Н. В. Величко, К теории пространств непрерывных функций, *УМН*, 1982, том 37, выпуск 4, 149–150

К ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Н. В. Величко

Множество вещественных непрерывных функций на топологическом пространстве X обозначается через $C(X)$.

Если это множество наделено топологией простой сходимости, то мы пишем $C_p(X)$; если оно наделено компактно открытой топологией, то мы сохраняем общее обозначение $C(X)$. В последнем случае на $C(X)$ появляется слабая топология, для которой мы используем обозначение $C_\omega(X)$.

Основным результатом является

Теорема. *В случае компактного X нормальность $C_p(X)$ влечет счетную тесноту X.*

Доказательство. Предварительно докажем утверждение

(A) *Пусть $C_p(X)$ нормально, F и Φ — два замкнутых непересекающихся множества в $C_p(X)$. Тогда найдется счетное множество $Y \subseteq X$ такое, что $[\pi_Y(F)]_M \cap [\pi_Y(\Phi)]_M$, где $\pi_Y(f) = f|_Y$, а $M = \pi_Y(C_p(X))$.*

Пусть H и V — непересекающиеся окрестности F и Φ в $C_p(X)$. Так как $C_p(X)$ плотно в R^X, то можно применить теорему Бокштейна [1], согласно которой найдется счетное множество $Z \subseteq X$ такое, что $\pi_Z(H) \cap \pi_Z(V) = \varnothing$. Предположим, что $\varnothing = K' = [\pi_Z(F)] \cap [\pi_Z(\Phi)]$, и пусть $K = \pi_Z^{-1}(K')$. Множество K замкнуто в $C_p(X)$, а так как $\varnothing = K' \cap \pi_Z(H) = K' \cap \pi_Z(V)$, то $K \cap F = K \cap \Phi = \varnothing$. Тогда можно выбрать непересекающиеся окрестности W_1, W_2, W_3 множеств F, Φ и K в $C_p(X)$. Снова по теореме Бокштейна найдется счетное множество $Y \supseteq Z$ такое, что семейство $\{\pi_Y(W_i)\colon i = 1, 2, 3\}$ дизъюнктно. Тогда $\varnothing = [\pi_Y(F)] \cap [\pi_Y(\Phi)]$. Действительно, если бы нашлась функция $f \in C(X)$ такая, что $\pi_Y(f) \in [\pi_Y(F)] \cap [\pi_Y(\Phi)]$, то было бы $\pi_Z(f) \in [\pi_Z(F)] \cap [\pi_Z(\Phi)] = K'$ и $f \in K$. Но в этом случае $\pi_Y(f) \in \pi_Y(W_3)$, а $\pi_Y(W_3) \cap \pi_Y(F) = \varnothing = \pi_Y(W_3) \cap \pi_Y(\Phi)$, что противоречиво, и (A) доказано.

Пусть $t(X) > \aleph_0$. В X найдется свободная последовательность $\mathcal{F} = \{x_\alpha\colon \alpha < \omega_1\}$ длины $\aleph_0$. Пусть F есть множество точек полного накопления $\mathcal{F}$. Тогда $\mathcal{F}$ сходится по мощности к F, т. е. в любой окрестности F содержатся все элементы $\mathcal{F}$, начиная с некоторого.

Каждое ординальное число $\alpha < \omega_1$ представимо в виде $\alpha_0 + n$, где α_0 — предельный ординал. Следовательно, можно говорить о четности α (понимая под этим четность n).

Выберем точку x_0 из $\mathcal{F}$ произвольно, функцию $f_0 \in C(X[0, 1])$ выберем под условиями $f_0|_F \equiv 0$ и $f_0(x_0) = 1$. Выберем замкнутые множества F_{0n} такими, чтобы $CZ(f_0) = \{y\colon f_0(y) > 0\} = \bigcup \{F_{0n}\colon n = 1, \ldots\}$, $F_{0n} \supseteq \{x\colon f_0(x) = 1\}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, $F_{0n} \subseteq F_{0,n+1}$.

Выберем, далее, для каждого $\alpha < \omega_1$ точку $x_\alpha \in \mathcal{F}$, функцию $f_\alpha \in C(X, [0, 1])$ и замкнутые множества $F_{\alpha n}$ такими, чтобы выполнялись условия:

1) $f_\alpha(x_\beta) = 1$ при $\beta \leqslant \alpha$, $f_\alpha(x_\beta) = 0$ при $\beta > \alpha$ и $f_\alpha|_F \equiv 0$,

2) $CZ(f_\alpha) = \bigcup \{F_{\alpha n}\colon n = 1, \ldots\}$, $F_{\alpha n} \supseteq \{x\colon f_\alpha(x) = 1\}$, $F_{\alpha n} \subseteq F_{\alpha, n+1}$,

3) $x_\alpha \in \bigcap \{Z(f_\beta) = \{y\colon f_\beta(y) = 0\}\colon \beta < \alpha\}$, $Z(f_\alpha) \subseteq \bigcap \{Z(f_\beta)\colon \beta < \alpha\}$,

4) для любого $F_{\alpha n}$ найдется $\beta > \alpha$ другой четности такое, что $f_\beta|_{F_{\alpha n}} \equiv f_{\alpha n}|_{F_{\alpha n}}$.

Пусть построение сделано для всех β, меньших α, и α — предельный ординал.

Семейство $\{F_{\beta n}\colon \beta < \alpha\}$ счетно, и его можно занумеровать: $\{F_i\colon i = 1, \ldots\}$.

Пусть $Z = \bigcap \{Z(f_\beta)\colon \beta < \alpha\} \cap \mathcal{F}$. Мы имеем $F \cap [\{x_\beta\colon \beta < \alpha\}] = \varnothing$ и $|Z \setminus [\bigcup \{x_\beta\colon \beta < \alpha\}]| > 1$ (по свойству свободных последовательностей и 1)). Точку x_α выберем произвольно из $Z \setminus [\{x_\beta\colon \beta < \alpha\}]$, функцию f_α из $C(X, [0, 1])$ выберем так, чтобы $f_\alpha|_F \equiv 0$, $f_\alpha|_{T_\alpha} \equiv 1$ и $f_\alpha|_{F_k} \equiv f_\beta|_{F_k}$, где $T_\alpha = [\{x_\beta\colon \beta < \alpha\}] \cup \{x_\alpha\}$, k — первое такое, что $F_k = F_{\beta n}$ и n нечетно. Далее выбираем $F_{\alpha n}$ так, чтобы удовлетворить 2).

Пусть $k > 0$ произвольно и построены объекты для всех $\alpha + n$ при $n < k$. Тогда $x_{\alpha+k}$ выберем произвольно из $\mathcal{F} \cap \bigcap \{Z(f_\beta)\colon \beta < \alpha + k\}$, функцию $f_{\alpha+k}$ выберем из условий 1) и 3) так, чтобы $f_{\alpha+k}|_{F_m} \equiv f_\sigma|_{F_m}$, где m — первое такое, что $F_m = F_{\sigma n}$ и четности n и k различны. Множества $F_{\alpha+k,n}$ выбираем, исходя из 2).

Очевидно, что при таком построении наши объекты будут удовлетворять всем требованиям.

Положим $\Phi = \{f_\alpha: \alpha < \omega_1\}$ и $T = \{x_\alpha: \alpha < \omega_1\}$. Докажем, что Φ дискретно в $C_p(X)$.

Пусть $f \in [\Phi]$. Тогда $f \mid_{\bigcap\{Z(f_\alpha):\ \alpha<\omega_1\}} \equiv 0$ и на T функция f может принимать только значения 0 и 1. Пусть α — первое такое, что $f(x_\alpha) = 0$. Множество $V = \{g: \mid g(x_\alpha) \mid < 2^{-1}\}$ будет окрестностью f, не содержащей f_β при $\beta \geqslant \alpha$. Предположим, что α предельно. Тогда найдется $y \in [\{x_\beta: \beta < \alpha\}]$ такое, что $y \notin [\{x_\gamma: \gamma < \beta\}]$, $\beta < \alpha$ (это легко проверить). Но $f(y) = 1$. Если $\beta < \alpha$, то $f_\beta(y) = 0$ по 3) и $y \in [\{x_\gamma: \gamma < \alpha\}]$. Следовательно, окрестность $W = \{g: \mid g(y) - 1 \mid < 2^{-1}\}$ точки f не содержит f_β при $\beta < \alpha$, что противоречит условию $f \in [\Phi]$.

Итак, $\alpha = \gamma + k$. Тогда окрестность $U = \{g: \mid g(x_{\gamma+k-1}) - 1 \mid < 2^{-1}\}$ точки f не содержит f_β при $\beta < \alpha - 1$, так что ясно, что $f = f_{\alpha-1} \in \Phi$ и Φ замкнуто в $C_p(X)$.

Легко проверить, что Φ дискретно в себе.

Положим $K = \{f_\alpha: \alpha$ нечетно$\}$ и $L = \{f_\alpha: \alpha$ четно$\}$.

Пусть Y — произвольное счетное множество в X, $Y' = Y \setminus \bigcap \{Z(f_\beta): \beta < (\omega_1)\}$. Найдется $\alpha < \omega_1$ такое, что $Y' \subseteq CZ(f_\alpha)$. Пусть $V = \{g: \mid f_\alpha(y_i) - g(y_i) \mid < \varepsilon\}$ — окрестность f_α такая, что $y_i \in Y$. Для множества $Q = \{y_i: y_i \in Y'\}$ найдется n такое, что $Q \subseteq F_{\alpha n}$. По 4) найдется $\gamma > \alpha$ другой четности такое, что $f_\gamma \mid_{F_{\alpha n}} \equiv f_\alpha \mid_{F_{\alpha n}}$. Если $f_\alpha \in K$, то $f_\gamma \in L$ и $f_\alpha \in V$, $f_\gamma \in V$. Следовательно, $\pi_Y(f_\alpha) \in [\pi_Y(K)] \cap [\pi_Y(L)]$. В силу (А) $C_p(X)$ не может быть нормальным.

Теорема доказана.

Для $C_\omega(X)$ получены следующие оценки (X компактно):

1) $\mid X \mid \leqslant X(C_\omega(X)) = w(C_\omega(X)) \leqslant \exp W(X)$,

2) $\psi X(C_\omega(X)) = d(X)$, если X — эберлейновский компакт,

3) $hd(C_\omega(X)) = nw(C_\omega(X)) = d(C_\omega(X)) = w(X)$, где X — характер, w — вес, d — плотность, ψX — псевдохарактер, nw — сетевой вес, $h\varphi = \sup\{\varphi(Y): Y \subseteq X\}$ для любого кардинальнозначного инварианта φ.

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Bockstein. Une theoreme de separability pour les produits topologiques.— Fund. Math., 1948, 35, p. 242—246.

Тюменский государственный университет

Поступило в Правление общества 11 июля 1981 г.