Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Е. В. Стефанюк, В. А. Кудинов, Получение аналитических решений уравнений гидродинамического и теплового пограничных слоев на основе введения дополнительных граничных условий,
ТВТ, 2010, том 48, выпуск 2, 290–302

https://www.mathnet.ru/tvt722

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.81
12 июля 2025 г., 01:32:48

ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР, 2010, том 48, № 2, с. 290–302

УДК 536.2 (075)

ПОЛУЧЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО И ТЕПЛОВОГО ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ НА ОСНОВЕ ВВЕДЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

© 2010 г. Е. В. Стефанюк, В. А. Кудинов

Самарский государственный технический институт

Поступила в редакцию 04.12.2008 г.

С использованием математических моделей гидродинамического и теплового пограничных слоев, представленных в виде интегральных уравнений на основе введения дополнительных граничных условий разработана методика получения приближенных аналитических решений исходных дифференциальных уравнений пограничных слоев, позволяющая получать решения практически с заданной степенью точности. Так, уже в четвертом приближении отличие полученного аналитического решения задачи для гидродинамического пограничного слоя от точного составляет около 0.1%, а для теплового слоя – менее 0.5%. С учетом полученных решений выполнен анализ распределения одинаковых скоростей (изотах) и изотерм в пределах соответствующих пограничных слоев. Проведены также исследования скоростей движения изотах и изотерм по поперечной координате в зависимости от величины продольной переменной.

ВВЕДЕНИЕ

При обтекании тела потоком жидкости, имеющей скорость v (скорость невозмущенного потока), вблизи поверхности тела образуется гидродинамический пограничный слой, в пределах которого скорость течения изменяется от нуля на стенке до скорости невозмущенного потока (рис. 1).

При наличии разности температур между стенкой и набегающим потоком вблизи стенки наряду с гидродинамическим образуется также тепловой пограничный слой, в пределах которого температура среды изменяется от $t_{ст}$ до температуры невозмущенного потока $t_{ср}$, где $t_{ст}$ – температура поверхности тела (рис. 2).

Таким образом, гидродинамический и тепловой пограничные слои представляют собой границы соответствующих фронтов возмущения, отделяющие возмущенный поток от невозмущенного.

ПОЛУЧЕНИЕ УТОЧНЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Дифференциальные уравнения гидродинамического пограничного слоя (уравнения Прандтля) выводятся из дифференциальных уравнений движения Навье–Стокса и уравнения сплошности с учетом ряда допущений [1–6]. Уравнения Прандтля имеют вид

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0, \quad (2)$$

где $\nu=\mu/\rho$ – кинематическая вязкость жидкости; v_x, v_y – составляющие скорости по соответствующим координатным осям; x, y – координаты.

Граничные условия для уравнений (1) и (2):

$$v_x|_{y=0}=v_y|_{y=0}=0, \quad (3)$$

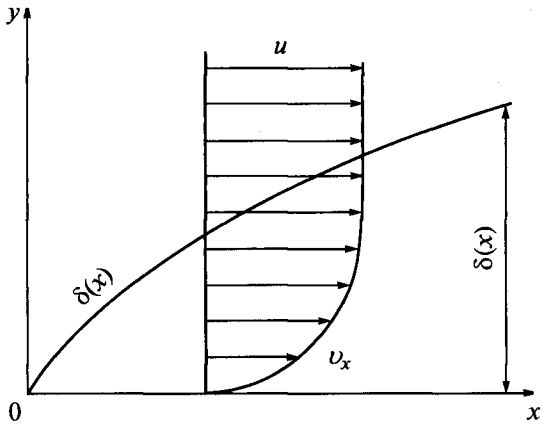

Рис. 1. Схема гидродинамического пограничного слоя.

$$v_x\big|_{y=\delta(x)} = v = \text{const}, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=\delta(x)} = 0, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right|_{y=0} = 0. \tag{6}$$

Здесь $\delta(x)$ – толщина гидродинамического пограничного слоя (рис. 1), v – скорость невозмущенного потока вдоль оси x.

Граничное условие (5) характеризует плавность сопряжения профилей скоростей на внешней границе пограничного слоя. Граничное условие (6) получается из дифференциального уравнения (1) при $y = 0$, где $v_x = v_y = 0$. Следовательно, выполнение условия (6) является решением уравнения (1) в точке $y = 0$. Соотношение (6) – по сути это дополнительное граничное условие в задаче (1)–(5).

Потребуем, чтобы искомое решение удовлетворяло не исходным уравнениям (1), (2), а осредненным в пределах толщины гидродинамического слоя. Для этого проинтегрируем данные уравнения в пределах от $y = 0$ до $y = \delta(x)$

$$\int_0^\delta v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} dy + \int_0^\delta v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} dy = \nu \int_0^\delta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy, \tag{7}$$

$$\int_0^\delta \frac{\partial v_x}{\partial x} dy = -(v_y)_{y=\delta}. \tag{8}$$

После некоторых преобразований с учетом закона Ньютона для касательного напряжения в жидкости уравнения (7), (8) приводятся к известному интегральному уравнению для гидродинамического пограничного слоя, впервые полученному Карманом в 1921 году

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta (v_x - v) v_x dy = \nu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}. \tag{9}$$

Суть использования интегрального уравнения (9) в том, что при получении решения задачи (1)–(6) требуется выполнение не исходных дифференциальных уравнений в частных производных (1), (2), а некоторых осредненных по толщине гидродинамического пограничного слоя, которые в конечном итоге сводятся к одному интегральному уравнению вида (9). Разумеется, подобное осреднение снижает точность решения исходных уравнений (1), (2). Однако, как будет показано ниже, применение дополнительных граничных условий позволяет найти такое приближенное аналитическое решение, которое в зависимости от числа приближений удовлетворяет уравнениям (1), (2) практически с заданной степенью точности.

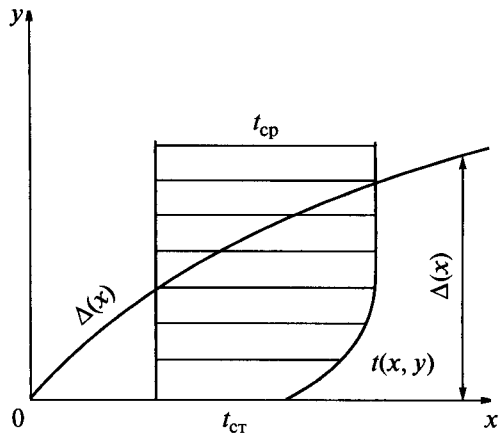

Рис. 2. Схема теплового пограничного слоя.

Решение интегрального уравнения (9) с граничными условиями (3)–(6) примем в виде следующего алгебраического полинома:

$$v_x = \sum_{k=0}^{n} a_k(\delta) y^k, \tag{10}$$

где $a_k(\delta)$ – неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий (3)–(6).

Подставим (10) в граничные условия (3)–(6), ограничиваясь четырьмя членами ряда. Относительно $a_k(\delta)$ $(k = 0,1,2,3)$ получаем систему четырех алгебраических линейных уравнений. Ее решение

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{3v}{2\delta}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{v}{2\delta^3}. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (10), находим

$$\frac{v_x}{v} = \frac{3y}{2\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3. \tag{12}$$

Подставляя (12) в интегральное уравнение (9), относительно неизвестной функции $\delta(x)$ будем иметь следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{140\nu}{13\, v}. \tag{13}$$

Интегрируя уравнение (13), при начальном условии $\delta(0) = 0$ находим

$$\delta(x) = 4.64\sqrt{\nu x / v} = \frac{4.64x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}, \tag{14}$$

где $\mathrm{Re}_x = vx/\nu$.

Соотношения (12), (14) представляют решение задачи (1)–(6) в первом приближении. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что соотношение (12) точно удовлетворяет граничным условиям (3)–(6) и интегральному уравнению (9).

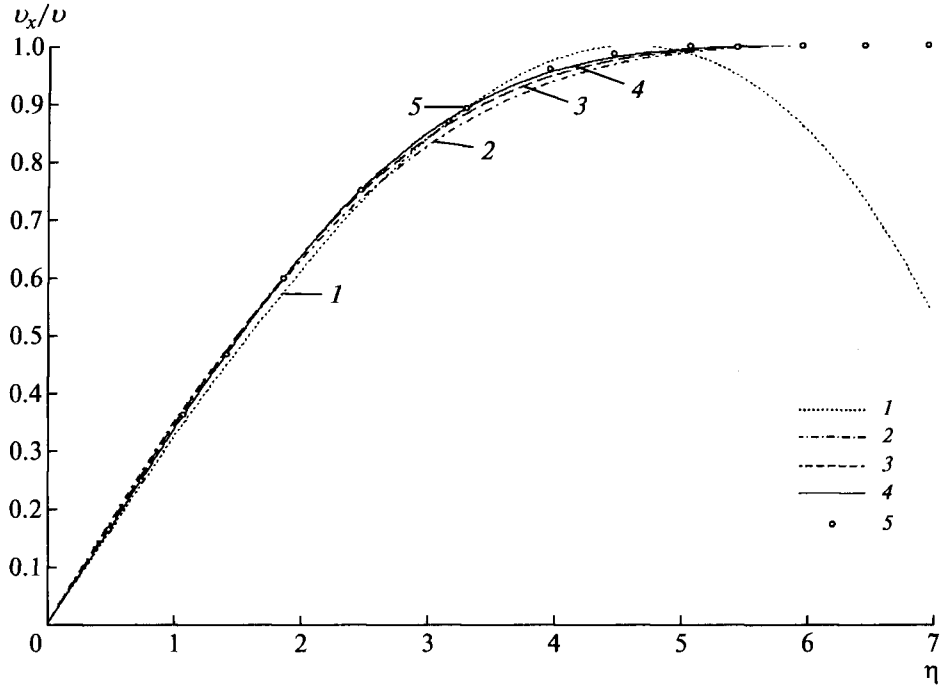

Рис. 3. Распределение безразмерных скоростей v_x/v в зависимости от безразмерной координаты $\eta = y\sqrt{v/vx}$: *1–4* – первое, второе, третье и четвертое приближения; *5* –точное решение [2].

Уравнения (1), (2), как это следует из (7), (8), в данном случае удовлетворяются лишь в среднем.

Соотношение (14) представим следующим образом:

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{4.64}{\mathrm{Re}^{0.5}}. \qquad (15)$$

Из соотношения (15) следует, что условие $\delta(x) \ll x$, лежащее в основе всей теории пограничного слоя, выполняется при достаточно больших числах Рейнольдса. Следовательно, теория пограничного слоя является теорией движения реальной жидкости при больших значениях числа Рейнольдса.

Результаты расчетов безразмерной скорости по формуле (12) в сравнении с точным решением уравнений (1), (2) [2] приведены на рис. 3, 4. Анализ полученных результатов позволяет заключить, что в диапазоне безразмерной переменной $0 \le \eta \le 5.0$ $\left(\eta = y/\delta(x) = y\sqrt{v/(vx)}\right)$ максимальное расхождение составляет 3%, в диапазоне $5.0 \le \eta \le 5.5$ – 11%, а при $\eta > 5.5$ решение (12) практически непригодно для использования. Таким образом, решение в первом приближении наименее точным оказывается вблизи границы гидродинамического пограничного слоя.

Ввиду того, что решение задачи о распределении скорости в гидродинамическом пограничном слое вида (12) будет использовано далее при решении температурной задачи, такое расхождение полученных результатов с точным решением может привести к еще большей неточности в определении распределения температуры внутри теплового пограничного слоя. Вопрос точности решения гидравлической задачи актуален еще и потому, что при решении задачи теплового пограничного слоя исходное уравнение осредняется и приводится к интегральному уравнению (интегралу теплового баланса). К тому же следует учесть еще и тот факт, что при получении исходных дифференциальных уравнений для гидравлического и теплового пограничных слоев (уравнения Прандтля и Польгаузена) были приняты допущения, позволившие максимально упростить математические постановки задач. В связи с чем проблема точности решения исходных уравнений является весьма актуальной. Важность получения как можно более точных решений этих уравнений состоит еще в том, что на основе этих решений выводятся широко используемые в теории конвективного теплообмена формулы для определения коэффициентов теплоотдачи и касательных напряжений.

Соотношение (12) благодаря полиномиальной зависимости скорости от координаты y позволяет построить линии изотах в пределах толщины гидродинамического пограничного слоя в координатах $y-x$ (рис. 5). Если заданы постоянные значения безразмерной скорости $v_x/v = V$, для различных значений координаты x находятся такие y, которые удовлетворяют соотношению (12).

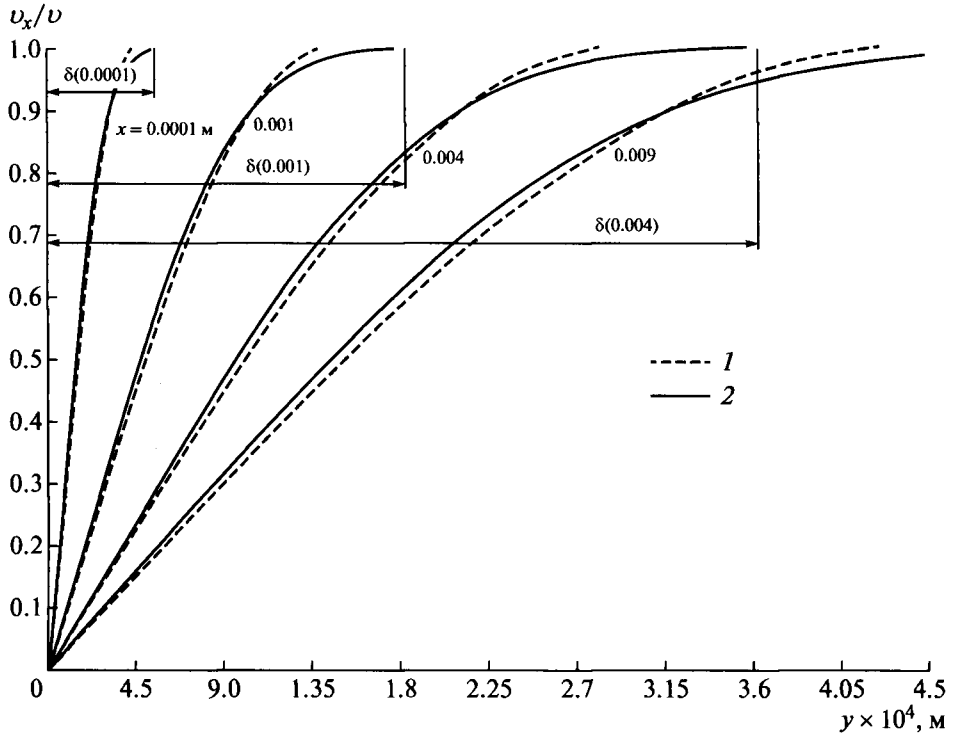

Рис. 4. Распределение безразмерных скоростей v_x/v в гидродинамическом пограничном слое: *1* – по формуле (12) (первое приближение); *2* – по формуле (34) (четвертое приближение).

Анализ распределения изотах позволяет заключить, что все они $(0 \le V \le 1)$ возникают на поверхности стенки в точке $x = 0, y = 0$. Изотаха нулевой скорости $V = 0$ совпадает с осью x. Изотаха единичной скорости $V = 1$ совпадает с линией гидродинамического пограничного слоя. Отмечается сгущение изотах вблизи стенки и их разрежение вблизи границы, отделяющей возмущенный поток от невозмущенного.

На основе графиков рис. 5 по соотношению $W = \Delta y/\Delta x$ определяются скорости перемещения изотах по координате y в зависимости от координаты x (рис. 6). Их анализ позволяет сделать вывод о том, что максимальную скорость перемещения имеет единичная изотаха. Скорость перемещения нулевой изотахи равна нулю. Все изотахи возникают на поверхности стенки в точке $x = 0, y = 0$, имея при этом бесконечно большие начальные скорости. Затем по мере продвижения изотах по координате y в зависимости от координаты x их скорости существенно уменьшаются с последующей стабилизацией изменения по закону, близкому к линейному. Отметим, что наибольший градиент скорости имеют изотахи малого потенциала на относительно небольшом расстоянии по координате x.

Для повышения точности решения задачи (1)–(6) необходимо увеличивать степень полинома (10). Для определения вновь возникающих при этом неизвестных коэффициентов $a_k(\delta)$ будем привлекать дополнительные граничные условия. Принцип их получения заключается в

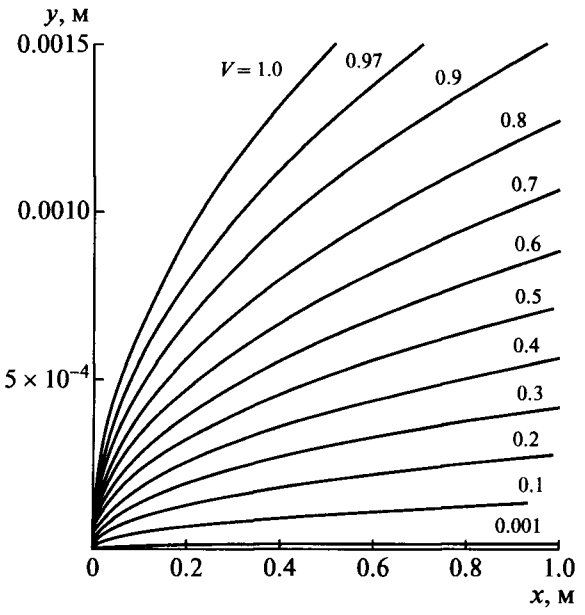

Рис. 5. Распределение изотах $v_x/v = V$ в гидродинамическом пограничном слое. Pr = ν/a = 1, v = 5 м/с.

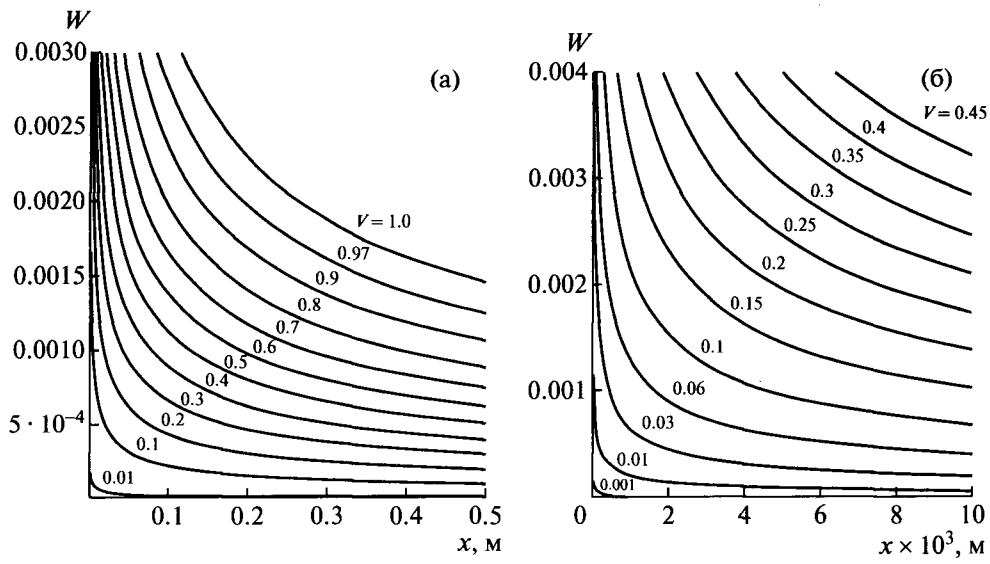

Рис. 6. Графики изменения скоростей движения изотах $W = \Delta y/\Delta x$ по координате y в зависимости от координаты $x\,(V = v_x/v)$, $v = 5$ м/с.

следующем [7–10]. Для определения первых из них уравнение (1) применяется в точках $y = 0$ и $y = \delta(x)$. Именно таким путем было получено дополнительное граничное условие (6). Для определения второго дополнительного граничного условия применим уравнение (1) к точке $y = \delta(x)$

$$\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_{y=\delta} + \left(v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=\delta} = \left(\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=\delta}. \qquad (16)$$

Продифференцируем граничное условие (4) по переменной x. Так как из (4) требуется находить значение $v_x(y)$ в точке $y = \delta(x)$, то y является функцией x, и, следовательно, $v_x(y)$ будет сложной функцией. Тогда по правилу определения производной от сложной функции имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_x(y)]_{y=\delta} = \left[\frac{\partial v_x(y)}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right]_{y=\delta} + \left.\frac{\partial v_x(y)}{\partial x}\right|_{y=\delta} = 0.$$

Последнее соотношение с учетом граничного условия (5) примет вид

$$\left.\frac{\partial v_x(y)}{\partial x}\right|_{y=\delta} = 0. \qquad (17)$$

Для уравнения (16) с учетом (5) и (17) получаем

$$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=\delta} = 0. \qquad (18)$$

Соотношение (18) представляет второе дополнительное граничное условие, из которого следует, что выполнение этого условия решением (10) равносильно выполнению уравнения (1) во всех точках $y = \delta(x)$.

Для определения последующих дополнительных граничных условий необходимо дифференцировать (многократно) уравнение (1) по переменной y, а граничные условия (основные и дополнительные) – по переменной x. Сравнивая получающиеся при этом соотношения, можно получить какое угодно количество дополнительных граничных условий, необходимых для все более точных аналитических решений уравнений (1), (2). Например, для получения третьего дополнительного граничного условия продифференцируем уравнение (1) по переменной y и запишем полученное соотношение для точки $y = \delta(x)$

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x\frac{\partial^2 v_x}{\partial y\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_y\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=\delta} = \nu\left(\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3}\right)_{y=\delta}. \qquad (19)$$

Соотношение (19) с учетом (4), (5), (18) принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y\partial x}\right)_{y=\delta} = \frac{\nu}{v}\left(\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3}\right)_{y=\delta}. \qquad (20)$$

Продифференцируем граничное условие (5) по переменной x, учитывая, что v_x – сложная функция:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v_x}{\partial y}\right]_{y=\delta} = \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right]_{y=\delta} + \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y\partial x}\right)_{y=\delta} = 0.$$

Последнее соотношение с учетом (18) принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial x}\right)_{y=\delta} = 0. \qquad (21)$$

Сравнивая (20) и (21), получаем третье дополнительное граничное условие

$$\left(\frac{\partial^3 \upsilon_x}{\partial x^3}\right)_{y=\delta} = 0. \qquad (22)$$

По физическому смыслу данное граничное условие означает выполнение на границе гидродинамического пограничного слоя соотношения, полученного после определения первой производной от уравнения (1).

Для определения четвертого дополнительного граничного условия продифференцируем уравнение (1) по переменной y и запишем полученное соотношение для точки $y = 0$

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x\frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_y\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=0} = \nu\left(\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3}\right)_{y=0}. \qquad (23)$$

С учетом уравнения неразрывности (2) и граничного условия (3) соотношение (23) приводится к виду

$$\left(\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3}\right)_{y=0} = 0. \qquad (24)$$

Соотношение (24) представляет четвертое дополнительное граничное условие.

Для получения следующих двух дополнительных граничных условий необходимо продифференцировать уравнение (1) дважды по переменной y и записать полученные соотношения для точек $y = 0$ и $y = \delta(x)$. Сравнивая полученные соотношения с соотношениями, найденными посредством дифференцирования граничных условий (6) и (18) по переменной x, находим следующие два дополнительных граничных условия:

$$\left(\frac{\partial^4 v_x}{\partial y^4}\right)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^4 v_x}{\partial y^4}\right)_{y=\delta} = 0. \qquad (25)$$

Аналогично можно получить какое угодно количество дополнительных граничных условий.

Физический смысл дополнительных граничных условий заключается в выполнении исходного дифференциального уравнения (1) и выражений, полученных после определения производных различной степени от него, в точках $y = 0$ и $y = \delta(x)$ (на линии гидродинамического пограничного слоя – фронте гидравлического возмущения). Ввиду того что перемещение фронта гидравлического возмущения охватывает весь диапазон изменения переменной y, для всех значений переменной x, которым соответствуют значения y, обозначающие линию гидродинамического пограничного слоя, уравнение (1) выполняется точно. Таким образом, благодаря использованию дополнительных граничных условий можно существенно повысить точность выполнения исходного дифференциального уравнения, несмотря на то что функция $\delta(x)$ определяется из интегрального уравнения (9), которое в любом приближении выполняется точно. При этом точность выполнения уравнения (1) будет зависеть от числа дополнительных граничных условий – числа приближений (числа членов ряда (10)).

Для получения решения задачи (1)–(6) во втором приближении подставим соотношение (10), ограничиваясь шестью членами ряда, в основные (3)–(5) и дополнительные (6), (18), (22) граничные условия. Относительно неизвестных коэффициентов $a_k(\delta)$ $(k = 0-5)$ будем иметь систему шести алгебраических линейных уравнений. Подставляя найденные из решения этой системы коэффициенты $a_k(\delta)$ в соотношение (10), находим

$$\frac{v_x}{v} = \frac{5}{2}\frac{y}{\delta} - 5\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + 5\left(\frac{y}{\delta}\right)^4 - \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^5. \qquad (26)$$

Подставляя (26) в интегральное уравнение (9), относительно неизвестной функции $\delta(x)$ будем иметь следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\delta\frac{d\delta}{dx} = \frac{99}{2}\frac{\nu}{v}. \qquad (27)$$

Интегрируя уравнение (27), при начальном условии $\delta(0) = 0$ находим

$$\delta(x) = 7.0356\sqrt{\nu x/v} = \frac{7.0356x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}. \qquad (28)$$

Соотношения (26), (28) представляют решение задачи (1)–(6) во втором приближении. Результаты расчетов по формуле (26) в сравнении с первым приближением и точным решением [2] даны на рис. 3. Их анализ позволяет заключить, что максимальное расхождение полученного решения с точным составляет около 2%. Важным является тот факт, что произошло значительное повышение точности на участках координаты y, расположенных вблизи границы пограничного слоя. Для получения решения в третьем приближении были использованы следующие дополнительные граничные условия:

$$\left(\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3}\right)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^4 v_x}{\partial y^4}\right)_{y=\delta} = 0, \quad \left(\frac{\partial^5 v_x}{\partial y^5}\right)_{y=\delta} = 0. \qquad (29)$$

Граничные условия (3)–(6), (18), (22), (29) позволяют определить уже девять неизвестных коэффициентов $a_k(\delta)$ $(k = 0-8)$ ряда (10). Подставляя (10) в перечисленные граничные условия, относительно $a_k(\delta)$ получим систему девяти алгебраических линейных уравнений. С учетом найден-

ных из решения этой системы значений коэффициентов $a_k(\delta)$ соотношение (10) принимает вид

$$\frac{v_x}{v} = \frac{8y}{3\delta} - \frac{70}{3}\left(\frac{y}{\delta}\right)^4 + 56\left(\frac{y}{\delta}\right)^5 - \\ -56\left(\frac{y}{\delta}\right)^6 + \frac{80}{3}\left(\frac{y}{\delta}\right)^7 - 5\left(\frac{y}{\delta}\right)^8. \quad (30)$$

Подставляя (30) в интегральное уравнение (9), относительно неизвестной функции $\delta(x)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\delta\frac{d\delta}{dx} = \frac{3978\nu}{131\,v}. \quad (31)$$

Разделяя переменные в уравнении (31) и интегрируя, при начальном условии $\delta(0) = 0$ получаем

$$\delta(x) = 7.7931\sqrt{\nu x/v} = \frac{7.7931x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}. \quad (32)$$

Соотношения (30), (32) представляют решение задачи (1)–(6) в третьем приближении. Результаты расчетов по формуле (30) в сравнении с точным решением [2] даны на рис. 3. Их анализ позволяет заключить, что безразмерные скорости, полученные по формуле (30), на большей части изменения безразмерной координаты $\eta = y\sqrt{v/(\nu x)}$ $(0 \le \eta \le 7.0)$ практически совпадают с точными значениями и лишь на участке $4.0 \le \eta \le 5.0$ максимальное расхождение составляет около 1%.

Найдем решение задачи (1)–(6) в четвертом приближении. Дополнительные граничные условия в данном случае имеют вид

$$\left(\frac{\partial^4 v_x}{\partial y^4}\right)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^6 v_x}{\partial y^6}\right)_{y=\delta} = 0, \quad \left(\frac{\partial^7 v_x}{\partial y^7}\right)_{y=\delta} = 0. \quad (33)$$

Отметим, что в каждом приближении используются три дополнительных граничных условия: одно условие задается при $y = 0$, а два других – при $y = \delta(x)$. Использование меньшего количества дополнительных граничных условий не приводит к заметному повышению точности решения.

Подставляя (10) во все основные и дополнительные граничные условия, относительно неизвестных коэффициентов $a_k(\delta)$ $(k = 0-11)$ будем иметь систему двенадцати алгебраических линейных уравнений. После определения a_k соотношение (10) принимает вид

$$\frac{v_x}{v} = \frac{11y}{4\delta} - \frac{231}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^5 + 462\left(\frac{y}{\delta}\right)^6 - 825\left(\frac{y}{\delta}\right)^7 + \\ +825\left(\frac{y}{\delta}\right)^8 - \frac{1925}{4}\left(\frac{y}{\delta}\right)^9 + 154\left(\frac{y}{\delta}\right)^{10} - 21\left(\frac{y}{\delta}\right)^{11}. \quad (34)$$

Подставляя (34) в (9), относительно $\delta(x)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\delta\frac{d\delta}{dx} = \frac{89148\nu}{2615\,v}. \quad (35)$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения относительно $\delta(x)$ в любом приближении отличаются друг от друга лишь числовым коэффициентом (см. уравнения (13), (27), (31), (35)), что значительно упрощает процесс получения их решений.

Интегрируя уравнение (35), при начальном условии $\delta(0) = 0$ находим

$$\delta(x) = 8.25724\sqrt{\nu x/v} = \frac{8.25724x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}. \quad (36)$$

Соотношения (34), (36) представляют решение задачи (1)–(6) в четвертом приближении. Результаты расчетов безразмерных скоростей по формуле (34) показывают, что расхождение с точным решением [2] не превышает 0.1%. Следовательно, с увеличением числа приближений решение всякий раз уточняется. Сравнение результатов расчетов безразмерных скоростей в первом и четвертом приближениях дано на рис. 4.

Отметим, что точное значение коэффициента в формуле (36) составляет величину 7.8 [2].

По известной толщине пограничного слоя можно найти формулу для касательного напряжения трения на поверхности пластины и, таким образом, оценить сопротивление, оказываемое твердой поверхностью движущейся жидкости при ламинарном режиме. Подставляя (34) в формулу закона Ньютона для касательного напряжения, находим

$$\tau_{\text{ст}} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = 2.75\mu\frac{v}{\delta(x)}.$$

После подстановки в последнее соотношение формулы для толщины гидродинамического пограничного слоя (36) получаем

$$\tau_{\text{ст}} = 0.331\frac{\rho v^2}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}.$$

Отличие коэффициента 0.331 от точного его значения 0.332 [2] составляет 0.1%. Отметим, что в первом приближении этот коэффициент равен 0.323 (отличие от точного около 3%).

ПОЛУЧЕНИЕ УТОЧНЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Теплообмен в тепловом пограничном слое (рис. 2) описывается уравнением энергии, известным под названием уравнения Польгаузена [1, 2]:

$$v_x\frac{\partial t(x,y)}{\partial x} + v_y\frac{\partial t(x,y)}{\partial y} = a\frac{\partial^2 t(x,y)}{\partial y^2}, \quad (37)$$

где a – коэффициент температуропроводности жидкости.

Граничные условия для уравнения (37) определяются соотношениями

$$t(x,0) = t_{\text{ст}}, \tag{38}$$

$$t(x,\Delta) = t_{\text{ср}}, \tag{39}$$

$$\partial t(x,\Delta)/\partial y = 0, \tag{40}$$

где (39), (40) представляют условия сопряжения прогретой и непрогретой зон. Условие (39) означает, что температура на границе теплового пограничного слоя (на границе фронта температурного возмущения) равна температуре невозмущенного потока $t_{\text{ср}}$. Согласно условию (40) тепловой поток не распространяется за пределы пограничного слоя. Математическое доказательство условий (39), (40) дано в [11].

Для получения еще одного граничного условия запишем уравнение (37) применительно к точке $y = 0$. Так как в этом случае $v_x(0) = v_y(0) = 0$, получим дополнительное граничное условие вида (по сути это есть первое дополнительное граничное условие)

$$\frac{\partial^2 t(x,0)}{\partial y^2} = 0. \tag{41}$$

Потребуем, чтобы искомое решение удовлетворяло не уравнению (37), а некоторому осредненному, т.е. уравнению (37), проинтегрированному по переменной y в пределах толщины теплового пограничного слоя $\Delta(x)$:

$$\int_0^\Delta v_x \frac{\partial t(x,y)}{\partial x} dy + \int_0^\Delta v_y \frac{\partial t(x,y)}{\partial y} dy = a \int_0^\Delta \frac{\partial^2 t(x,y)}{\partial y^2} dy. \tag{42}$$

Определяя интегралы в (42), получаем следующее интегральное уравнение [5]:

$$\frac{d}{dx}\int_0^\Delta v_x [t_{\text{ср}} - t(x,y)] dy = a \frac{\partial t(x,0)}{\partial y}. \tag{43}$$

Уравнение (43) можно также получить из рассмотрения балансовых соотношений по тепловым потокам в пределах теплового пограничного слоя. Данное уравнение таким путем впервые получено Г.Н. Кружилиным в 1936 г. [6].

Введем избыточную температуру по соотношению $T = t - t_{\text{ст}}$. Тогда $T_{\text{ср}} = t_{\text{ср}} - t_{\text{ст}}$. Интегральное уравнение (43) и граничные условия (38)–(40) для избыточной температуры примут вид

$$\frac{d}{dx}\int_0^\Delta v_x [T_{\text{ср}} - T(x,y)] dy = a \frac{\partial T(x,0)}{\partial y}, \tag{44}$$

$$T(x,0) = 0, \tag{45}$$

$$T(x,\Delta) = T_{\text{ср}}, \tag{46}$$

$$\partial T(x,\Delta)/\partial y = 0, \tag{47}$$

$$\partial^2 T(x,0)/\partial y^2 = 0. \tag{48}$$

Сопоставляя уравнения (1) и (37), можно убедиться, что при $\nu = a$ ($\Pr = \nu/a = 1$) по форме записи эти уравнения полностью совпадают. Если привести математические постановки задач к безразмерному виду, то полностью идентичными оказываются и граничные условия. Это означает, что безразмерные решения этих двух задач будут одинаковыми, а размерные распределения скоростей и температур вдоль оси y взаимно подобны. Следовательно, отношение теплового и гидродинамического слоев не зависит от координаты x.

Возникновение пограничных слоев (гидродинамического и теплового) обусловлено переносом импульса и теплоты по направлению поперечной координаты y. Следовательно, толщина каждого из пограничных слоев определяется интенсивностью соответствующего процесса переноса. Так как характеристикой интенсивности переноса импульса является кинематический коэффициент вязкости, а теплоты – коэффициент температуропроводности, соотношение толщин этих двух пограничных слоев должно зависеть от соотношения коэффициентов переноса, т.е. от величины числа $\Pr = \nu/a$. Чем больше величина критерия Прандтля, тем более интенсивным является поперечный перенос импульса по сравнению с переносом теплоты и, следовательно, тем больше в этом случае будет толщина гидродинамического слоя по сравнению с тепловым.

Ввиду того что толщины гидродинамического и теплового пограничных слоев должны подчиняться условию $\Delta(x) \le \delta(x)$ [1–6], величина критерия Прандтля должна быть $\Pr \ge 1$. Последнее условие приближенно выполняется для газов ($\Pr \approx 0.75$) и для неэлектропроводных жидкостей ($\Pr > 1$) и не выполняется для жидких металлов ввиду высокого значения коэффициента температуропроводности $\left(10^{-3} \le \Pr \le 10^{-2}\right)$.

Решение задачи (44)–(48) ищется в виде

$$T(x,y) = \sum_{k=0}^{n} a_k(\Delta) y^k, \tag{49}$$

где $a_k(\Delta)$ – неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий (45)–(48).

Ввиду подобия гидравлической и тепловой задач по аналогии с (12) для функции $T(x,y)$ можно записать формулу

$$\frac{T}{T_{\text{ср}}} = \frac{3y}{2\Delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\Delta}\right)^3. \tag{50}$$

Подставляя (50) и (12) в интегральное уравнение (44), находим

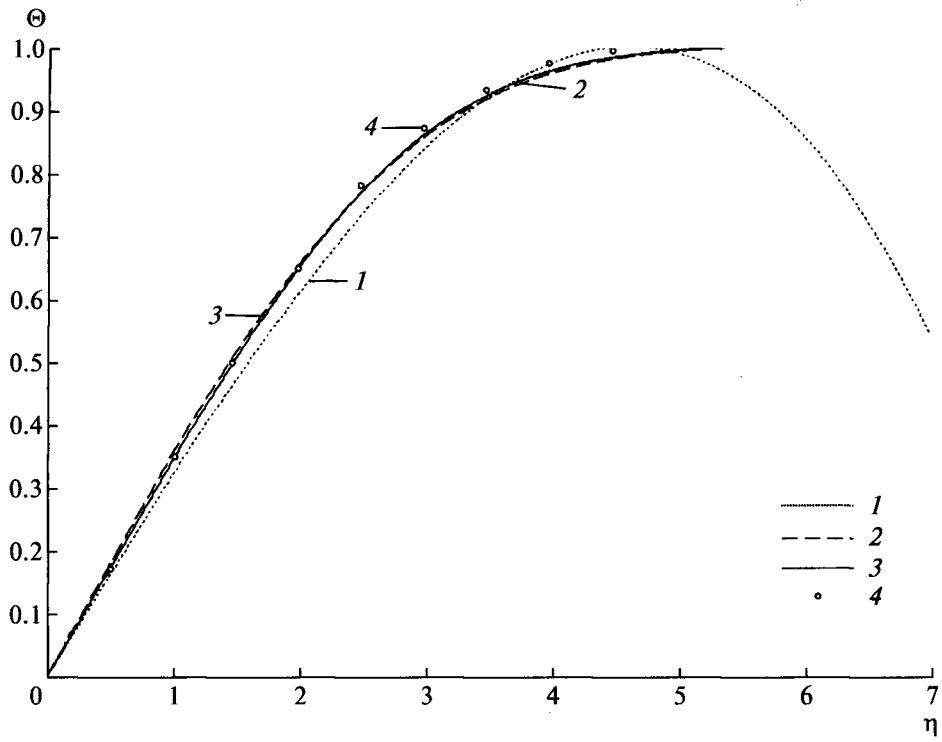

Рис. 7. Распределение безразмерных температур $\Theta = T/T_{\text{ср}}$ в зависимости от безразмерной координаты $\eta = y\sqrt{v/\nu x}$: *1–3* – соответственно первое, второе и третье приближения; *4* – точное решение [2].

$$\frac{d}{dx}\left\{T_{\text{ср}}v\delta\left[\frac{3}{20}\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^2-\frac{3}{280}\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^4\right]\right\}=a\frac{dT(x,0)}{dy}. \quad (51)$$

Дифференцируя (50) по переменной y, применительно к точке $y = 0$ будем иметь

$$\frac{\partial T(x,0)}{\partial y}=\frac{3}{2}\frac{T_{\text{ср}}}{\Delta}. \quad (52)$$

Если принять $\Delta < \delta$, то вторым членом в левой части уравнения (51) можно пренебречь. Тогда соотношение (51) с учетом (52) примет вид

$$\frac{3}{20}v\frac{d}{dx}\left(\beta^2\delta\right)=\frac{3}{2}\frac{a}{\beta\delta}, \quad (53)$$

где $\beta = \Delta/\delta$.

Ввиду отмеченной выше независимости величины β от координаты x $d\beta/dx = 0$. Отсюда получаем

$$\frac{1}{10}v\beta^3\delta\frac{d\delta}{dx}=a. \quad (54)$$

Подставляя (14) в (54), находим

$$\Delta(x)=\frac{4.64x}{\sqrt{\frac{vx}{\nu}}\sqrt[3]{\frac{\nu}{a}}}. \quad (55)$$

Соотношения (50), (55) определяют решение задачи (44)–(48) в первом приближении. Результаты расчетов относительных избыточных температур $\Theta = T/T_{\text{ср}} = (t - t_{\text{ст}})/(t_{\text{ср}} - t_{\text{ст}})$ по формуле (50) в сравнении с точным решением [2] представлены на рис. 7. Их анализ приводит к заключению о том, что расхождение полученных по формуле (50) значений температур от точных их значений находится в пределах 5–11%. Причем максимальное расхождение наблюдается вблизи верхней границы теплового пограничного слоя.

Для повышения точности решения введем дополнительные граничные условия. Метод их получения аналогичен рассмотренному выше [7–9]. В частности, применяя уравнение (37) к точке $y = \Delta(x)$, с учетом (40) находим

$$\frac{\partial t(x,\Delta)}{\partial x}=\frac{a}{v_x}\frac{\partial^2 t(x,\Delta)}{\partial y^2}. \quad (56)$$

Дифференцируя (39) по переменной x и сравнивая полученное соотношение с (56), находим второе дополнительное граничное условие (первым из них является соотношение (41)) вида

$$\frac{\partial^2 t(x,\Delta)}{\partial y^2}=0. \quad (57)$$

Для получения третьего дополнительного граничного условия продифференцируем уравнение (37) по переменной y и применим полученное соотношение для точки $y = \Delta(x)$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial t(x,\Delta)}{\partial x}+v_x\frac{\partial^2 t(x,\Delta)}{\partial x\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{\partial t(x,\Delta)}{\partial y}+ \\ +v_y\frac{\partial^2 t(x,\Delta)}{\partial y^2}=a\frac{\partial^3 t(x,\Delta)}{\partial y^3}. \quad (58)$$

Соотношение (58) с учетом (5), (40), (41) принимает вид

$$\frac{\partial^2 t(x,\Delta)}{\partial x\partial y}=\frac{a}{v_x}\frac{\partial^3 t(x,\Delta)}{\partial y^3}. \quad (59)$$

Дифференцируя (40) по переменной x и сравнивая полученное соотношение с (59), находим третье дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial^3 t(x,\Delta)}{\partial y^3}=0. \quad (60)$$

Подставим (49) в граничные условия (45)–(48), (57), (60), ограничиваясь шестью членами ряда. Относительно неизвестных коэффициентов $a_k\,(k=0-5)$ будем иметь систему шести алгебраических линейных уравнений. Отметим, что все дополнительные граничные условия для функций T и t идентичны. Подставляя найденные из решения этой системы значения коэффициентов a_k в (49), находим

$$\frac{T(x,y)}{T_{\text{ср}}}=\frac{5}{2}\frac{y}{\Delta}-5\left(\frac{y}{\Delta}\right)^3+5\left(\frac{y}{\Delta}\right)^4-\frac{3}{2}\left(\frac{y}{\Delta}\right)^5. \quad (61)$$

Подставляя (61) и (26) в интегральное уравнение (44), после определения интегралов относительно неизвестной функции $\Delta(x)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{v}{5544}\frac{d}{dx}\left(660\frac{\Delta^2}{\delta}+77\frac{\Delta^5}{\delta^4}-165\frac{\Delta^4}{\delta^3}-12\frac{\Delta^6}{\delta^5}\right)=\frac{5}{2}\frac{a}{\Delta}. \quad (62)$$

Ввиду того, что $\Delta<\delta$, вторым, третьим и четвертым членами в левой части соотношения (62) можно пренебречь. Тогда (62) сводится к

$$\frac{165}{1388}v\frac{d}{dx}\left(\beta^2\delta\right)=\frac{5}{2}\frac{a}{\beta\delta}. \quad (63)$$

Так как величина $\beta=\Delta/\delta$ не зависит от x, уравнение (63) приводится к виду

$$\frac{1}{21}v\beta^3\delta\frac{d\delta}{dx}=a. \quad (64)$$

Подставляя (28) в (64), находим

$$\Delta(x)=\frac{6.661x}{\sqrt{\frac{vx}{v}\sqrt[3]{\frac{v}{a}}}}. \quad (65)$$

Соотношения (62), (65) представляют решение задачи (37)–(41) во втором приближении. Результаты расчетов безразмерных температур $\Theta=T/T_{\text{ср}}$ по формуле (62) даны на рис. 7. Их анализ позволяет заключить, что уточнение решения во втором приближении по сравнению с первым составляет около 3% для $0.5\le\eta\le3.0$, а вблизи границы теплового пограничного слоя $\eta>5.0$ полученное во втором приближении решение практически совпадает с точным.

Соотношение (62) точно удовлетворяет всем основным (38)–(40) и дополнительным (48), (57), (60) граничным условиям, а также интегральному уравнению (44). По сравнению с первым приближением в данном случае наблюдается более точное выполнение уравнения (37) ввиду выполнения дополнительных граничных условий, согласно которым уравнение (37) точно выполняется в точках $y=0$ и $y=\Delta(x)$, т.е. на границе фронта температурного возмущения. Так как фронт температурного возмущения изменяется в диапазоне всего рассматриваемого участка координаты y, уточнение выполнения уравнения (37) происходит внутри всей области изменения искомой функции.

Найдем дополнительные граничные условия, необходимые для получения решения задачи в третьем приближении. Для этого продифференцируем уравнение (37) по переменной y и запишем полученное соотношение для точки $y=0$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial t(x,0)}{\partial x}+v_x\frac{\partial^2 t(x,0)}{\partial x\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{\partial t(x,0)}{\partial y}+ \\ +v_y\frac{\partial^2 t(x,0)}{\partial y^2}=a\frac{\partial^3 t(x,0)}{\partial y^3}. \quad (66)$$

Продифференцируем граничное условие (38) по переменным x и y

$$\frac{\partial t(x,0)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial t(x,0)}{\partial y}=0. \quad (67)$$

Соотношение (66) с учетом (3) и (67) приводится к виду

$$\frac{\partial^3 t(x,0)}{\partial y^3}=0. \quad (68)$$

Соотношение (68) представляет первое дополнительное граничное условие третьего приближения.

Аналогично, путем двух- и трехкратного дифференцирования уравнения (37) по переменной y и сравнения полученных соотношений с основными и дополнительными граничными условиями и производными от них по переменной x, применительно к точке $y=\Delta(x)$ получим второе и третье дополнительные граничные условия

$$\frac{\partial^4 t(x,\Delta)}{\partial y^4}=0,\quad \frac{\partial^5 t(x,\Delta)}{\partial y^5}=0. \quad (69)$$

Граничные условия (45)–(48), (57), (60), (68), (69) позволяют найти уже девять неизвестных коэффициентов $a_k(\Delta)$ $(k=0-8)$ ряда (49). Под-

ставляя (49) в перечисленные граничные условия, относительно неизвестных коэффициентов $a_k(\Delta)$ получим систему девяти алгебраических линейных уравнений. Подставляя найденные из решения этой системы значения коэффициентов $a_k(\Delta)$ в (49), находим

$$\frac{T(x,y)}{T_{\text{ср}}} = \frac{8}{3}\frac{y}{\Delta} - \frac{70}{3}\left(\frac{y}{\Delta}\right)^4 + 56\left(\frac{y}{\Delta}\right)^5 - \\ -56\left(\frac{y}{\Delta}\right)^6 + \frac{80}{3}\left(\frac{y}{\Delta}\right)^7 - 5\left(\frac{y}{\Delta}\right)^8. \quad (70)$$

Отметим, что в третьем приближении, как и во всех предыдущих, формулы для безразмерных температур и скоростей полностью совпадают, что можно объяснить полной аналогией интегральных уравнений (9), (44), а также всех основных и дополнительных граничных условий.

Подставляя (70) в интегральное уравнение (44), относительно неизвестной функции $\Delta(x)$ приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{dx}\left\{-\frac{\nu}{196911}\left[-19448\frac{\Delta^2}{\delta} + 3672\frac{\Delta^7}{\delta^6} + 99\frac{\Delta^9}{\delta^8} + 6644\frac{\Delta^5}{\delta^4} - \right.\right. \\ \left.\left. -7344\frac{\Delta^6}{\delta^5} - 935\frac{\Delta^8}{\delta^7}\right]\right\} = \frac{8}{3}\frac{a}{\Delta}. \quad (71)$$

Так как $\Delta < \delta$, всеми членами, кроме первого, в левой части уравнения (71) можно пренебречь. Тогда это уравнение принимает вид

$$\frac{19448}{196911}\nu\left[\frac{d}{dx}\left(\beta^2\delta\right)\right] = \frac{8}{3}\frac{a}{\beta\delta}. \quad (72)$$

Учитывая, что $\beta = \Delta/\delta$ не зависит от x, находим

$$\frac{1}{27}\nu\beta^3\delta\frac{d\delta}{dx} = a. \quad (73)$$

Подставляя в (73) соотношение (32), получаем

$$\Delta(x) = \frac{7.491x}{\sqrt{\frac{\nu x}{\nu}\sqrt[3]{\frac{\nu}{a}}}}. \quad (74)$$

Соотношения (70), (74) представляют решение задачи (37)–(41) в третьем приближении. Результаты расчетов по формуле (70) в сравнении с точным решением [2] даны на рис. 7. Их анализ позволяет заключить, что отклонение полученных по формуле (70) безразмерных температур от их точных значений не превышает 2%.

Дополнительные граничные условия, необходимые для получения решения задачи (37)–(41) в четвертом приближении, по форме аналогичны условиям (33). После определения неизвестных коэффициентов $a_k(\Delta)$ $(k = 0-11)$ соотношение (49) по аналогии с (34) примет вид

$$\frac{T}{T_{\text{ср}}} = \frac{11}{4}\frac{y}{\Delta} - \frac{231}{2}\frac{y^5}{\Delta^5} + 462\frac{y^6}{\Delta^6} - 825\frac{y^7}{\Delta^7} + 825\frac{y^8}{\Delta^8} - \\ -\frac{1925}{4}\frac{y^9}{\Delta^9} + 154\frac{y^{10}}{\Delta^{10}} - 21\frac{y^{11}}{\Delta^{11}}. \quad (75)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $\Delta(x)$ в данном случае будет выглядеть как

$$\frac{5}{156}\nu\beta^3\delta\frac{d\delta}{dx} = a. \quad (76)$$

Подставляя (36) в (76), находим

$$\Delta(x) = \frac{8.017x}{\sqrt{\frac{\nu x}{\nu}\sqrt[3]{\frac{\nu}{a}}}}. \quad (77)$$

Соотношения (75), (77) представляют решение задачи (37)–(41) в четвертом приближении. Результаты расчетов по формуле (75) показывают, что расхождение с точным решением не превышает 0.5%. Сравнение результатов расчетов безразмерных температур в первом и четвертом приближениях дано на рис. 8.

На рис. 9 даны результаты расчетов по формуле (75) для различных значений критерия Прандтля $(\text{Pr} = \nu/a = 0.6, 1.0, 3.0, 15.0)$ в сравнении с точным решением [2, 4]. Как видно из рисунка, для $\text{Pr} = 1.0$, 3.0, 15.0 полученные по формуле (75) значения безразмерных температур $\Theta = T/T_{\text{ср}} = (t - t_{\text{ст}})/(t_{\text{ср}} - t_{\text{ст}})$ практически совпадают с их точными значениями. Расхождение результатов, составляющее около 3%, наблюдается для $\text{Pr} = 0.6$, т.е. для газов.

На основе полученных выше зависимостей для скорости и температуры в пределах соответствующих пограничных слоев, используя дифференциальное уравнение конвективной теплоотдачи

$$-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{y=0} = \alpha(T_{\text{ср}} - T_{\text{ст}}), \quad (78)$$

можно определить коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = \frac{\lambda}{(T_{\text{ср}} - T_{\text{ст}})}\frac{\partial T(x,0)}{\partial y}. \quad (79)$$

Если использовать решение в первом приближении (соотношение (50)), то для коэффициента теплоотдачи получим формулу

$$\alpha = \frac{3}{2}\frac{\lambda}{\Delta(x)} = 1.5\frac{\lambda}{\Delta(x)}. \quad (80)$$

Для решения (75) в четвертом приближении будем иметь

$$\alpha = \frac{11}{4}\frac{\lambda}{\Delta(x)} = 2.75\frac{\lambda}{\Delta(x)}. \quad (81)$$

Подставляя (55) в (80), находим

$$\text{Nu}_x = 0.3233\sqrt{\text{Re}_x}\sqrt[3]{\text{Pr}},$$

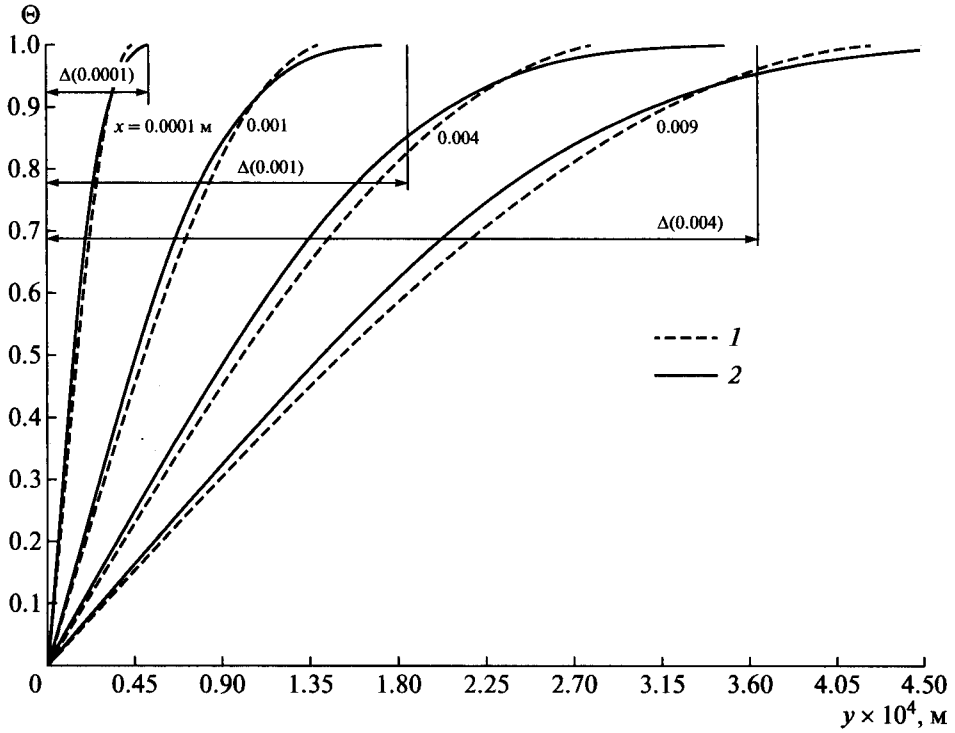

Рис. 8. Изменение безразмерных температур $\Theta = T/T_{ср}$ в пределах теплового пограничного слоя: *1* – по формуле (50) (первое приближение); *2* – по формуле (75) (четвертое приближение).

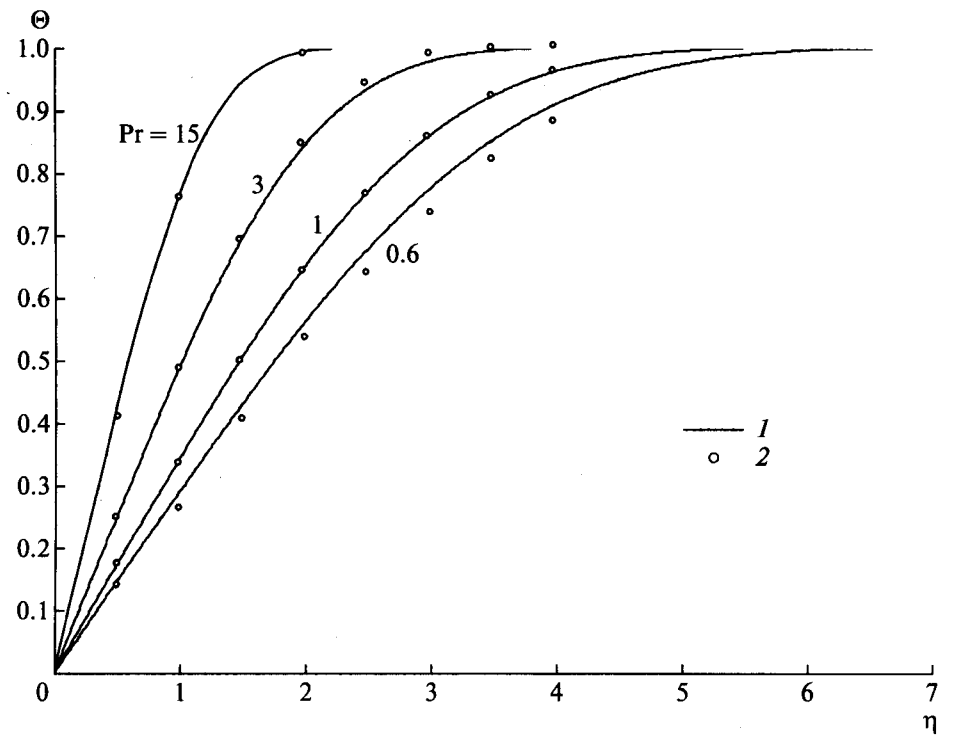

Рис. 9. Распределение безразмерных температур $\Theta = T/T_{ср}$ в зависимости от безразмерной координаты $\eta = y\sqrt{v/\nu x}$ для различных значений критерия Прандтля ($\mathrm{Pr} = \nu/a$). *1* – по формуле (75); *2* – точное решение [2, 4].

где $\mathrm{Nu}_x = \dfrac{\alpha x}{\lambda}$ – критерий Нуссельта; λ – коэффициент теплопроводности жидкости.

Подставляя (77) в (81), будем иметь

$$\mathrm{Nu}_x = 0.3432\sqrt{\mathrm{Re}_x}\sqrt[3]{\mathrm{Pr}}.$$

Отсюда следует, что расхождение коэффициентов в критериальных уравнениях теплоотдачи в первом и четвертом приближениях составляет 2%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам проведенных исследований можно сделать следующие выводы.

1. На основе математических моделей гидродинамического и теплового пограничных слоев, включающих интегральные уравнения Т. Кармана и Г.Н. Кружилина, путем использования дополнительных граничных условий разработана методика получения уточненных аналитических решений исходных дифференциальных уравнений пограничных слоев, предложенных Прандтлем и Польгаузеном. Дополнительные граничные условия позволяют применять аппроксимационное представление решения с возможностью определения любого числа его слагаемых и в итоге получать аналитические решения практически с заданной степенью точности.

2. Дополнительные граничные условия находятся из дифференциальных уравнений Прандтля и Польгаузена путем выполнения этих уравнений и производных от них в граничной точке $(y = 0)$ и на фронте гидравлического (температурного) возмущения (на границах пограничных слоев). Так как диапазон изменения фронтов возмущения охватывает весь диапазон изменения поперечной координаты $(0 \le y \le \delta(x);\ 0 \le y \le \Delta(x))$, для всех значений переменной x, которым соответствуют значения переменной y, обозначающие линию пограничного слоя, уравнения Прандтля и Польгаузена выполняются точно. Расчеты показывают, что с увеличением числа приближений (степени аппроксимирующего полинома) решение всякий раз уточняется.

3. Выполнен анализ распределения изотах и изотерм в пределах пограничных слоев. В частности, показано их сгущение вблизи поверхности стенки на весьма малом расстоянии по координате y. Проведен также анализ изменения скоростей движения изотах и изотерм по поперечной координате y в зависимости от величины продольной координаты x. Показано, что наибольшее изменение скоростей их движения наблюдается в узком пристеночном слое и на незначительном отрезке вдоль координаты x. Следовательно, именно на этих участках пограничных слоев имеют место максимальные напряжения трения и соответствующий этому диссипативный нагрев среды, омывающей пластину.

4. На основе полученных уточненных аналитических решений уравнений Прандтля и Польгаузена уточнены формулы для определения касательных напряжений на стенке (до 0.1% от точных их значений) и коэффициентов теплоотдачи на границе жидкость–стенка. Уточнены также формулы для определения толщин гидродинамического и теплового пограничных слоев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прибытков И.А., Левицкий И.А.* Теоретические основы теплотехники. М.: Академия, 2004. 464 с.
2. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
3. *Исаев С.И., Кожинов И.А., Кофанов В.И. и др.* Теория теплообмена. Уч. для вузов / Под ред. Леонтьева А.И. М.: Высш. школа, 1979. 495 с.
4. *Юдаев Б.Н.* Теплопередача. Уч. для вузов. М.: Высш. школа, 1981. 319 с.
5. *Жуковский В.С.* Основы теплопередачи. М.–Л.: Госэнергоиздат, 1960. 211 с.
6. *Болгарский А.В., Мухачев Г.А., Щукин В.К.* Термодинамика и теплопередача. М.: Высш. школа, 1975. 495 с.
7. *Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В.* Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях. М.: Высш. школа, 2008. 391 с.
8. *Кудинов В.А., Стефанюк Е.В.* Задачи теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения // Изв. РАН. Энергетика. 2008. № 4. С. 122.
9. *Кудинов В.А., Стефанюк Е.В., Антимонов М.С.* Аналитические решения задач теплообмена при течении жидкости в плоскопараллельных каналах на основе определения фронта температурного возмущения // ИФЖ. 2007. Т. 80. № 5. С. 176.
10. *Стефанюк Е.В., Кудинов В.А.* Дополнительные граничные условия в нестационарных задачах теплопроводности // ТВТ. 2009. Т. 47. № 2. С. 269.
11. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. школа, 2001. 550 с.