (0.3), допускают рассмотрение механической системы, одновременно содержащей оба рассматриваемых типа управляющего воздействия. Таким образом, смысл добавления в механическую систему с разрывным позиционным управлением позиционного импульсного управления состоит в переводе системы на множество S для любых начальных условий и в обеспечении режима декомпозиции с любой точностью для тех областей, где не хватает ресурсов обычного управления, то есть там, где не выполняются неравенства (2.7).

В третьем разделе была показана связь идеальных импульсно-скользящих режимов механической системы с множеством S, определяемым уравнением $\dot{q} = \varphi(t,q)$, со скользящими режимами системы (0.3) с двумя различными разрывными позиционными управляющими воздействиями. Для этих случаев были выведены условия на ресурс управления (3.1) и (3.4). Проанализируем условия (3.1) и (3.4) на примере.

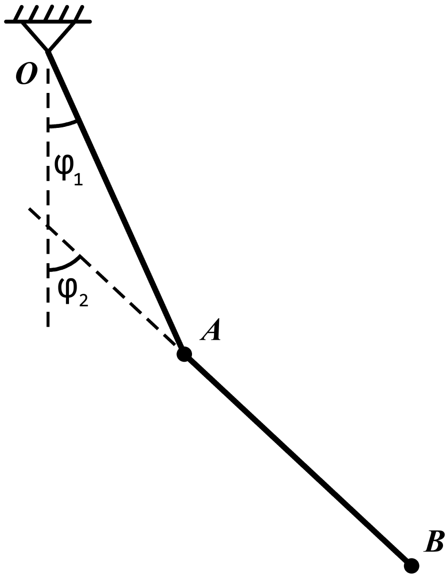

Рис. 1. Двухзвенный манипулятор (вид сверху)

Пример. Рассмотрим движение двухзвенного манипулятора в горизонтальной плоскости (см. рис. 1). Звенья представляют собой невесомые стержни OA и AB. Стержень OA длины l_1 крепится в точке O к шарниру с двумя степенями свободы (не может вращаться вокруг оси OA). В точке A стержень OA опирается на шероховатую поверхность с коэффициентом терния скольжения f. Стержень AB длины l_2 крепится к первому стержню в точке A при помощи плоского шарнира (может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через точку A) массы m_1 и в точке B на поверхность не опирается. К точке B прикреплен груз массы m_2. В качестве обобщенных координат системы выберем углы φ_1 и φ_2. В шарнирах трение отсутствует, есть упругая связь с коэффициентами пропорциональности k_1 и k_2 углам φ_1 и $\beta = \varphi_2 - \varphi_1$.

Моменты инерции I_1, I_2 шарнира в точке A и груза в точке B относительно точек O и A соответственно определяются из формул

$$I_1 = m_1 l_1^2, \quad I_2 = m_2 l_2^2.$$

Кинетическая и потенциальная энергии системы равны

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\left(m_2 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2 m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos\beta + I_2 \dot{\varphi}_2^2 \right), \quad \Pi = \frac{1}{2}\left(k_1 \varphi_1^2 + k_2 \beta^2 \right).$$

Таким образом, уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_i} + Q_i^N, \quad i = \overline{1, n},$$

где $Q_i^N = (Q'_T, 0)$ в данном случае представляют собой обобщенные силы кулонова трения, для описанной механической системы с учетом выпуклого доопределения по Филиппову примут следующий вид:

$$\begin{cases} A_{11}\ddot{\varphi}_1 + A_{12}\ddot{\varphi}_2 \in B_{12}\dot{\varphi}_2^2 + Q_1 + Q_T, \\ A_{21}\ddot{\varphi}_1 + A_{22}\ddot{\varphi}_2 = -B_{12}\dot{\varphi}_1^2 + Q_2. \end{cases} \tag{4.1}$$

Здесь Q_T — многозначное отображение, представляющее собой простейшее выпуклое доопределение обобщенной силы трения Q'_T, которая равна

$$Q'_T(\varphi) = \begin{cases} -fl_1N\operatorname{sgn}\dot\varphi_1, & \dot\varphi_1 \neq 0, \\ Q_T^0, & \dot\varphi_1 = 0, \quad fl_1N \geqslant |Q_T^0|, \\ fl_1N\operatorname{sgn}Q_T^0, & \dot\varphi_1 = 0, \quad fl_1N < |Q_T^0|, \end{cases} \tag{4.2}$$

$$Q_T^0 = Q_T^0(\varphi) = A_{12}\ddot\varphi_2 + k_1\varphi_1 - B_{12}\dot\varphi_2^2 - k_2(\varphi_2-\varphi_1),$$
$$N = N(\varphi) = g\left(m_1 + m_2\frac{l_1 + l_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}{l_1}\right),$$

N — сила нормальной реакции опоры в точке A, g — ускорение свободного падения. Остальные свободные члены и коэффициенты системы (4.1) рассчитываются по формулам

$$\begin{array}{lll} A_{11} = I_1 + m_2l_1^2, & A_{22} = I_2, & A_{12} = A_{12}(\varphi) = m_2l_1l_2\cos(\varphi_2-\varphi_1), \\ Q_1 = -k_1\varphi_1 + k_2(\varphi_2-\varphi_1), & Q_2 = -k_2(\varphi_2-\varphi_1), & B_{12} = B_{12}(\varphi) = m_2l_1l_2\sin(\varphi_2-\varphi_1). \end{array}$$

Положения равновесия системы (4.1) могут быть найдены при подстановке равенств $\dot\varphi_1 = \dot\varphi_2 = 0$ и $\ddot\varphi_1 = \ddot\varphi_2 = 0$ в уравнения (4.1) и представляют собой точки (φ_1, φ_2) такие, что

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2, \\ |\varphi_1| \leqslant \dfrac{fg\big(m_1l_1 + m_2(l_1+l_2)\big)}{k_1}. \end{cases}$$

Предположим, что первый стержень в некоторый момент t' прекратил движение и находится в положении $\varphi_1 = C_0$. Тогда $\dot\varphi_1 = \ddot\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \beta + \varphi_1$, $\dot\varphi_2 = \dot\beta$, $\ddot\varphi_2 = \ddot\beta$. Исходная система (4.1) примет вид

$$\begin{cases} A_{12}\ddot\beta - B_{12}\dot\beta^2 \in Q_1 + Q_T, \\ A_{22}\ddot\beta = Q_2. \end{cases} \tag{4.3}$$

Из второго выражения системы (4.3) следует, что второй стержень будет совершать незатухающие колебания. Пусть $\widehat\beta(t) = C_1\cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{I_2}}t\right) + C_2\sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{I_2}}t\right)$ — решение уравнения $A_{22}\ddot\beta = Q_2$. Здесь C_1 и C_2 — некоторые константы, зависящие от начальных данных. Тогда из первого выражения системы (4.3) и определения (4.2) обобщенной силы трения при относительном покое $\dot\varphi_1 = 0$ следует, что для всех последующих моментов времени $t \geqslant t'$ должно выполняться неравенство

$$|A_{12}\ddot\beta - B_{12}\dot\beta^2 - Q_1| \leqslant fl_1N\big(\widehat\beta(t)\big), \tag{4.4}$$

где $\varphi_1 = C_0$, $\beta = \widehat\beta(t)$. Очевидно, что это неравенство не может выполняться для произвольных констант C_1 и C_2 и, по сути, задает ограничения, при которых сила трения обеспечивает остановку первого стержня, в то время как второй стержень будет продолжать движение и вся система будет двигаться по закону

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = C_0, \\ \varphi_2(t) = C_0 + C_1\cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{I_2}}t\right) + C_2\sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{I_2}}t\right). \end{cases}$$

Условия реализации этого движения получаются, если из из второго выражения (4.3) получить $\ddot\beta = Q_2/A_{22}$ и подставить в (4.4), полагая при этом $\varphi_1 = \text{const}$ и $\dot\varphi_1 = 0$. Таким образом, сила трения не обеспечивает остановку второго стержня.

Добавим в механическую систему управляющее воздействие и в качестве цели управления выберем требование движения системы по закону

$$\begin{cases} \dot\varphi_1 = c_1\varphi_1, \\ \dot\varphi_2 = c_2\varphi_2. \end{cases} \tag{4.5}$$

Здесь c_1 и c_2 — некоторые отрицательные константы. Целевое множество S примет вид

$$S = \{(t, \varphi, \dot{\varphi}) \in I \times R^n \times R^n : \dot{\varphi}_i = c_i \varphi_i, i = \overline{1,2}\}.$$

Запишем систему (4.1) с разрывным позиционным управлением $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2)$ в виде

$$\begin{cases} A_{11}\ddot{\varphi}_1 + A_{12}\ddot{\varphi}_2 - B_{12}\dot{\varphi}_2^2 \in Q_1 + Q_T - A_{11}\widetilde{u}_1 - A_{12}\widetilde{u}_2, \\ A_{22}\ddot{\varphi}_2 + A_{12}\ddot{\varphi}_1 + B_{12}\dot{\varphi}_1^2 = Q_2 - A_{12}\widetilde{u}_1 - A_{22}\widetilde{u}_2. \end{cases} \tag{4.6}$$

Здесь $\widetilde{u}_i = \widetilde{u}_i(t, \varphi, \dot{\varphi}) = H_i \mathrm{sgn}\,(\dot{\varphi}_i - c_i\varphi_i)$, $i = \overline{1,2}$, H_1 и H_2 — некоторые положительные константы, представляющие собой ресурс управления.

Неравенства (3.1) для системы (4.6) примут вид

$$\max_{w \in A^{-1}(t,\varphi)F(t,\varphi,\dot{\varphi})} |w_i - c_i^2\varphi_i|_{(t,\varphi,\dot{\varphi})\in S} \leqslant H_i, \quad i = \overline{1,2}, \tag{4.7}$$

где

$$A^{-1}(t,\varphi)F(t,\varphi,\dot{\varphi}) = \frac{1}{\det A(t,\varphi)} \begin{pmatrix} A_{22}B_{12}c_2^2\varphi_2^2 + A_{22}Q_1 + A_{22}Q_T + A_{12}B_{12}c_1^2\varphi_1^2 - A_{12}Q_2 \\ -A_{12}B_{12}c_2^2\varphi_2^2 - A_{12}Q_1 - A_{12}Q_T - A_{11}B_{12}c_1^2\varphi_1^2 + A_{11}Q_2 \end{pmatrix}.$$

В случае системы с разрывным позиционным управлением $\overline{u} = (\overline{u}_1, \overline{u_2})$ вида

$$\begin{cases} A_{11}\ddot{\varphi}_1 + A_{12}\ddot{\varphi}_2 - B_{12}\dot{\varphi}_2^2 \in Q_1 + Q_T + \overline{u}_1, \\ A_{22}\ddot{\varphi}_2 + A_{12}\ddot{\varphi}_1 + B_{12}\dot{\varphi}_1^2 = Q_2 + \overline{u}_2, \end{cases} \tag{4.8}$$

где $\overline{u}_i = -\overline{H}_1 \mathrm{sgn}\,(\dot{\varphi}_i - c_i\varphi_i)$, $i = \overline{1,2}$, неравенства (3.4) примут вид

$$\begin{aligned} &\left|A_{11}c_1^2\varphi_1 + A_{12}c_2^2\varphi_2 - (B_{12}c_2^2\varphi_2^2 + Q_1 + Q_T)\right|_{(t,\varphi,\dot{\varphi})\in S} \leqslant \overline{H}_1, \\ &\left|A_{12}c_1^2\varphi_1 + A_{22}c_2^2\varphi_2 - (-B_{12}c_1^2\varphi_1^2 + Q_2)\right|_{(t,\varphi,\dot{\varphi})\in S} \leqslant \overline{H}_2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Первое из неравенств (4.9) представляет собой, по сути, некоторое соотношение между ресурсом управления $\overline{H}_1$ и пороговым значением силы трения fl_1N, и его нарушение приведет к остановке первого стержня ($\dot{\varphi}_1 \equiv 0$, $\varphi_1 = \mathrm{const}$) за конечное время. При этом второй стержень будет двигаться по закону

$$A_{22}\ddot{\varphi}_2 = Q_2 + \overline{u}_2,$$

который при выполнении второго неравенства (4.9) будет соответствовать уравнению $\dot{\varphi}_2 = c_2\varphi_2$.

Аналогичную связь между силой трения и ресурсом H_1 можно получить и для системы (4.6) с управлением $\widetilde{u}$. Для этого предположим, что первый стержень находится в состоянии покоя ($\varphi_1 = \mathrm{const}$), и $\varphi_1 \neq 0$. Это означает, что управляющее воздействие $\widetilde{u}_1$ будет постоянным и примет значение H_1 или $-H_1$ в зависимости от знака φ_1 ($\dot{\varphi}_1 - c_1\varphi_1 \neq 0$). Так как $\varphi_1 = \mathrm{const}$, $\dot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_1 = 0$, то движение второго стержня описывается уравнением

$$A_{22}\ddot{\varphi}_2 = Q_2 - A_{12}\widetilde{u}_1 - A_{22}\widetilde{u}_2.$$

Пусть $\widehat{\varphi}_2(t)$ — решение этого уравнения, тогда из системы (4.6) следует неравенство

$$\left|\frac{A_{12}Q_2}{A_{22}} - B_{12}\dot{\varphi}_2^2 - Q_1 + \left(A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}}\right)\widetilde{u}_1\right| \leqslant fl_1N, \tag{4.10}$$

где $\varphi_1 = \mathrm{const}$, $\varphi_2 = \widehat{\varphi}_2(t)$. Неравенство (4.10) показывает, что при малом ресурсе H_1 и нарушении первого неравенства (4.7) первый стержень остановится под действием силы трения в положении $\dot{\varphi}_1 = 0$. Увеличение ресурса H_2 приведет лишь к выполнению второго неравенства (4.7) и движению второго стержня по закону $\dot{\varphi}_2 = c_2\varphi_2$.

Приведенные выше выкладки показывают, что анализ и проверка условий (4.9) в сравнении с условиями (4.7) являются более простыми.

При усилении условий (4.9)

$$\begin{aligned}
&\big|A_{11}c_1^2\varphi_1 + A_{12}c_2^2\varphi_2 - (B_{12}c_2^2\varphi_2^2 + Q_1 + Q_T)\big|_{(t,\varphi,\dot\varphi)\in S} \leqslant \overline{H}_1 - \varepsilon,\\
&\big|A_{12}c_1^2\varphi_1 + A_{22}c_2^2\varphi_2 - (-B_{12}c_1^2\varphi_1^2 + Q_2)\big|_{(t,\varphi,\dot\varphi)\in S} \leqslant \overline{H}_2 - \varepsilon,
\end{aligned}$$

и при достаточно больших $\overline{H}_1$, $\overline{H}_2$ движение системы (4.8) по множеству S будет устойчиво реализовываться по закону (4.5) (см. теорему 2 из [6]), который экспоненциально будет приближать ее в положение $\varphi_1 = \varphi_2 = \dot\varphi_1 = \dot\varphi_2 = 0$. Позиционное импульсное управление $u \leftarrow p(t,\varphi,\dot\varphi)\delta_t$ решит эту же задачу при любых возможных нарушениях условий (4.9) и даже при отсутствии разрывного позиционного управления $\overline{u}$, но при этом идеальный импульсно-скользящий режим, как обычный скользящий режим системы (4.8), будет неустойчивым. Те же самые рассуждения верны и для условий (4.7) и системы (4.6) (см. теорему 3 из [3]).

Автор благодарит И. А. Финогенко за предложенную задачу и обсуждение результатов данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Завалищин С.Т., Сесекин А.Н., Дрозденко С.Е. Динамические системы с импульсной структурой. Свердловск: Сред.-Урал. кн. изд-во, 1983. 112 с.
2. Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсно-скользящие режимы в нелинейных динамических системах // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 5. С. 790–799.
3. Финогенко И.А., Пономарев Д.В. О дифференциальных включениях с позиционными разрывными и импульсными управлениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 284–299.
4. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
5. Матросов В.М., Финогенко И.А. Аналитическая динамика систем твердых тел с трением // Нелинейная механика. М.: Физматлит, 2001. С. 39–61.
6. Финогенко И.А. Об устойчивости механических систем с сухим трением и разрывными позиционными управлениями // Труды X Международной Четаевской конференции. Т. 1. Аналитическая механика. КНИТУ–КАИ. Казань, 2012. С. 488–498.
7. Пятницкий Е.С. Синтез иерархических систем управления механическими и электромеханическими объектами на принципе декомпозиции. I // Автоматика и телемеханика. 1989. № 1. С. 87–98.
8. Пятницкий Е.С. Синтез иерархических систем управления механическими и электромеханическими объектами на принципе декомпозиции. II // Автоматика и телемеханика. 1989. № 2. С. 57–71.

Поступила в редакцию 01.04.2013

Пономарев Денис Викторович, преподаватель, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Россия, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1.
E-mail: zmeigo.sc@gmail.com

D. V. Ponomarev
Pulse-sliding modes of controlled mechanical systems

Keywords: differential inclusion, positional pulse control, pulse-sliding mode, sliding mode.

Mathematical Subject Classifications: 34A37, 34A60

We consider a controlled mechanical system with dry friction and positional pulse or positional discontinuous control. It can be presented in a form of Lagrange equations of the second kind

$$A(t,q)\ddot q = g(t,q,\dot q) + Q^A(t,q,\dot q) + Q^T(t,q,\dot q) + u, \quad t \in I = [t_0, t_0 + T]. \tag{1}$$

The goal of the control is the motion of the system (1) in set $S = \big\{(t,q,\dot q) \in I \times R^n \times R^n : \sigma(t,q,\dot q) = 0\big\}$ (problem of stabilization) or in the neighborhood of set S (approach problem). The first problem is solved with discontinuous positional control of relay type with limited resources, for which a decomposition mode is a stable sliding mode of system (1). In case of insufficiency of resources of discontinuous control the motion of the controlled system in the neighborhood of set S can be implemented under high-frequency impacts on the system in discrete time moments in the pulse-sliding mode, the uniform limit of which (an ideal pulse-sliding mode) is equal to the decomposition mode. The distinctive feature of the assigned problems is dry friction in the system (1), and said dry fiction, generally speaking, can be considered as uncontrollable discontinuous or multivalued perturbations.

Main definitions are given in the introduction of the article. In the first section the connection between ideal pulse-sliding modes of inclusion

$$A(t,x)\dot x \in F(t,x) + u,$$

where u is a positional pulse control, and sliding modes of system

$$A(t,x)\dot x \in F(t,x) + B(t,x)\tilde u(t,x)$$

with a positional discontinuous control is considered. The second section is devoted to systems of type (1). In the third section we consider set S, which is important in relation to applications and is defined by the vector function $\sigma(t,q,\dot q) = \dot q - \varphi(t,q)$. For the last case more simple and informative conditions of the existence of sliding modes for a system with discontinuous controls were used. An example was considered in conclusion.

REFERENCES

1. Zavalishchin S.T., Sesekin A.N., Drozdenko S.E. *Dinamicheskie sistemy s impul'snoi strukturoi* (Dynamic systems with impulse structure), Sverdlovsk: Sredn. Ural. Knizh. Izd., 1983, 112 p.

2. Zavalishchin S.T., Sesekin A.N. Pulse-sliding modes in non-linear dynamic systems, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1983, vol. 19, no. 5, pp. 790–799.

3. Finogenko I.A., Ponomarev D.V. On differential inclusions with positional discontinuous and pulse controls, *Trudy Inst. Mat. Mekh. Ural Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2013, vol. 19, no. 1, pp. 284–299.

4. Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoi chast'yu* (Differential equations with discontinuous righthand side), Moscow: Nauka, 1985, 224 p.

5. Matrosov V.M., Finogenko I.A. Analitical dynamics of systems of rigid bodies with friction, *Nonlinear mechanics*, Moscow: Fizmatlit, 2001, pp. 39–61.

6. Finogenko I.A. On stability of mechanical systems with dry friction and discontinuous positional controls, *Trudy X Mezhdunarodnoi Chetaevskoi konferentsii. Tom 1. Analiticheskaya mekhanika* (Proceedings of X International Chetaev Conference. Volume 1. Analitical Mechanics), Kazan State Technical University named after A.N. Tupolev, Kazan, 2012, pp. 488–498.

7. Pyatnitskii E.S. Synthesis of hierarchical systems of control of mechanical and electromechanical objects on the principle of decomposition I, *Avtomatika i Telemekhanika*, 1989, no. 1, pp. 87–98.

8. Pyatnitskii E.S. Synthesis of hierarchical systems of control of mechanical and electromechanical objects on the principle of decomposition II, *Avtomatika i Telemekhanika*, 1989, no. 2, pp. 57–71.

Received 01.04.2013

Ponomarev Denis Viktorovich, Lecturer, Institute of Mathematics, Economics and Information Science, Irkutsk State University, ul. K. Marksa, 1, Irkutsk, 664003, Russia.
E-mail: zmeigo.sc@gmail.com