D. B. Rokhlin, Resource allocation in communication networks with large number of users: the dual stochastic gradient method, *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 2021, Volume 66, Issue 1, 129–148

Том 66 **ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ** **Выпуск 1**
2021

РОХЛИН Д. Б.*

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ В СЕТЯХ СВЯЗИ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ: ДВОЙСТВЕННЫЙ СТОХАСТИЧЕСКИЙ ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД[1)]

Рассматривается сеть связи с фиксированным набором соединений, используемых большим числом пользователей. Распределение ресурсов сети производится на основе максимизации суммарной полезности в соответствии с популярным подходом, предложенным в 1998 г. Ф. Келли с соавторами. Задача состоит в определении механизма назначения цен на скорость передачи данных с целью стимулирования оптимального использования имеющихся ресурсов.

В отличие от обычного подхода, предлагаемый алгоритм не использует информацию о суммарном трафике на каждом соединении. Его входные данные: общее число пользователей N, пропускные способности соединений и оптимальные близорукие реакции случайно выбранных пользователей на текущие цены. Динамическая схема назначения цен основана на двойственном стохастическом методе проекции градиента. Для специального класса функций полезности u_i получены верхние оценки для невязок в ограничениях и для отклонения целевой функции от оптимального значения. Эти оценки равномерны по N и имеют порядок $O(T^{-1/4})$ по числу T измеренных реакций пользователей. Приведены результаты компьютерных экспериментов для квадратичных функций u_i, представляющих собой разности между линейной полезностью, индивидуальной для каждого пользователя, и квадратичным штрафом, назначаемым сетью.

Ключевые слова и фразы: максимизация полезности сети, двойственность, стохастический метод проекции градиента, большое число пользователей.

DOI: https://doi.org/10.4213/tvp5336

*Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета; Региональный научно-образовательный математический центр Южного федерального университета, Ростов-на-Дону, Россия; e-mail: dbrohlin@sfedu.ru

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-19-01038).

Введение. Современные компьютерные сети содержат большое число соединений, пропускные способности которых распределены между огромным числом пользователей. Управление ресурсами сетей направлено на оптимальное использование доступных пропускных способностей, предотвращение перегрузок и обеспечение стабильности системы. Кроме того, чтобы иметь практическую ценность, управление должно быть децентрализованным. При этом пользователи и соединения рассматриваются как процессоры, обновляющие свои переменные на основе динамически отслеживаемой локальной информации. Ставший общепринятым критерий оптимальности — сумма полезностей всех пользователей — был предложен в работе [8]. В экономических терминах данный критерий может быть назван утилитаристским, так как он соответствует максимизации общественного благосостояния.

Рассмотрим сеть с m соединениями и N пользователями. Каждый пользователь i передает пакеты через фиксированный набор соединений. Структура сети определяется матрицей маршрутизации $R = (R_i^j) \in \mathbf{R}^{m\times N}$. Ее столбцы $R_i \neq 0$, $i = 1, \dots, N$, являются двоичными m-мерными векторами такими, что $R_i^j = 1$, если соединение j используется пользователем i, и $R_i^j = 0$ в противном случае. Пропускные способности соединений описываются вектором $b \in \mathbf{R}^m$ со строго положительными компонентами. Пользователи оценивают качество работы сети с помощью функций полезности $u_i(x^i)$, зависящих от скорости $x^i \in \mathbf{R}_+$ передачи данных. Оптимальное распределение ресурсов соответствует оптимальному решению $x^* \in \mathbf{R}_+^N$ задачи *максимизации полезности сети* (NUM — network utility maximization):

$$u(x) = \sum_{i=1}^{N} u_i(x^i) \to \max, \tag{0.1}$$

$$Rx = \sum_{i=1}^{N} R_i x^i \leqslant b, \qquad x = (x^1, \dots, x^N) \in \mathbf{R}_+^N, \tag{0.2}$$

сформулированной в работе [8].

При заданных ценах соединений $\overline{\lambda} \in \mathbf{R}_+^m$ пользователи выбирают оптимальные скорости передачи информации $\overline{x}^i$, максимизируя разность между полезностью и ценой $\overline{x}^i$:

$$\overline{x}^i \in \arg\max_{x^i\in\mathbf{R}_+} \left(u_i(x^i) - x^i \sum_{j=1}^{m} \overline{\lambda}^j R_i^j \right).$$

Цель управления состоит в том, чтобы стимулировать оптимальное распределение ресурсов x^* путем назначения цен соединений $\lambda^* \in \mathbf{R}_+^m$. Обзоры исследований, относящихся к этой задаче, ее вариантам и обобщениям, содержатся в [14], [6], [13], [15].

При некоторых технических предположениях, включающих условие вогнутости функций полезности u_i, существование указанных стимулирующих цен λ^* вытекает из теории двойственности. Более того, эти цены могут быть аппроксимированы двойственным методом проекции градиента (см. [10], [11]). При этом вычисления являются полностью распределенными: каждое соединение j обновляет свою цену λ^j в соответствии с разностью между предложением b^j и суммарным спросом $\sum_{i=1}^{N} R_i^j x^i$, а каждый пользователь i обновляет скорость передачи x^i на основе цен соединений пути $\{j\colon R_i^j = 1\}$.

В данной работе суммарный трафик на соединениях не предполагается известным. Такая постановка задачи имеет смысл, так как пакеты поступают от пользователей не одновременно. Асинхронная модель [9] и модель с шумной обратной связью [16] рассматривают ту же проблему с другой точки зрения.

Входными данными рассматриваемого алгоритма динамического назначения цен являются 1) общее число пользователей N, 2) пропускные способности соединений b и 3) реакции x^ξ случайно выбранных пользователей на текущие цены λ. Следует подчеркнуть, что данный подход требует знания одного глобального параметра: количества пользователей. Алгоритм строит приближение для оптимальной цены λ^* на основе относительно небольшого числа реакций пользователей. Последовательная процедура построения этого приближения основана на двойственном *стохастическом* методе проекции градиента.

В п. 1 для специального класса функций полезности u_i получены верхние оценки для невязки в ограничениях и для отклонения целевой функции от оптимального значения. Эти оценки равномерны по N и имеют порядок $O(T^{-1/4})$ по числу T измеренных реакций пользователей. Отметим, что быстрый метод градиентного спуска Нестерова [11], примененный к рассматриваемой задаче в работе [3], для тех же величин дает оценки порядка $O(T^{-1})$ по числу итераций T. Однако каждая итерация быстрого метода градиентного спуска требует знания N реакций пользователей, если они измеряются индивидуально. Таким образом, для больших значений N предлагаемый алгоритм может потребовать значительно меньшего числа измерений пользовательских реакций для достижения желаемой точности. Представленные в п. 2 компьютерные эксперименты с квадратичными функциями полезности u_i иллюстрируют этот факт.

Мы предполагаем, что маргинальные полезности в нуле $u_i'(0)$ конечны (и равномерно ограничены по N). Следствием этого предположения является тот факт, что значительная часть пользователей получает нулевые оптимальные скорости передачи данных. Поэтому мы интерпретируем предлагаемый механизм назначения цен как средство управления дополнительным трафиком. Это означает, что первоначально каж-

дый пользователь получает полосу пропускания порядка $\min_{1\leqslant j\leqslant m} b^j/N$ и только оставшиеся пропускные способности распределяются в соответствии с предложенной схемой назначения цен. В дальнейшем, однако, мы не рассматриваем этот аспект.

Обозначения. Мы не делаем явного различия между векторами-строками и векторами-столбцами. Скалярное произведение и евклидова норма обозначаются следующим образом:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{k} x^i y^i, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \qquad x, y \in \mathbf{R}^k.$$

Нижние индексы используются для нумерации векторов, а верхние — для нумерации их компонент. Градиент функции записывается так: $g' := (g_{x^1}, \ldots, g_{x^k})$.

1. Основной результат. Кратко опишем стандартный подход к задаче NUM (0.1), (0.2). Рассмотрим функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{N} u_i(x^i) + \left\langle \lambda, b - \sum_{i=1}^{N} R_i x^i \right\rangle, \qquad (x, \lambda) \in \mathbf{R}_+^N \times \mathbf{R}_+^m,$$

и двойственную целевую функцию

$$q(\lambda) = \sup_{x\in\mathbf{R}_+^N} L(x, \lambda) = \langle \lambda, b\rangle + \sum_{i=1}^{N} \sup_{x^i\in\mathbf{R}_+} \bigl(u_i(x^i) - \langle \lambda, R_i\rangle x^i\bigr), \qquad \lambda \in \mathbf{R}_+^m.$$

Обозначим через x^* решение прямой задачи (0.1), (0.2) и через λ^* решение двойственной задачи

$$q(\lambda) \to \min_{\lambda\in\mathbf{R}_+^m}. \tag{1.1}$$

Формально применяя условия Куна–Таккера, получаем соотношения

$$x^{*,i} \in \arg\max_{x^i\in\mathbf{R}_+} \bigl(u_i(x^i) - \langle \lambda^*, R_i\rangle x^i\bigr), \tag{1.2}$$

$$\lambda^{*,j}\left(b^j - \sum_{i=1}^{N} R_i^j x^{*,i}\right) = 0, \qquad j = 1, \ldots, m, \tag{1.3}$$

$$\sum_{i=1}^{N} R_i x^{*,i} \leqslant b, \qquad x^{*,i} \in \mathbf{R}_+^n. \tag{1.4}$$

Множители Лагранжа $(\lambda^{*,j})_{j=1}^m$ интерпретируются как цены соединений, а $(R_i^j x^{*,i})_{j=1}^m$ являются оптимальными скоростями передачи для i-го пользователя. Соотношения (1.2) означают, что $x^{*,i}$ являются оптимальными реакциями на цены $\lambda^{*,j}$, $j \in L_i$, со стороны эгоистичных

пользователей, стремящихся максимизировать "доход" $u_i(x^i) - \langle \lambda^*, R_i x^i \rangle$. Условия (1.4) обеспечивают допустимость x^*. Из условий дополняющей нежесткости (1.3) вытекает, что пропускные способности соединений j с ненулевыми ценами $\lambda^{*,j} > 0$ используются полностью: $\sum_{i=1}^N R_i^j x^{*,i} = b^j$.

Если функции $-u_i$ сильно выпуклы, то элементарные задачи

$$\overline{x}^i(\lambda) \in \arg\max_{x^i \in \mathbf{R}_+} \left(u_i(x^i) - \langle \lambda, R_i \rangle x^i \right) \tag{1.5}$$

имеют не более одного решения $\overline{x}^i(\lambda)$ для любого $\lambda \in \mathbf{R}_+^m$. Если такие решения существуют, то функция q дифференцируема и

$$q'(\lambda) = b - \sum_{i=1}^N R_i \overline{x}^i(\lambda) = b - R\overline{x}(\lambda). \tag{1.6}$$

Это частный случай теоремы Данскина [4, предложение B.25] (см. также комментарий после формулы (1.10) ниже). Оптимальное решение λ^* может быть вычислено с помощью двойственного метода проекции градиента:

$$\lambda_{t+1} = [\lambda_t - \eta_t(b - R\overline{x}(\lambda_t))]^+, \qquad t \geqslant 0, \tag{1.7}$$

где $\mu^+ = (\max\{\mu^j, 0\})_{j=1}^m$ и $\eta_t > 0$ — последовательность шагов. Если суммарный спрос $\sum_{i=1}^N R_i^j x^i$ известен, то каждое соединение j может корректировать свою цену λ_t^j в соответствии с (1.7), используя только локальную информацию о спросе на его ресурс. При выполнении определенных технических условий последовательность λ_t сходится к λ^*, а $\overline{x}(\lambda_t)$ сходится к x^*. Для задачи NUM данный метод был сформулирован в [9] (см. также [3], [10], [12]).

Как уже было отмечено во введении, в данной работе величины $b - R\overline{x}(\lambda_t)$ не предполагаются известными. Для моделирования запросов от случайных пользователей мы заменяем сумму $\sum_{i=1}^N R_i \overline{x}^i(\lambda)$ случайным вектором $NR_\xi \overline{x}^\xi(\lambda)$, где ξ равномерно распределены на $\{1, \ldots, N\}$, и применяем двойственный стохастический метод проекции градиента. Чтобы получить равномерные по N оценки ошибок аппроксимации, мы накладываем следующие условия на функции полезности.

Предположение 1. Функции u_i дважды непрерывно дифференцируемы на $(-\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon > 0$, и удовлетворяют условиям

$$u_i(0) = 0, \quad 0 < u_i'(0) \leqslant B < \infty, \qquad 1 \leqslant i \leqslant N.$$

Предположение 2. Функции $-u_i$ являются $(N\sigma)$-сильно выпуклыми:

$$-u_i''(x^i) \geqslant N\sigma, \qquad x^i \in \mathbf{R}_+, \quad \sigma > 0. \tag{1.8}$$

Хотя, как видно из (1.8), функции u_i зависят от N, для удобства чтения мы не указываем эту зависимость в обозначениях. Далее без дополнительных оговорок считается, что предположения 1, 2 выполнены.

Нашим основным примером являются квадратичные полезности

$$u_i(x^i) = a_i x^i - \frac{N\sigma_i}{2}(x^i)^2. \tag{1.9}$$

Чтобы обеспечить выполнение предположений 1, 2, мы требуем, чтобы выполнялись неравенства

$$0 < a_i \leqslant B, \qquad \sigma_i \geqslant \sigma.$$

Если передача данных бесплатна, то такие функции полезности индуцируют индивидуальные запросы порядка $1/N$:

$$\widehat{x}^i = \frac{1}{N}\,\frac{a_i}{\sigma_i}.$$

Поскольку обычно ресурсы дефицитны, то совокупный спрос $\sum_{i=1}^{N} R_i \widehat{x}^i$ должен покомпонентно превосходить b.

Можно рассматривать (1.9) как аппроксимацию произвольной $(N\sigma_i)$-сильно вогнутой функции вблизи начала координат. Кроме того, можно считать, что a_i является ценностью единичной скорости передачи для пользователя i. Второе слагаемое в (1.9) может рассматриваться как штраф, назначаемый сетью. Из (1.5) находим

$$\overline{x}^i = \frac{(a_i - \langle \lambda, R_i \rangle)^+}{N\sigma_i}.$$

Следовательно, оптимальные скорости передачи (если они положительны) пропорциональны разности между коэффициентами ценности a_i и суммарной ценой $\langle \lambda, R_i \rangle$ используемых соединений. Если пользователи отличаются только значениями a_i (т.е. $\sigma_i = \sigma$), то коэффициент пропорциональности является общим. Данный коэффициент учитывает общее число N пользователей.

Заметим, что функции полезности (1.9) убывают при больших значениях аргумента. Однако спрос пользователей $\overline{x}^i(\lambda)$ не может превысить $\widehat{x}^i$ для любого вектора цен λ. Следовательно, пользователи рассматривают u_i только на интервалах $[0, \widehat{x}^i]$, где эти функции являются возрастающими.

Для $f\colon \mathbf{R} \to [0, \infty]$ обозначим через f^* сопряженную функцию:

$$f^*(z) = \sup_{x \in \mathbf{R}} (xz - f(x)).$$

Положим

$$-\overline{u}_i(y) = \begin{cases} -u_i(y), & x \in \mathbf{R}_+, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Двойственная целевая функция принимает вид

$$q(\lambda) = \langle \lambda, b \rangle + \sum_{i=1}^{n} (-\overline{u}_i)^*(-\langle R_i, \lambda \rangle).$$

Поскольку функции $-u_i$ являются сильно выпуклыми, элементарные задачи (1.5) имеют единственные решения $\overline{x}^i(\lambda)$ (см. [2, теорема 5.25]). Из формулы для субдифференциала сопряженной функции (см. [2, следствие 4.21]),

$$\partial f^*(z) = \arg\max_x (xz - f(x)),$$

вытекает, что функции $(-\overline{u}_i)^*(z)$ дифференцируемы и

$$\frac{\partial}{\partial \lambda^j}(-\overline{u}_i)^*(-\langle R_i, \lambda \rangle) = -R_i^j \overline{x}^i(\lambda). \tag{1.10}$$

Следовательно, функция q дифференцируема и ее градиент вычисляется по формуле (1.6).

Задача (0.1), (0.2) разрешима, так как множество допустимых решений компактно. По сильной теореме двойственности (см. [5, предложение 5.3.6]) оптимальное решение λ^* двойственной задачи (1.1) существует и $u(x^*) = q(\lambda^*)$. Кроме того, пара (x^*, λ^*) состоит из прямого и двойственного оптимальных решений тогда и только тогда, когда x^* допустимо, $\lambda^* \geqslant 0$ и выполняются условия оптимальности (1.4), (1.5) (см. [5, предложение 5.3.2]).

Лемма 1. *Оптимальное решение λ^* двойственной задачи удовлетворяет неравенствам*

$$0 \leqslant \lambda^{*,j} \leqslant B, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Кроме того,

$$\left| \frac{\partial q(\lambda)}{\partial \lambda^j} \right| \leqslant \max\left\{ b^j, \frac{B}{\sigma} - b^j \right\}, \qquad \lambda \in [0, B]^m.$$

Доказательство. Если λ^* является оптимальным решением двойственной задачи, то единственное оптимальное решение x^* прямой задачи удовлетворяет соотношению

$$x^* \in \arg\max_{x \in \mathbf{R}_+^N} L(x, \lambda^*)$$

(см. [1, теорема 12.11]). По формуле (1.5) имеем $x^* = \overline{x}(\lambda^*)$. Отсюда следует, что x^* определяется соотношениями

$$u_i'(x^{*,i}) - \langle R_i, \lambda^* \rangle \leqslant 0, \quad x^{*,i}\big(u_i'(x^{*,i}) - \langle R_i, \lambda^* \rangle\big) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant N \quad (1.11)$$

(см. [1, пример 9.4]).

Пусть $j \in \{1, \ldots, m\}$. Напомним, что множество $I_j = \{i\colon R_i^j = 1\}$ всех пользователей i, использующих соединение j, непусто. Если $\lambda^{*,j} > B$, то

$$u_i'(x^{*,i}) \leqslant u_i'(0) \leqslant B < \lambda^{*,j} \leqslant \langle R_i, \lambda^* \rangle, \qquad i \in I_j,$$

так как функции $x^i \mapsto u_i'(x^i)$ являются убывающими. Из (1.11) следует, что $x^{*,i} = 0$, $i \in I_j$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{N} R_i^j x^{*,i} = \sum_{i \in I_j} R_i^j x^{*,i} = 0,$$

что противоречит условию дополняющей нежесткости (1.3).

Далее, для $(N\sigma)$-сильно выпуклой функции $-u_i$ справедливо неравенство

$$\big(-u_i'(x^i) + u_i'(y^i)\big)(x^i - y^i) \geqslant N\sigma(x^i - y^i)^2, \qquad x^i, y^i \in \mathbf{R}_+$$

(см. [2, теорема 5.24]). Положим $x^i = \overline{x}^i(\lambda)$, $y^i = 0$:

$$\big(-u_i'(\overline{x}^i) + u_i'(0)\big)\overline{x}^i \geqslant N\sigma(\overline{x}^i)^2.$$

Используя условие оптимальности (1.11) для $\overline{x}^i(\lambda)$:

$$\overline{x}^i\big(u_i'(\overline{x}^i) - \langle R_i, \lambda \rangle\big) = 0,$$

находим, что

$$\overline{x}^i\big(u_i'(0) - \langle R_i, \lambda \rangle\big) \geqslant N\sigma(\overline{x}^i)^2.$$

Следовательно,

$$\overline{x}^i \leqslant \frac{1}{N\sigma}\big(u_i'(0) - \langle R_i, \lambda \rangle\big) \leqslant \frac{B}{N\sigma}. \quad (1.12)$$

Неравенство

$$\left|\frac{\partial q(\lambda)}{\partial \lambda^j}\right| = \left|b^j - \sum_{i=1}^{N} R_i^j \overline{x}^i\right| \leqslant \max\left\{b^j, \frac{B}{\sigma} - b^j\right\},$$

вытекающее из (1.12), завершает доказательство леммы 1.

Лемма 1 показывает, что минимизация двойственной целевой функции может производиться на гиперкубе $\Lambda = [0, B]^m$. Пусть $\Pi_\Lambda(y) = \arg\min\{\|z - y\|^2 \colon z \in S\}$ — ортогональная проекция на Λ:

$$\Pi_\Lambda(y)^j = \begin{cases} 0, & y^j \leqslant 0, \\ y^j, & 0 \leqslant y^j \leqslant B, \\ B, & y^j \geqslant B \end{cases}$$

(см. пример 8.10 в книге [1]). На некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ рассмотрим последовательность $(\xi_r)_{r=1}^\infty$ независимых случайных величин, равномерно распределенных на $\{1, \dots, N\}$:

$$\mathbf{P}(\xi_r = i) = \frac{1}{N}, \qquad i \in \{1, \dots, N\}.$$

Пусть $\mathscr{F}_k = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_k)$ — естественная фильтрация процесса $(\xi_r)_{r=1}^\infty$.

Рекуррентная формула

$$\lambda_{t+1} = \Pi_\Lambda\big(\lambda_t - \eta_t(b - NR_{\xi_{t+1}}\overline{x}^{\xi_{t+1}}(\lambda_t))\big), \quad t \geqslant 1, \qquad \lambda_1 \in \Lambda, \tag{1.13}$$

с детерминированными шагами $\eta_t > 0$ определяет стохастический метод проекции градиента для задачи

$$q(\lambda) \to \min_{\lambda \in \Lambda}.$$

Действительно, поскольку случайная величина λ_t является $\mathscr{F}_t$-измеримой, следующее условное математическое ожидание может быть вычислено с помощью "заморозки" λ_t:

$$\mathbf{E}\big(b - NR_{\xi_{t+1}}\overline{x}^{\xi_{t+1}}(\lambda_t) \;\big|\; \mathscr{F}_t\big) = b - \sum_{i=1}^N R_i \overline{x}^i(\lambda_t) = q'(\lambda_t). \tag{1.14}$$

Рассуждения в доказательстве следующей леммы аналогичны рассуждениям, используемым при доказательстве теоремы 3.1 в [7].

Лемма 2. *Пусть λ_t — последовательность, порожденная стохастическим методом проекции градиента (1.13). Тогда для любой убывающей последовательности $\eta_t > 0$ справедлива оценка*

$$\mathbf{E}q(\overline{\lambda}_T) \leqslant q(\lambda^*) + \frac{1}{T}\left(\frac{mB^2}{2}\frac{1}{\eta_T} + \frac{L^2}{2}\sum_{t=1}^T \eta_t\right), \tag{1.15}$$

$$\overline{\lambda}_T := \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T \lambda_t, \qquad L := \left(\sum_{j=1}^m \max\left\{b^j, \frac{B}{\sigma} - b^j\right\}^2\right)^{1/2}.$$

Доказательство. Пусть $z_t = b - NR_{\xi_t}\overline{x}^{\xi_t}(\lambda_t)$, $r_t = \lambda_t - \lambda^*$. Используя неравенство (1.12), находим

$$\mathbf{E}\|z_{t+1}\|^2 = \mathbf{E}\sum_{j=1}^{m}\bigl(b^j - NR^j_{\xi_{t+1}}\overline{x}^{\xi_{t+1}}\bigr)^2 \leqslant \sum_{j=1}^{m}\max\left\{b^j, \frac{B}{\sigma} - b^j\right\}^2 = L^2.$$

Далее, поскольку по "теореме Пифагора"

$$\|\Pi_\Lambda(\mu) - \lambda^*\| \leqslant \|\mu - \lambda^*\|, \qquad \mu \in \mathbf{R}^m$$

(см. [7, теорема 2.1]), то

$$\begin{aligned}\|r_{t+1}\|^2 &= \|\lambda_{t+1} - \lambda^*\|^2 = \|\Pi_\Lambda(\lambda_t - \eta_t z_{t+1}) - \lambda^*\|^2 \leqslant \|\lambda_t - \eta_t z_{t+1} - \lambda^*\|^2 \\ &= \|r_t\|^2 - 2\eta_t\langle z_{t+1}, \lambda_t - \lambda^*\rangle + \eta_t^2\|z_{t+1}\|^2.\end{aligned}$$

С учетом (1.14) имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\|r_{t+1}\|^2 &= \mathbf{E}\|r_t\|^2 - 2\eta_t\mathbf{E}\langle\mathbf{E}(z_{t+1}\,|\,\mathscr{F}_t), \lambda_t - \lambda^*\rangle + \eta_t^2\mathbf{E}\|z_{t+1}\|^2 \\ &\leqslant \mathbf{E}\|r_t\|^2 - 2\eta_t\mathbf{E}\langle q'(\lambda_t), \lambda_t - \lambda^*\rangle + \eta_t^2 L^2.\end{aligned}$$

Из выпуклости функции q, а именно из неравенства

$$q(\lambda^*) - q(\lambda_t) \geqslant \langle q'(\lambda_t), \lambda^* - \lambda_t\rangle,$$

вытекает, что

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\|r_{t+1}\|^2 &\leqslant \mathbf{E}\|r_t\|^2 + 2\eta_t\mathbf{E}(q(\lambda^*) - q(\lambda_t)) + \eta_t^2 L^2, \\ \mathbf{E}q(\lambda^t) - q(\lambda^*) &\leqslant \frac{\mathbf{E}\|r_t\|^2 - \mathbf{E}\|r_{t+1}\|^2}{2\eta_t} + \frac{L^2\eta_t}{2}.\end{aligned}$$

После суммирования и перегруппировки слагаемых находим

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{T}\bigl(\mathbf{E}q(\lambda^t) - q(\lambda^*)\bigr) &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta_1}\mathbf{E}\|r_1\|^2 + \left(\frac{1}{\eta_2} - \frac{1}{\eta_1}\right)\mathbf{E}\|r_2\|^2\right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{\eta_T} - \frac{1}{\eta_{T-1}}\right)\mathbf{E}\|r_T\|^2 - \frac{1}{\eta_T}\mathbf{E}\|r_{T+1}\|^2\right) + \frac{L^2}{2}\sum_{t=1}^{T}\eta_t \\ &\leqslant \frac{mB^2}{2}\,\frac{1}{\eta_T} + \frac{L^2}{2}\sum_{t=1}^{T}\eta_t.\end{aligned}$$

Здесь использованы оценки $\|r_t\|^2 \leqslant mB^2$ и монотонное убывание η_t. Поделив на T и воспользовавшись выпуклостью q:

$$q(\overline{\lambda}_T) \leqslant \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}q(\lambda_t),$$

получаем искомую оценку (1.15). Лемма 2 доказана.

Основным результатом работы является следующая теорема. Ее доказательство использует идеи доказательства теоремы 1 в работе [3].

Теорема 1. *Пусть λ_t определяется рекуррентной формулой (1.13) с $\eta_t = K/\sqrt{t}$. Тогда для $\overline{\lambda}_T = (1/T)\sum_{t=1}^{T}\lambda_t$ справедливы оценки*

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{N} R_i^j \overline{x}^i(\overline{\lambda}_T) - b^j\right)^+ \leqslant \sqrt{\frac{2D}{\sigma}}\,\frac{1}{T^{1/4}}, \qquad D = \frac{mB^2}{2K} + KL^2, \tag{1.16}$$

$$u(x^*) - \mathbf{E}u\big(\overline{x}(\overline{\lambda}_T)\big) \leqslant B\sqrt{\frac{2D}{\sigma}}\,\frac{1}{T^{1/4}}. \tag{1.17}$$

Доказательство. Поскольку

$$\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{\sqrt{t}} = \sum_{t=1}^{T}\int_{t-1}^{t}\frac{du}{\sqrt{t}} \leqslant \sum_{t=1}^{T}\int_{t-1}^{t}\frac{du}{\sqrt{u}} = \int_0^T \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{T},$$

то, подставляя $\eta_t = K/\sqrt{t}$ в (1.15), находим

$$\mathbf{E}q(\overline{\lambda}_T) \leqslant q(\lambda^*) + \frac{D}{\sqrt{T}}. \tag{1.18}$$

В силу предположения 2 функция $x \mapsto -L(x,\lambda)$ является $(N\sigma)$-сильно выпуклой, т.е. функция

$$-L(x,\lambda) - \frac{\sigma N}{2}\|x\|^2$$

является выпуклой. Следовательно,

$$\frac{N\sigma}{2}\sum_{i=1}^{N}(x^i - \overline{x}^i(\lambda))^2 \leqslant L(\overline{x}(\lambda),\lambda) - L(x,\lambda)$$

(см. [2, теорема 5.25]). С другой стороны,

$$L(\overline{x}(\lambda),\lambda) - L(x,\lambda) = q(\lambda) - \sum_{i=1}^{N} u_i(x^i) - \left\langle \lambda, b - \sum_{i=1}^{N} R_i x^i \right\rangle.$$

В частности, для оптимального решения x^* прямой задачи (0.1), (0.2) имеем

$$\frac{N\sigma}{2}\sum_{i=1}^{N}(x^{*,i} - \overline{x}^i(\lambda))^2 \leqslant q(\lambda) - u(x^*) = q(\lambda) - q(\lambda^*).$$

С учетом (1.18) отсюда следует, что

$$\mathbf{E}\sum_{i=1}^{N}\big(x^{*,i} - \overline{x}^i(\overline{\lambda}_T)\big)^2 \leqslant \frac{2}{N\sigma}\big(\mathbf{E}q(\overline{\lambda}_T) - q(\lambda^*)\big) \leqslant \frac{2D}{N\sigma\sqrt{T}}. \tag{1.19}$$

Для невязки в условиях допустимости справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^{N} R_i^j \overline{x}^i(\overline{\lambda}_T) - b^j \leqslant \sum_{i=1}^{N} R_i^j \overline{x}^i(\overline{\lambda}_T) - \sum_{i=1}^{N} R_i^j x^{*,i} \leqslant \sum_{i=1}^{N} \left|\overline{x}^i(\overline{\lambda}_T) - x^{*,i}\right| \leqslant \sqrt{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{x}^i(\overline{\lambda}_T) - x^{*,i}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Используя (1.19), находим

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{N} R_i^j \overline{x}^i(\overline{\lambda}_T) - b^j\right)^2 \leqslant N \sum_{i=1}^{N}\left(\overline{x}^i(\overline{\lambda}_T) - x^{*,i}\right)^2 \leqslant \frac{2D}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Отсюда вытекает (1.16). Далее,

$$\sum_{i=1}^{N}\left(u_i(x^{*,i}) - u_i(\overline{x}^i)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{N} u_i'(\overline{x}^i)(x^{*,i} - \overline{x}^i) \leqslant B\sum_{i=1}^{N}|x^{*,i} - \overline{x}^i| \leqslant B\sqrt{N}\left(\sum_{i=1}^{N}(x^{*,i} - \overline{x}^i)^2\right)^{1/2}.$$

Снова используя (1.19), получаем неравенство

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(u_i(x^{*,i}) - u_i(\overline{x}^i)\right)\right)^2 \leqslant \frac{2B^2 D}{\sigma\sqrt{T}},$$

из которого вытекает (1.17). Теорема 1 доказана.

Оценки (1.16), (1.17) не зависят от числа N пользователей. Этот качественный результат составляет основное содержание теоремы 1.

Пусть $B/\sigma \geqslant 2\max_{1\leqslant j\leqslant m} b^j$. Тогда

$$L = \left(\sum_{j=1}^{m} \max\left\{b^j, \frac{B}{\sigma} - b^j\right\}^2\right)^{1/2} \leqslant \frac{B}{\sigma}\sqrt{m}. \tag{1.20}$$

Заменим в (1.16) константу L ее верхней оценкой (1.20):

$$D = mB^2\left(\frac{1}{2K} + \frac{K}{\sigma^2}\right)$$

и выберем "оптимальную" константу K, минимизируя данное выражение:

$$K = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}. \tag{1.21}$$

Данная константа будет использована в компьютерных экспериментах в п. 2.

Напомним, что непрерывно дифференцируемая функция $f\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ называется β-гладкой, если

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leqslant \beta\|x - y\|.$$

В силу теоремы 5.26 из [2] функции $\varphi_i(z) := (-\overline{u})_i^*(z)$ одной переменной являются $1/(N\sigma)$-гладкими. В силу (1.10)

$$q'(\lambda) = b - \sum_{i=1}^{N} \varphi_i'(-\langle R_i, \lambda\rangle)R_i.$$

Следовательно, функция q является m/σ-гладкой:

$$\begin{aligned}\|q'(\lambda) - q'(\mu)\| &\leqslant \sum_{i=1}^{N} |\varphi_i'(-\langle R_i, \lambda\rangle) - \varphi_i'(-\langle R_i, \mu\rangle)| \cdot \|R_i\| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma N}|\langle R_i, \lambda - \mu\rangle|\sqrt{m} \leqslant \frac{m}{\sigma}\|\lambda - \mu\|. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Константу в данной оценке можно уточнить, используя структуру сети (см. [3, лемма III.1]).

Следуя [3], рассмотрим быстрый метод градиентного спуска Нестерова [11]:

$$\mu_1 = \widehat{\lambda}_0, \quad \tau_1 = 1, \tag{1.23}$$

$$\widehat{\lambda}_t = \left[\mu_t - \frac{\sigma}{m}q'(\mu_t)\right]^+ = \left[\mu_t - \frac{\sigma}{m}\left(b - \sum_{i=1}^{N} R_i\overline{x}^i(\mu_t)\right)\right]^+, \tag{1.24}$$

$$\tau_{t+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\tau_t^2}}{2}, \quad \mu_{t+1} = \widehat{\lambda}_t + \frac{\tau_t - 1}{\tau_{t+1}}(\widehat{\lambda}_t - \widehat{\lambda}_{t-1}), \tag{1.25}$$

где $t \geqslant 1$. Обозначим через $L_u = B\sqrt{N}$ константу Липшица функции u:

$$\begin{aligned}|u(x) - u(y)| &\leqslant \sum_{i=1}^{N} |u_i'(z^i)(x^i - y^i)| \leqslant \sum_{i=1}^{N} |u_i'(0)||x^i - y^i| \\ &\leqslant B\sum_{i=1}^{N} |x^i - y^i| \leqslant B\sqrt{N}\,\|x - y\|\end{aligned}$$

и через $L_{q'} = m/\sigma$ константу Липшица вектор-функции q' (см. (1.22)). Для матрицы маршрутизации R справедлива оценка

$$\left|\sum_{k=1}^{N} R_k^j x^k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |x^k| \leqslant \sqrt{N}\,\|x\|.$$

В обозначениях работы [3] это означает, что

$$\|R\|_{2,\infty} := \max\left\{\max_j \left|\sum_{k=1}^N R_k^j x^k\right| : \|x\| \leqslant 1\right\} \leqslant \sqrt{N}.$$

Заметим также, что $\|\widehat{\lambda}_0 - \lambda^*\| \leqslant B\sqrt{m}$. Теоремы 1 и 2 работы [3] дают следующие оценки:

$$q(\widehat{\lambda}_T) - q(\lambda^*) \leqslant 2L_{q'} \frac{\|\widehat{\lambda}_0 - \lambda^*\|^2}{(T+1)^2} \leqslant \frac{C}{T^2}, \qquad C = \frac{2m^2B^2}{\sigma},$$

$$u(x^*) - u(\overline{x}^i(\widehat{\lambda}_T)) \leqslant L_u \sqrt{\frac{2C}{\sigma N}} \frac{1}{T} = 2\frac{mB^2}{\sigma T}, \tag{1.26}$$

$$\left[\sum_{i=1}^N R_i^j \overline{x}^i(\widehat{\lambda}_T) - b^j\right]^+ \leqslant \|R\|_{2,\infty} \sqrt{\frac{2C}{\sigma N}} \frac{1}{T} = 2\frac{mB}{\sigma T}. \tag{1.27}$$

Быстрый метод градиентного спуска будет использован в п. 2 для сравнения со стохастическим методом проекции градиента (1.13). Как уже отмечено во введении, по порядку T оценки (1.26), (1.27) значительно лучше оценок (1.16), (1.17), но каждая итерация быстрого метода градиентного спуска может быть существенно более трудоемкой, чем в методе (1.13).

2. Примеры.

Пример 1. Чтобы лучше понять свойства оптимальных решений, соответствующих квадратичным функциям полезности (1.9), рассмотрим сеть с двумя соединениями и тремя пользователями. Предположим, что пользователь 1 использует оба соединения, а пользователи 2 и 3 используют соединения 1 и 2 соответственно. Пусть пропускные способности соединений равны 2 и 1. Таким образом,

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Данная сеть была рассмотрена в [14, пример 2.3] в предположении, что функции полезности пользователей являются логарифмическими: $u_i(x^i) = \ln x^i$. В этом случае решения прямой задачи (0.1), (0.2) и двойственной задачи (1.1) имеют вид

$$x^* = \left(\frac{1}{\lambda^{*,1} + \lambda^{*,2}}, \frac{1}{\lambda^{*,1}}, \frac{1}{\lambda^{*,2}}\right), \quad \lambda^{*,1} = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}, \quad \lambda^{*,2} = \sqrt{3}.$$

Заметим, что

$$0 < \lambda^{*,1} < \lambda^{*,2}, \quad 0 < x^{*,1} < x^{*,3} < x^{*,2}. \tag{2.2}$$

Рассмотрим теперь пользователей с одинаковыми функциями полезности (1.9):

$$u_i(x^i) = ax^i - \frac{3}{2}\sigma(x^i)^2.$$

Элементарный анализ условий оптимальности (1.2)–(1.4) дает решения, представленные в табл. 1.

Таблица 1. Зависимость оптимального решения от параметра a/σ

a/σ	$(0, 3/2]$	$[3/2, 9/2]$	$[9/2, 9]$	$[9, \infty)$
$\lambda^{*,1}$	0	0	$2a/3 - 3\sigma$	$a - 6\sigma$
$\lambda^{*,2}$	0	$a - 3\sigma/2$	$2a/3$	$a - 3\sigma$
$x^{*,1}$	$a/(3\sigma)$	$1/2$	$1 - a/(9\sigma)$	0
$x^{*,2}$	$a/(3\sigma)$	$a/(3\sigma)$	$1 + a/(9\sigma)$	2
$x^{*,3}$	$a/(3\sigma)$	$1/2$	$a/(9\sigma)$	1

Заметим, что при всех значениях параметра a/σ неравенства (2.2) выполняются, по крайней мере, в нестрогом смысле. Далее, зафиксируем общий коэффициент ценности a и будем рассматривать σ как штраф, назначаемый сетью. Если штраф очень велик: $a/\sigma \leqslant 3/2$, то ресурсы сети доступны бесплатно и пользователи выбирают одинаковые скорости передачи, так как их функции полезности одинаковы. Если $a/\sigma \in (3/2, 9/2]$, то первое соединение доступно бесплатно. Пропускная способность второго соединения поровну делится между первым и третьим пользователями. Второй пользователь использует оставшуюся пропускную способность первого соединения лишь частично. Если $a/\sigma \in (9/2, 9]$, то оба ресурса дефицитны. В этом случае неравенства (2.2) выполняются буквально. Наконец, при очень малом штрафе, $a/\sigma > 9$, первый пользователь "устраняется с рынка", а два оставшихся полностью используют пропускные способности соответствующих соединений.

Пример 2. Рассмотрим "сеть", состоящую из единственного соединения с пропускной способностью $b > 0$, используемого большим количеством N пользователей с функциями полезности

$$u_i(x^i) = a_i x^i - \frac{\sigma N}{2}(x^i)^2, \qquad a_i \in (0, B), \quad \sigma > 0. \tag{2.3}$$

Задачи (1.5) легко решаются:

$$\overline{x}^i(\lambda) = \frac{1}{N}\,\frac{(a_i - \lambda)^+}{\sigma}. \tag{2.4}$$

Оптимальное решение λ^* двойственной задачи является решением уравнения

$$q'(\lambda) = b - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \frac{(a_i - \lambda)^+}{\sigma} = 0. \tag{2.5}$$

Стохастический метод проекции градиента (1.13) принимает вид

$$\lambda_{t+1} = \Pi_{[0,B]}\big(\lambda_t - \eta_t(b - N\overline{x}^{\xi^{t+1}})\big),$$

$$\Pi_{[0,B]}(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0, \\ y, & y \in (0, B), \\ A, & y \geqslant B. \end{cases}$$

Пусть $b = 5$, $\sigma = 1$, $N = 10^5$ и предположим, что коэффициенты ценности $(a_i)_{i=1}^N$ равномерно распределены на $(0, B)$, $B = 100$. Было сгенерировано $k = 30$ "популяций" по N пользователей с полезностями (2.3). Для каждого из 30 экземпляров задачи решение λ^* уравнения (2.5) было получено методом бисекции `optimize.bisect` из модуля `scipy` (Python) со стандартными параметрами точности. Средние значения оптимальной цены, оптимальной суммарной полезности и оптимального спроса на бесплатный ресурс равны

$$\lambda^* = 68.3, \quad u(x^*) = 394.4, \quad \sum_{i=1}^{N} \overline{x}^i(0) = 50.$$

Таким образом, спрос на бесплатный ресурс в 10 раз выше доступной пропускной способности $b = 5$. Поскольку a_i равномерно распределены на $(0, 100)$, формула (2.4) показывает, что в среднем почти 70% пользователей получат нулевую оптимальную скорость передачи $\overline{x}^i(\lambda^*)$.

Стохастический метод проекции градиента (1.13) был применен с $\lambda_1 = 0$, $\eta_t = K/\sqrt{t}$, где $K = 1/\sqrt{2}$ определено по формуле (1.21). Рассмотрим относительные ошибки для оптимальной цены, оптимального суммарного спроса и оптимальной полезности сети:

$$\varepsilon_t^1 := \frac{|\overline{\lambda}_t - \lambda^*|}{\lambda^*}, \quad \varepsilon_t^2 := \frac{1}{b}\left|\sum_{i=1}^{N} \overline{x}^i(\overline{\lambda}_t) - b\right|, \tag{2.6}$$

$$\varepsilon_t^3 := \frac{1}{u(x^*)}\left|\sum_{i=1}^{N} u_i(\overline{x}^i(\overline{\lambda}_t)) - u(x^*)\right|. \tag{2.7}$$

Усредненные по выборке из 30 задач значения величин ε_T^i, а также их максимальные значения для той же выборки представлены в табл. 2. Заметим, что ошибки в оптимальных спросе и полезности примерно в четыре раза больше, чем ошибки в оптимальной цене. Отметим также, что

Таблица 2. Относительные ошибки стохастического метода проекции градиента

Число итераций T	Средние относительные ошибки в			Максимальные относительные ошибки в		
	ценах	спросе	полезности	ценах	спросе	полезности
1000	0.0129	0.056	0.049	0.035	0.155	0.132
2000	0.0078	0.034	0.029	0.019	0.082	0.072
4000	0.0052	0.022	0.019	0.016	0.069	0.060

число измеренных скоростей передачи $T \leqslant 4000$ значительно меньше, чем число пользователей: $T/N \leqslant 0.04$.

Быстрый метод градиентного спуска (1.23)–(1.25) (при $\widehat{\lambda}_0 = 0$) требует лишь нескольких итераций для достижения сравнимой точности. Например, средняя относительная ошибка в оптимальной цене равна 0.0063 при 10 итерациях. Однако если запросы пользователей измеряются индивидуально, то это требует 10^6 измерений.

Для неизвестного λ^* ошибки (2.6), (2.7) ненаблюдаемы. Мы использовали очень простое правило остановки итераций, основанное на наблюдаемых величинах $\overline{\lambda}_t = (1/t)\sum_{k=1}^{t} \lambda_k$:

$$\tau = \min\left\{ t \geqslant 2 \colon \frac{|\overline{\lambda}_t - \overline{\lambda}_{t-1}|}{\overline{\lambda}_{t-1}} < \delta \right\}. \tag{2.8}$$

Для той же выборки из 30 задач результаты представлены в табл. 3.

Таблица 3. Относительные ошибки при использовании правила остановки (2.8)

δ	Среднее число итераций	Макс. число итераций	Мин. число итераций	Средняя относительная ошибка в цене	Максимальная относительная ошибка в цене
10^{-7}	792	1697	218	0.0140	0.045
10^{-8}	2170	4659	549	0.0091	0.045
10^{-9}	4954	11538	768	0.0058	0.020

Пример 3. Рассмотрим сеть с матрицей маршрутизации и пропускными способностями (2.1). В отличие от примера 1, предположим, что имеется $N = 1.2 \cdot 10^5$ пользователей. Пусть пользователи с номерами $i \in \{1, \ldots, N/3\}$ используют оба соединения, а пользователи с номерами $i \in \{N/3+1, \ldots, 2N/3\}$ и $i \in \{2N/3+1, \ldots, N\}$ — соединения 1 и 2 соответственно. Предполагается, что функции полезности имеют вид (2.3), где $\sigma = 1$ и a_i равномерно распределены на $(0, B)$.

Как и в примере 2, была сгенерирована выборка из $k = 30$ задач. Для каждой задачи было сделано 200 итераций быстрого градиентного метода (1.23)–(1.25). Полученный вектор $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ будем рассматривать как точное решение двойственной задачи. Соответствующее решение $x^* = \overline{x}(\lambda^*)$ прямой задачи дает невязку в ограничениях (0.2) порядка 10^{-4}.

Положим $\langle x^* \rangle_{i=k+1}^{k+r} = (1/r) \sum_{i=1}^{r} x_{i+k}^*$. При $B = 100$ компьютерные эксперименты показывают, что пользователи, задействующие оба соединения, устраняются с рынка: $\langle x^* \rangle_{i=1}^{N/3} = 0$. Оставшиеся пользователи делят ресурсы сети так, что

$$\langle x^* \rangle_{i=N/3+1}^{2N/3} = 5 \cdot 10^{-5}, \quad \langle x^* \rangle_{i=2N/3+1}^{N} = 2.5 \cdot 10^{-5}$$

подобно случаю $a/\sigma > 9$ в примере 1. В данном случае, однако, много элементов x_i^*, $i > N/3$, также равны 0. При $B = 12$ получены следующие результаты:

$$\langle x^* \rangle_{i=1}^{N/3} \approx 10^{-5} < \langle x^* \rangle_{i=2N/3+1}^{N} \approx 1.5 \cdot 10^{-5} < \langle x^* \rangle_{i=N/3+1}^{2N/3} \approx 4 \cdot 10^{-5},$$

похожие на результаты для случая $a/\sigma \in (9/2, 9)$ в примере 1.

Стохастический метод проекции градиента был применен с $\lambda_1 = 0$ и $\eta_t = 1/\sqrt{2t}$, как и в примере 2. Ошибки в ценах и спросе, аналогичные (1.6), понимаются поэлементно:

$$\varepsilon_t^{1,j} := \frac{|\overline{\lambda}_t^j - \lambda^{*,j}|}{\lambda^{*,j}}, \quad \varepsilon_t^{2,j} := \frac{1}{b^j} \left| \sum_{i=1}^{N} \overline{x}_i^j(\overline{\lambda}_t) - b^j \right|.$$

Ошибки в полезности сети вычисляются по формуле (2.7). Относительные ошибки, усредненные по 30 задачам выборки, и их максимальные значения представлены в таблицах 4, 5.

Таблица 4. Относительные ошибки стохастического метода проекции градиента для сети с двумя соединениями, $B = 12$

Число итераций T	Средние относительные ошибки в			Максимальные относительные ошибки в		
	ценах	спросе	полезности	ценах	спросе	полезности
2000	0.104 0.022	0.023 0.030	0.011	0.249 0.061	0.060 0.083	0.037
4000	0.080 0.015	0.018 0.021	0.008	0.247 0.037	0.071 0.056	0.032
8000	0.048 0.012	0.012 0.016	0.006	0.140 0.033	0.031 0.036	0.017

Таблица 5. Относительные ошибки стохастического метода проекции градиента для сети с двумя соединениями, $B = 100$

Число итераций T	Средние относительные ошибки в			Максимальные относительные ошибки в		
	ценах	спросе	полезности	ценах	спросе	полезности
2000	0.020 0.033	0.078 0.217	0.093	0.050 0.072	0.196 0.495	0.208
4000	0.012 0.018	0.045 0.116	0.049	0.033 0.046	0.122 0.303	0.110
8000	0.006 0.010	0.021 0.062	0.026	0.022 0.034	0.081 0.220	0.072

3. Заключение. В данной работе использован двойственный стохастический метод проекции градиента для назначения цен на скорости передачи информации через соединения сети. Основным примером функции полезности пользователей является разность между линейной полезностью, индивидуальной для каждого пользователя, и квадратичным штрафом, назначаемым сетью. Штраф содержит коэффициент, пропорциональный общему числу N пользователей. Для класса функций полезности, содержащего указанные квадратичные функции, получены оценки для ошибок в определении цен, стимулирующих оптимальное распределение ресурсов, а также для невязок в ограничениях и в оптимальном значении целевой функции сети. Эти оценки равномерны по N. Приведены компьютерные эксперименты, подтверждающие, что, по крайней мере для сетей с малым числом соединений, удовлетворительная точность может быть получена путем измерения относительно небольшого числа индивидуальных реакций пользователей на цены соединений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Beck, *Introduction to nonlinear optimization*: *theory*, *algorithms*, *and applications with MATLAB*, MOS–SIAM Ser. Optim., **19**, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA; Mathematical Optimization Society (MOS), Philadelphia, PA, 2014, xii+282 pp.
2. A. Beck, *First-order methods in optimization*, MOS–SIAM Ser. Optim., **25**, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA; Mathematical Optimization Society (MOS), Philadelphia, PA, 2017, xii+475 pp.
3. A. Beck, A. Nedić, A. Ozdaglar, M. Teboulle, "An $O(1/k)$ gradient method for network resource allocation problems", *IEEE Trans. Control Netw. Syst.*, **1**:1 (2014), 64–73.
4. D. P. Bertsekas, *Nonlinear programming*, 2nd ed., Athena Sci. Optim. Comput. Ser., Athena Scientific, Belmont, MA, 1999, xiv+777 pp.

5. D. P. Bertsekas, *Convex optimization theory*, 2nd ed., Athena Scientific, Nashua, NH, 2009, x+246 pp.
6. Mung Chiang, S. H. Low, A. R. Calderbank, J. C. Doyle, "Layering as optimization decomposition: a mathematical theory of network architectures", *Proc. IEEE*, **95**:1 (2007), 255–312.
7. E. Hazan, "Introduction to online convex optimization", *Foundations and Trends in Optimization*, **2**:3-4 (2016), 157–325.
8. F. P. Kelly, A. K. Maulloo, D. K. H. Tan, "Rate control for communication networks: shadow prices, proportional fairness and stability", *J. Oper. Res. Soc.*, **49**:3 (1998), 237–252.
9. S. H. Low, D. E. Lapsley, "Optimization flow control. I. Basic algorithm and convergence", *IEEE/ACM Trans. Netw.*, **7**:6 (1999), 861–874.
10. A. Nedić, A. Ozdaglar, "Cooperative distributed multi-agent optimization", *Convex optimization in signal processing and communications*, Ch. 10, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010, 340–386.
11. Ю. Е. Нестеров, "Метод решения задачи выпуклого программирования со скоростью сходимости $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$", *Докл. АН СССР*, **269**:3 (1983), 543–547; англ. пер.: Yu. E. Nesterov, "A method of solving a convex programming problem with convergence rate $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$", *Soviet Math. Dokl.*, **27** (1983), 372–376.
12. Yu. Nesterov, V. Shikhman, "Dual subgradient method with averaging for optimal resource allocation", *European J. Oper. Res.*, **270**:3 (2018), 907–916.
13. S. Shakkottai, R. Srikant, "Network optimization and control", *Foundations and Trends in Networking*, **2**:3 (2008), 271–379.
14. R. Srikant, *The mathematics of internet congestion control*, Systems Control Found. Appl., Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004, xii+164 pp.
15. R. Srikant, Lei Ying, *Communication networks. An optimization, control, and stochastic networks perspective*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2014, xii+352 pp.
16. Junshan Zhang, Dong Zheng, Mung Chiang, "The impact of stochastic noisy feedback on distributed network utility maximization", *IEEE Trans. Inform. Theory*, **54**:2 (2008), 645–665.

Поступила в редакцию
3.VII.2019
Исправленный вариант
19.IX.2019