О. А. Клименко, Обратная задача определения нелинейной зависимости электрического тока от напряженности электрического поля, *Матем. заметки*, 1990, том 48, выпуск 3, 81–90

Математические заметки

том 48 выпуск 3 сентябрь 1990

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА ОТ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

О. А. Клименко

Постановка задачи. Рассмотрим уравнения Максвелла для однородной изотропной среды

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\mu \partial \boldsymbol{H}/\partial t,$$
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \varepsilon \partial \boldsymbol{E}/\partial t. \tag{1}$$

В случае выполнения закона Ома $\boldsymbol{j} = \gamma \boldsymbol{E}$, где γ — удельная электрическая проводимость. Исследуем случай, когда $\boldsymbol{j}$ нелинейно зависит от $\boldsymbol{E}$ и $E_x = E_z = H_x = H_y = 0$.

Элементарной заменой систему (1) можно привести к более удобному виду

$$\partial v/\partial x + \partial u/\partial t = 0,$$
$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial t + \sigma(v) = 0, \quad t \geqslant 0, \quad -\infty \leqslant x \leqslant \infty, \tag{2}$$
$$v(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad u(x, t)|_{t=0} = \psi(x), \tag{3}$$

$v(x, t)|_{x=0} = f(t)$ — дополнительная информация, u, v, $\sigma(v)$ — неизвестные функции.

Под решением обратной задачи будем понимать тройку функций u, v, $\sigma(v)$, причем u, v — непрерывно дифференцируемы при $t > 0$ и непрерывны вплоть до границы $t = 0$, σ — непрерывна на всей числовой прямой.

Для задачи Коши (2), (3) при известной функции σ справедлива

ЛЕММА. *Если выполнены условия*:

а) $(\varphi(x), \psi(x)) \in C^2(-R, R)$, $\sigma(z) \in C^2(R_1, R_2)$, $0 \leqslant R_1 < R_2 < \infty$, $R > 0$;

б) $\|\sigma(z)\|_{C^2(R_1, R_2)} \leqslant \mathscr{L}$, $\sigma(z) \geqslant 0$ *при* $z \geqslant 0$;

в) $\varphi'(0) = 0$, $x\varphi'(x) < 0$ *при* $x \neq 0$ *и* $|x| \leqslant R$, $|\varphi''(x)| \leqslant N$, $R_1 \leqslant \varphi(x) \leqslant R_2$;

г) $\psi'(x) > 0$, $|\psi''| \leqslant M$;

то можно указать такое положительное число T, что для $(x, t) \in \in \Delta(T) = \{(x, t)\colon 0 \leqslant t \leqslant T - |x|\}$ существует единственное решение $(u, v) \in C^2(\Delta(T))$, обладающее свойствами:

1) $|v_x/v_t| \leqslant \beta < 1$;

2) $|\varphi'(x)/(\varphi'(x) + \sigma(\varphi(x)))| < 1/2$;

3) $v_t < 0$;

4) $R_1 \leqslant v \leqslant R_2$, *где* $R_1 = \min\limits_{(x,t)\in\Delta(T)} v(x, t) = v(0, T)$, $R_2 = = \max\limits_{(x,t)\in\Delta(T)} v(x, t) = v(0, 0) = \varphi(0)$.

Доказательство. Предположим, что в некоторой области $\Delta(T)$ существует единственное решение $(u, v) \in C^2(\Delta(T))$, докажем, что оно обладает свойствами 1—4.

1) Оценим $v_x(x, t)$ сверху, для этого рассмотрим систему (2) в каноническом виде:

$$\partial w_1/\partial t + \partial w_1/\partial x + \sigma(v) = 0, \tag{4}$$

$$\partial w_2/\partial t - \partial w_2/\partial x - \sigma(v) = 0,$$

$$w_1 = u + v, \quad w_2 = u - v.$$

Формально продифференцировав систему (4), получим

$$\partial w_{1x}/\partial t + \partial w_{1x}/\partial x + \sigma'(v)\cdot v_x = 0, \tag{5}$$

$$\partial w_{2x}/\partial t - \partial w_{2x}/\partial x - \sigma'(v)\cdot v_x = 0.$$

Используя метод, изложенный в работе [1], проинтегрируем систему (5) по характеристикам $x - t = x_1^0$, $x + t = x_0^2$ из $\Delta(T)$, где T пока что произвольно

$$w_{1x}(x, t) - \psi'(x_0^1) - \varphi'(x_0^1) + \\ + \int_0^t \sigma_v'(v(\tau + x_0^1, \tau))\, v_x d\tau = 0,$$

$$w_{2x}(x, t) - \psi'(x_0^2) + \varphi'(x_0^2) - \\ - \int_0^t \sigma_v'(v(x_0^2 - \tau, \tau))\, v_x d\tau = 0.$$

Вычтем из первого уравнения второе и перейдем к неравенству

$$|2\cdot v_x(x, t)| \leqslant |\varphi'(x_0^1) + \varphi'(x_0^2)| + |\psi'(x_0^1) - \psi'(x_0^2)| + \\ + \left| \int_0^t (\sigma_v'(v(\tau + x_0^1, \tau))\cdot v_x(\tau + x_0^1, \tau) + \\ + \sigma'(v(x_0^2 - \tau, \tau))\, v_x)\, d\tau \right|.$$

Используя теорему о среднем значении и условия (б), (г) леммы, легко получить оценку

$$|v_x| \leqslant T\cdot M + \max_{-T\leqslant x\leqslant T} |\varphi'(x)| + \mathscr{L}\int_0^t \max_{\tau-T\leqslant x\leqslant T-\tau} |v_x(x, \tau)|\, d\tau.$$

Правая часть неравенства от x не зависит, следовательно, можем взять максимум по x от левой части неравенства. Обозначим $V(t) = \max\limits_{t-T \leqslant x \leqslant T-t} |v_x(x, t)|$, $V_0 = \max\limits_{-T \leqslant x \leqslant T} |\varphi'(x)| + T \cdot M$, получим $V(t) \leqslant V_0 + \int_0^t \mathscr{L} V(\tau)\, d\tau$, следовательно, $\max V(t) \leqslant \leqslant V_0/(1 - \mathscr{L}T)$. Из условий (в) леммы следует

$$|v_x(x, t)| \leqslant T(N + M)/(1 - \mathscr{L}T). \tag{6}$$

2) Оценим $v_t(x, t)$ сверху. Проинтегрируем по характеристикам систему

$$\partial w_{1t}/\partial t + \partial w_{1t}/\partial x + \sigma'(v) \cdot v_t = 0,$$

$$\partial w_{2t}/\partial t - \partial w_{2t}/\partial x - \sigma'(v) \cdot v_t = 0.$$

Вычтем из первого интегрального уравнения второе и получим

$$2v_t(x, t) + \psi'(x_0^1) + \varphi'(x_0^1) + \sigma(\varphi(x_0^1)) + \psi'(x_0^2) - \varphi'(x_0^2) + \\ + \sigma(\varphi(x_0^2)) + \int_0^t (\sigma'(v(\tau + x_0^1, \tau)) \cdot v_t + \sigma'(v(x_0^2 - \tau, \tau)) \cdot \\ \cdot v_t)\, d\tau = 0. \tag{7}$$

Используя условия леммы, действуем так же как в пункте 1, получаем оценку

$$|v_t(x, t)| \leqslant (\psi'(0) + \mathscr{L} + T(M + N))/(1 - \mathscr{L}T). \tag{8}$$

3) Оценим $v_t(x, t)$ снизу, для этого воспользуемся равенством (7). По условиям леммы функции $\varphi(x)$, $\sigma(\varphi(x))$, $\psi'(x)$ не отрицательные, следовательно, справедлива оценка

$$2|v_t| \geqslant |\psi'(x_0^1) + \psi'(x_0^2) + \sigma(\varphi(x_0^1)) + \sigma(\varphi(x_0^2))| - \\ - |\varphi'(x_0^1) - \varphi'(x_0^2)| - \left|\int_0^t [\sigma'(v(\tau + x_0^1, \tau)) \cdot v_t + \right. \\ \left. + \sigma'(v(x_0^2 - \tau, \tau)) \cdot v_t]\, d\tau \right| \geqslant 2 \cdot \min_{-T \leqslant x \leqslant T} \psi'(x) - \\ - 2 \cdot \max_{-T \leqslant x \leqslant T} |\varphi'(x)| - 2\mathscr{L} \int_0^t \max_{\tau - T \leqslant x \leqslant T - \tau} |v_t|\, d\tau \geqslant \\ \geqslant 2\left(\psi'(0) - MT - NT - \int_0^t \mathscr{L} \cdot \max_{\tau - T \leqslant x \leqslant T - \tau} |v_t|\, d\tau\right),$$

Подставим в неравенство выражение (8) и получим

$$|v_t(x, t)| \geqslant \frac{\psi'(0) - T(2\mathscr{L}\psi'(0) + S + \mathscr{L}^2)}{1 - \mathscr{L}T}, \quad S = M + N. \tag{9}$$

Можно найти значение $T = T^0$, при котором правая часть неравенства равна нулю. Очевидно, что имеет смысл рассматривать область ΔT, где $T < T^0 = \psi'(0)/(2\mathscr{L}\psi'(0) + S + \mathscr{L}^2)$.

4) Найдем область ΔT, в которой справедливо неравенство $|v_x(x, t)/v_t(x, t)| \leqslant \beta < 1$. Из оценок (6) и (9) сразу вытекает,

что

$$| v_x/v_t | \leqslant ST/(\psi'(0) - T(2\mathscr{L}\psi'(0) + S + \mathscr{L}^2)),$$

где $S = M + N$. При $T = T^* = \psi'(0)/(2\mathscr{L}\psi' + 2S + \mathscr{L}^2)$ правая часть неравенства равна 1. Будем рассматривать область $\Delta(T)$, где $T < T^*$.

5) Найдем T, определяющее область $\Delta(T)$, в которой выполняется неравенство $| \varphi'(x)/(\psi'(x) + \sigma(\varphi(x))) | < 1/2$. По условию $\sigma(\varphi(x)) \geqslant 0$, $\psi'(x) > 0$, следовательно

$$\left| \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x) + \sigma(\varphi(x))} \right| \leqslant (\max_{-T \leqslant x \leqslant T} |\varphi'(x)|)/(\min_{-T \leqslant x \leqslant T} \psi'(x)) \leqslant \frac{NT}{\psi'(0) - MT}.$$

Легко найти $\hat{T} = \dfrac{\psi'(0)}{2S - M}$, при котором $NT/(\psi'(0) - MT) = 1/2$. Видно, что $\hat{T} > T^*$. Таким образом, искомой областью будет ΔT, где $T < \psi'(0)/2\mathscr{L}\psi'(0) + 2S + \mathscr{L}^2$. В этой области $v_t < 0$, это следует из условий леммы и второго уравнения системы (2), следовательно, $v(x, t)$ — убывающая по t функция. Наибольшего значения $v(x, t)$ достигает при $t = 0$, по условию функция $\varphi(x) = v(x, t)|_{t=0}$ имеет максимум в точке $x = 0$, значит, $\max\limits_{\Delta T} v(x, t) = \varphi(0)$.

Из неравенства $| v_x/v_t | \leqslant \beta < 1$ следует $v_t \pm v_x < 0$, это значит, что вдоль характеристик $t + x = C_1$ и $t - x = C_2$ решение убывает, следовательно минимальное значение $v(x, t)$ принимает в точке $(0, T)$.

Приступим к доказательству существования и единственности решения $(u, v) \in C^2(\Delta(T))$. Проинтегрируем систему (4) по характеристикам $x - t = x_0^1$, $x + t = x_0^2$ из $\Delta(T)$

$$\begin{gathered} w_1(x, t) - w_1^0 + \int_0^t \sigma\left(\frac{1}{2}(w_1(x_0^1 + \tau, \tau) - w_2(x_0^1 + \tau, \tau))\right) d\tau = 0, \\ w_2(x, t) - w_2^0 - \int_0^t \sigma\left(\frac{1}{2}(w_1(x_0^2 - \tau, \tau) - w_2(x_0^2 - \tau, \tau))\right) d\tau = 0, \end{gathered} \tag{10}$$

$$w_1^0 = \psi(x_0^1) + \varphi(x_0^1), \quad w_2^0 = \psi(x_0^2) - \varphi(x_0^2).$$

Применяя метод последовательных приближений, положим

$$\begin{gathered} w_1^{n+1} = w_1^0 - \int_0^t \sigma\left(\frac{1}{2}(w_1^n(x_0^1 + \tau, \tau) - w_2^n(x_0^1 + \tau, \tau))\right) d\tau, \\ w_2^{n+1} = w_2^0 + \int_0^t \sigma\left(\frac{1}{2}(w_1^n(x_0^2 - \tau, \tau) - w_2^n(x_0^2 - \tau, \tau))\right) d\tau, \end{gathered} \tag{11}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

Покажем, что в $\Delta(T)$ последовательные приближения $\{w_1^n(x, t)\}$, $\{w_2^n(x, t)\}$ определены и равномерно сходятся.

Используя теорему о среднем значении, условия (б), получаем оценки

$$|w_1^{n+1}-w_1^n|\leqslant\int_0^t\left|\sigma\left(\frac{1}{2}(w_1^{n-1}-w_2^{n-1})\right)-\sigma\left(\frac{1}{2}(w_1^n-w_2^n)\right)\right|d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\mathscr{L}\int_0^t(|w_1^{n-1}-w_1^n|+|w_2^n-w_2^{n-1}|)\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\mathscr{L}\int_0^t|w^n(x_0^1+\tau,\tau)-w^{n-1}(x_0^1+\tau,\tau)|\,d\tau,$$

$$|w_2^{n+1}-w_2^n|\leqslant\mathscr{L}\int_0^t|w^n(x_0^2-\tau,\tau)-w^{n-1}(x_0^1-\tau,\tau)|\,d\tau,$$

где $|w^{n+1}-w^n|=\max\{|w_1^{n+1}-w_1^n|,\ |w_2^{n+1}-w_2^n|\}$. Возьмем максимум по первому аргументу функций в правой части неравенств. Из двух неравенств будет следовать одно:

$$|w^{n+1}(x,t)-w^n(x,t)|\leqslant\mathscr{L}\int_0^t V^{n-1}(\tau)\,d\tau,$$

где $V^{n-1}(t)=\max\limits_{t-T\leqslant\xi\leqslant T-t}|w^n(\xi,t)-w^{n-1}(\xi,t)|$. Правая часть неравенства не зависит от x, следовательно,

$$V^n(t)\leqslant\mathscr{L}\int_0^t V^{n-1}(\tau)\,d\tau,$$

отсюда $V^n(t)\leqslant\mathscr{L}^n\cdot t^n\cdot(n!)^{-1}\cdot\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}V^0(t)\to 0,\ n\to\infty.$

Предельным переходом в (11) получаем, что последовательности $\{w_1^n(x,t)\}$, $\{w_2^n(x,t)\}$ сходятся к непрерывным функциям $w_1(x,t)$, $w_2(x,t)$, следовательно, u, v — непрерывны.

Покажем, что $w_1(x,t)$ и $w_2(x,t)$ непрерывно дифференцируемы по x. Для этого формально продифференцируем по x систему (10) и применим метод последовательных приближений:

$$w_{1x}^{n+1}(x,t)=w_{1x}^0-\int_0^t\sigma'(v)\cdot\frac{1}{2}(w_{1x}^n-w_{2x}^n)\,d\tau,$$

$$w_{2x}^{n+1}(x,t)=w_{2x}^0+\int_0^t\sigma'(v)\cdot\frac{1}{2}(w_{1x}^n-w_{2x}^n)\,d\tau,$$

$$n=0,1,2,\ldots$$

Заметим, что $\sigma_v'(v(x,t))\in C(\Delta(T))$, так как по доказанному выше $v\in C(\Delta(T))$, а $\sigma'(v)\in C^1(R_1,R_2)$ по условию. Действуя аналогично предыдущему, можно показать, что $\{w_{1x}^n\}$ и $\{w_{2x}^n\}$ сходятся к непрерывным функциям w_{1x} и w_{2x}. Непрерывная дифференцируемость по t функций w_1 и w_2 следует из непрерывности комбинаций производных

$$\partial w_1/\partial t+\partial w_1/\partial x=-\sigma(v),\quad \partial w_2/\partial t-\partial w_2/\partial x=\sigma(v).$$

Доказательство того, что $(w_1, w_2) \in C^2(\Delta(T))$, проводится аналогичным образом после расширения системы (4) дифференцированием по x и по t. Единственность решения задачи Коши является известным фактором [1, 2].

Следствие. *Функция* $f(t) = v(x, t)|_{x=0} \in C^2(0, T)$, $f'(t) < 0$, $0 < f(T) \leqslant f(t) \leqslant f(0) = v(0, 0) = \varphi(0) = R_2$.

Теорема единственности.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть для некоторого положительного числа* T_0 *функция* $f(t) \in C^2[0, T_0]$, $f'(t) < 0$, $f(T_0) = R_1 > 0$, $f(0) = \varphi(0) = R_2 > R_1$, *и выполнены условия леммы, тогда существует* $T \leqslant T_0$ *такое, что задание* $f(t)$ *на* $[0, T]$ *однозначно определяет функции* $u(x, t)$, $v(x, t)$, $\sigma(z)$, $(x, t) \in \Delta(T)$, $z \in [f(T), f(0)]$.

Доказательство. Рассмотрим две задачи:

$$\partial u_1/\partial t + \partial v_1/\partial x = 0, \tag{12}$$

$$\partial v_1/\partial t + \partial u_1/\partial x + \sigma_1(v_1) = 0,$$

$$\partial u_2/\partial t + \partial v_2/\partial x = 0, \tag{13}$$

$$\partial v_2/\partial t + \partial u_2/\partial x + \sigma_2(v_2) = 0,$$

$$u_1|_{t=0} = u_2|_{t=0} = \psi(x), \quad v_1|_{t=0} = v_2|_{t=0} = \varphi(x),$$

$$v_1|_{x=0} = v_2|_{x=0} = f(t).$$

Вычтем из (12) (13), получим

$$\partial\tilde{u}/\partial t + \partial\tilde{v}/\partial x = 0, \tag{14}$$

$$\partial\tilde{v}/\partial t + \partial\tilde{u}/\partial x + \mathscr{A}(x, t)\cdot\tilde{v} + \tilde{\sigma}(v_2) = 0,$$

$$\tilde{u}|_{t=0} = \tilde{v}|_{t=0} = \tilde{v}|_{x=0} = 0, \quad \tilde{u} = u_1 - u_2, \quad \tilde{v} = v_1 - v_2,$$

$$\tilde{\sigma}(v) = \sigma_1(v) - \sigma_2(v), \quad \mathscr{A}(x, t) = \int_0^1 \sigma_1'(v_1(1 - s) + v_2 s)\,ds.$$

Произведем замену переменных $\tau = v_2(x, t)$, $x = x$. По лемме $\partial v_2/\partial x$ и $\partial v_2/\partial t$ непрерывны, а детерминант перехода $\partial v_2/\partial t \neq 0$, значит отображение локально взаимно однозначно и существует обратное отображение $t = t(x, \tau)$, $x = x$. Обозначим $\hat{u}(x, \tau) = \tilde{u}(x, t(x, \tau))$, $\hat{v}(x, \tau) = \tilde{v}(x, t(x, \tau))$, $\mathscr{A}_1(x, \tau)) = \mathscr{A}(x, t(x, \tau))$.

Для удобства сразу перейдем к каноническому виду:

$$\begin{aligned} &\frac{t_\tau}{1 - t_x}\frac{\partial}{\partial x}h_1 + \frac{\partial}{\partial \tau}h_1 + \frac{t_\tau}{1 - t_x}\frac{1}{2}\mathscr{A}_1(h_1 - h_2) + \\ &\qquad\qquad + \frac{t_\tau}{1 - t_x}\tilde{\sigma}(\tau) = 0, \\ &\frac{t_\tau}{1 + t_x}\frac{\partial}{\partial x}h_2 - \frac{\partial}{\partial \tau}h_2 + \frac{t_\tau}{1 + t_x}\frac{1}{2}\mathscr{A}_1(h_1 - h_2) + \\ &\qquad\qquad + \frac{t_\tau}{1 + t_x}\tilde{\sigma}(\tau) = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

$$h_1(x, \tau)|_{t(x, \tau)=0} = h_2(x, \tau)|_{t(x, \tau)=0} = \frac{1}{2}(h_1 - h_2)|_{x=0} = 0, \tag{15$'$}$$

$$h_1 = \hat{u} + \hat{v}, \quad h_2 = \hat{u} - \hat{v}.$$

Заметим, что $\tilde{\sigma}$ не зависит от x. Положим $x = 0$ в (15) и, воспользовавшись дополнительной информацией, получим

$$\tilde{\sigma}(\tau) = -(1/2)(1 + t_x(0, \tau))\, h_{1x}(0, \tau) - (1/2)(1 - t_x(0, \tau))\cdot \cdot h_{2x}(0, \tau). \qquad (16)$$

Продифференцируем по x систему (15) и введем обозначения $h_3 = h_{1x}, h_4 = h_{2x}, a_1 = t_\tau/(1 - t_x), a_2 = t_\tau/(1 + t_x)$,

$$a_1 \frac{\partial}{\partial x} h_3 + \frac{\partial}{\partial \tau} h_3 + a_{1x} h_3 + \frac{1}{2} \mathcal{A}_1 a_1 (h_3 - h_4) + \frac{1}{2} a_{1x} \cdot \cdot \mathcal{A}_1 (h_1 - h_2) + \frac{1}{2} a_1 \mathcal{A}_{1x} (h_1 - h_2) + a_{1x} \tilde{\sigma}(\tau) = 0, \qquad (17)$$

$$a_2 \frac{\partial}{\partial x} h_4 - \frac{\partial}{\partial \tau} h_4 + a_{2x} h_4 + \frac{1}{2} a_2 \mathcal{A}_1 (h_3 - h_4) + \frac{1}{2} a_{2x} \cdot \cdot \mathcal{A}_1 (h_1 - h_2) + \frac{1}{2} a_2 \mathcal{A}_{1x} (h_1 - h_2) + a_{2x} \tilde{\sigma}(\tau) = 0.$$

Найдем начальные данные для h_3 и h_4. При замене переменных прямая $t = 0$ переходит в кривую $\tau = v_2(x, t)|_{t=0} = \varphi(x)$. Из (15)$'$ следует, что $\mathrm{d}h_1 = h_{1x}\mathrm{d}x + h_{1\tau}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = 0$, $\mathrm{d}h_2 = h_{2x}\,\mathrm{d}x + h_{2\tau}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = 0$,

$$h_{1\tau} = -h_{1x}/\varphi'(x), \quad h_{2\tau} = -h_{2x}/\varphi'(x). \qquad \text{(A)}$$

Функции t_x и t_τ при $\tau = \varphi(x)$ находят путем дифференцирования тождества $\tau \equiv v_2(x, t(x, \tau))$ и использования уравнений (13) при $t = 0$

$$t_x = \varphi'(x)/(\psi'(x) + \sigma_2(\varphi(x))), \quad t_\tau = -1/(\psi'(x) + \sigma_2(\varphi(x))). \qquad \text{(B)}$$

Подставляем выражения (A) и (B) в систему (15), учитывая (15)$'$, получаем

$$h_3|_{t(x,\tau)=0} = -h_4|_{t(x,\tau)=0} = -\frac{\tilde{\sigma}(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)}{\psi'(x) + \sigma_2(\varphi(x))}. \qquad (17)'$$

Теперь будем исследовать систему, состоящую из уравнений (15), (16), (17) с начальными данными (15)$'$ и (17)$'$.

Легко найти характеристики системы, проходящие через точку $(\xi, \tilde{\tau})$ из криволинейного характеристического треугольника, который получился из $\Delta(T)$ при замене переменных

$$l_1\colon x - t(x, \tau) = \xi - t(\xi, \tilde{\tau}),$$

$$l_2\colon x + t(x, \tau) = \xi + t(\xi, \tilde{\tau}). \qquad (18)$$

Из леммы и теоремы о неявной функции следует, что уравнения (18) однозначно определяют явные уравнения характеристик

$$l_1\colon x = k(\tau; \xi, \tilde{\tau}), \quad l_2\colon x = d(\tau; \xi, \tilde{\tau}).$$

Таким образом, криволинейный треугольник ограничен характеристиками $x = k(\tau, 0, \hat{T})$, $x = d(\tau; 0, \hat{T})$ и кривой $\tau = \varphi(x)$. Проинтегрируем первые уравнения из систем (15), (17) по характеристике l_1, вторые — по l_2 и воспользуемся тем, что известны значения функций h_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ на кривой $t(x, \tau) = 0$. Получим систему интегральных уравнений

$$h_1(\xi, \tilde{\tau}) = -\int_{\lambda}^{\tilde{\tau}} \left[\frac{1}{2} a_1 \mathcal{A}_1 \cdot (h_1 - h_2) - a_1 \tilde{\sigma}(s)\right] ds;$$

$$h_2(\xi, \tilde{\tau}) = -\int_{\eta}^{\tilde{\tau}} \left[\frac{1}{2} a_2 \mathcal{A}_1 \cdot (h_1 - h_2) - a_2 \tilde{\sigma}(s)\right] ds;$$

$$h_3(\xi, \tilde{\tau}) = -h^0(x_1^*) - \int_{\lambda}^{\tilde{\tau}} \Big[a_{1x} \cdot h_3 + \frac{1}{2} a_1 \mathcal{A}_1 (h_3 - h_4) + \frac{1}{2} a_{1x} \mathcal{A}_1 (h_1 - h_2) + \frac{1}{2} a_1 \mathcal{A}_{1x} (h_1 - h_2) + a_{1x} \tilde{\sigma}(s)\Big] ds; \quad (19)$$

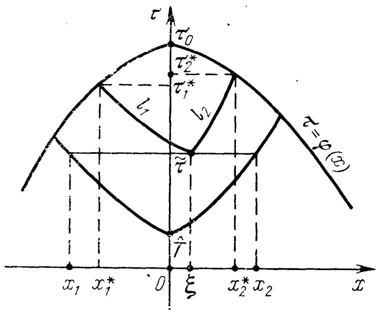
$$h_4(\xi, \tilde{\tau}) = h^0(x_2^*) - \int_{\eta}^{\tau} \Big[a_{2x} \cdot h_4 + \frac{1}{2} a_1 \mathcal{A}_1 (h_3 - h_4) + \frac{1}{2} a_{2x} \mathcal{A}_1 (h_1 - h_2) + \frac{1}{2} a_1 \mathcal{A}_{1x} (h_1 - h_2) + a_{2x} \tilde{\sigma}(s)\Big] ds,$$

где $\lambda = \tau_1^*$, $\eta = \tau_2^*$, $h^0(x) = \tilde{\sigma}(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)/(\psi'(x) + \sigma_2(\varphi(x)))$.

Воспользуемся тем, что $|t_x| = |v_{2x}/v_{2t}| \leqslant \beta < 1$, и получим оценку

$$|\tilde{\sigma}(\tilde{\tau})| \leqslant \frac{1}{2}(1 + \beta) \cdot |h_3(0, \tilde{\tau})| + \frac{1}{2}(1 + \beta)|h_4(0, \tilde{\tau})| \leqslant c \cdot U(\tilde{\tau}), \quad (20)$$

где $c \leqslant 2$, $U(\tilde{\tau}) = \max\limits_{i=1,2,3,4} \{\max\limits_{x_2 \leqslant \xi \leqslant x_1} |h_i(\xi, \tilde{\tau})|\}$ (см. рисунок). Точки $(x_2, \tilde{\tau})$ и $(x_1, \tilde{\tau})$ получаются при пересечении прямой $\tilde{\tau} = \mathrm{const}$ и



границ криволинейного характеристического треугольника $x = k(\tau; 0, \hat{T})$ и $x = d(\tau; 0, \hat{T})$. Используя лемму и оценку (20), получаем

$$|h_3|_{t=0}| = |h_4|_{t=0}| = \left|\frac{\tilde{\sigma}(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)}{\psi'(x) + \sigma_2(\varphi(x))}\right| \leqslant c \cdot U(\varphi(x)) \cdot \frac{1}{2} = \gamma U(\varphi(x)),$$

где $\gamma < 1$. В интегральных уравнениях (19) возьмем максимум по первому аргументу от функций h_i. Из леммы следует непрерывность функций a_1, a_2, a_{1x}, a_{2x}, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_{1x}$ в замкнутой и ограниченной области, следовательно, эти функции ограничены. Обозначим $W(\tilde\tau) = \max\limits_{\tilde\tau\leqslant r\leqslant\tau_0} U(r)$ и перейдем к неравенствам

$$|h_i(\xi,\tilde\tau)| \leqslant c_i\left|\int_{\tilde\tau}^{\tau^0} U(s)\,ds\right| \leqslant c_i\left|\int_{\tilde\tau}^{\tau_0} W(s)\,ds\right| \qquad (i=1,2),$$

$$|h_j(\xi,\tilde\tau)| \leqslant \gamma W(\tilde\tau) + c_j\left|\int_{\tilde\tau}^{\tau_0} U(s)\,ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \gamma W(\tilde\tau) + c_j\left|\int_{\tilde\tau}^{\tau_0} W(s)\,ds\right| \qquad (j=3,4).$$

Из четырех неравенств следует одно

$$U(\tilde\tau) \leqslant \gamma W(\tilde\tau) + c\int_{\tilde\tau}^{\tau_0} W(s)\,ds.$$

Если переобозначить $\tilde\tau = r$, а потом взять максимум по r, то получим

$$W(\tilde\tau) \leqslant \gamma W(\tilde\tau) + c\int_{\tilde\tau}^{\tau_0} W(s)\,ds \qquad (0<\gamma<1),$$

откуда следует $W(\tilde\tau) = 0$ и $h_i(x,\tau) = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Из уравнения (16) получаем, что $\tilde\sigma(\tau) = 0$. Таким образом, доказана единственность решения обратной задачи.

Оценка устойчивости решения. Определим множество данных B и множество $\mathcal{D}^*$

$$B = \{(\psi(x), \varphi(x), f(t)) \colon (\psi(x), \varphi(x)) \in C^2(-T, T), \quad f(t) \in C^2(0, T),$$

$$f'(t) < 0, \quad \psi'(x) > 0, \quad |\psi''(x)| \leqslant M, \quad x\varphi(x) < 0 \text{ при } x \neq 0, \quad |\varphi''| \leqslant N, \ f(0) = \varphi(0)\},$$

$$\mathcal{D}^* = \{\sigma(v) \colon \sigma(v) \in C^2(R_1, R_2), \quad \sigma(v) > 0 \text{ при } v > 0,$$

$$\|\sigma(v)\|_{C^2(R_1,R_2)} \leqslant \mathcal{L}, \text{ где } R_1 = f(T), \quad R_2 = f(0) = \varphi(0)\}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Для любых двух троек функций* (ψ_1, φ_1, f_1) *и* (ψ_2, φ_2, f_2) *из* B, *таких, что* $f_1(0) = f_2(0)$ *и для соответствующих функций* $\sigma_1(v) \in \mathcal{D}^*$, $\sigma_2(v) \in \mathcal{D}^*$, *справедлива оценка*

$$\|\sigma_1(v) - \sigma_2(v)\|_{C[\rho_1,\rho_2)} \leqslant C(\mathcal{L}, T, M, N)\cdot\max\{\|\psi_1(x) - \psi_2(x)\|_{C(-T,T)},$$

$$\|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\|_{C(-T,T)}, \|f_1(t) - f_2(t)\|_{C^1(0,T)}\}, \tag{21}$$

где $\rho_1 = \max\{f_1(T), f_2(T)\}$, $\rho_2 = f_1(0) = f_2(0)$.

Доказательство. Так же, как и при доказательстве теоремы единственности, рассматриваем две задачи нахождения функций u_1, v_1, $\sigma_1(v_1)$ и u_2, v_2, $\sigma_2(v_2)$ с мало отличающимися начальными данными и информацией, т. е. $\| \psi_1 (x) - \psi_2 (x) \|_{C(-T,T)} <$ $< \delta$,

$$\| \varphi_1 (x) - \varphi_2 (x) \|_{C(-T,T)} < \delta, \quad \| f_1 (t) - f_2 (t) \|_{C^1(0,T)} < \delta.$$

Переходим к системе (14) и в ней производим замену переменных $\tau = v_2 (x, t)$, $x = x$. Используя леммы, получаем оценку $|\tilde{\sigma} (\tau)| \leqslant c \cdot U (\tau) + p\delta$, $p = p (N, T, L, M)$ — константа. Расширяем систему, находим начальные данные для h_3, h_4, получаем для них оценки

$$| h_i |_{t=0} | \leqslant (1/2) | \tilde{\sigma} (\varphi_2 (x)) | + (1/2) \mathscr{L} \cdot \delta \quad (i = 3, 4).$$

Систему дифференциальных уравнений для h_i интегрируем по характеристикам, в интегральных уравнениях производим оценки, используя лемму. Получаем

$$U (\tilde{\tau}) \leqslant \gamma W (\tilde{\tau}) + \delta C_1 + C_2 \int_{\tilde{\tau}}^{\tau_0} U (s) \, ds.$$

Отсюда следует оценка (21). Теорема доказана.

Автор благодарен В. Г. Романову за постановку задачи и внимание к работе.

Институт математики
СО АН СССР

Поступило
25.11.86

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.

[2] Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.