С. А. Рыбалка, Б. М. Шумилов, О локальной аппроксимации плоских кривых сплайнами первой степени в хаусдорфовой метрике,
Изв. вузов. Матем., 1991, номер 8, 80–81

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1991 МАТЕМАТИКА № 8 (351)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

С. А. Рыбалка, Б. М. Шумилов

УДК 519.651

О ЛОКАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПЛОСКИХ КРИВЫХ СПЛАЙНАМИ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ В ХАУСДОРФОВОЙ МЕТРИКЕ

Задача приближения плоских кривых с заданной хаусдорфовой точностью возникает при сжатии контурных изображений в ЭВМ [1], [2]. В статье получена оценка хаусдорфовой погрешности интерполяции кривых сплайнами первой степени, отличная от ранее известных [3], [4], и предложен способ локальной аппроксимации типа [5], [6], приводящий к уменьшению количества звеньев локально-аппроксимационного сплайна по сравнению с интерполяционным.

1. Предположим, что B — регулярная кривая в R^2, имеющая в каждой точке $u \in B$ единственную касательную. Под интерполяционным сплайном первой степени понимается ломаная S_1, состоящая из отрезков прямых, соединяющих упорядоченные точки $p_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, заданные на кривой B. Хаусдорфовым расстоянием между кривой B и сплайном S_1 называется число

$$\chi(B, S_1) = \max\{\max_{u \in S_1} \operatorname{dist}(u, B), \max_{u \in B} \operatorname{dist}(u, S_1)\},$$

где $\operatorname{dist}(u, B) = \min\limits_{v \in B} \rho(u, v)$, $\rho(u, v)$ — евклидово расстояние между точками u, v.

Обозначим через $\omega(\delta, B)$ максимальное угловое колебание касательной на участке кривой, имеющем стягивающую хорду длины δ, и

$$H = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} h_i, \quad h_i = \rho(p_i, p_{i+1}).$$

Теорема 1. *Пусть* $\omega(H, B) < \pi/2$. *Тогда* $\chi(B, S_1) \leqslant 0{,}5H \operatorname{tg}(\omega(H, B)/2)$. *Коэффициент* 0,5 *не может быть уменьшен.*

2. Пусть теперь B — регулярная кривая без точек перегиба, в которых кривая пересекает свою касательную, и точки p_i на кривой B удовлетворяет условию

$$\chi(\overline{p_i p_{i+1}}, \overparen{p_i p_{i+1}}) \equiv \varepsilon(i) = 2E \cos^2(\gamma_i/2), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Здесь $\gamma_i = \max(\alpha, \beta) < \pi/2$ и α, β — максимальные угловые отклонения касательной в одну и другую стороны от хорды $\overline{p_i p_{i+1}}$; E — положительная константа. Обозначим через $\tilde{S}_1$ ломаную, полученную сдвигом опорных точек p_i интерполяционного сплайна S_1 в направлении нормалей к кривой на величину E.

Теорема 2. $\chi(B, \tilde{S}_1) \leqslant E$. *При этом для случая приближения окружности радиуса* $R > 0$ *и* $E = R \operatorname{tg}^2(0{,}5\pi/n)$ *реализуется наилучшее хаусдорфовое приближение* [7].

Следствие. Количество звеньев локально-аппроксимационного сплайна $\tilde{S}_1$ всегда меньше количества звеньев интерполяционного сплайна S_1, удовлетворяющего условиям $\varepsilon(i) = E$ для каждого i.

3. Для эффективного вычисления хаусдорфого расстояния между дугой $\overparen{p_i p_{i+1}}$ и стягивающей ее хордой $\overline{p_i p_{i+1}}$ может служить неравенство [8]:

$$\varepsilon(i) \leqslant h_i \sin\alpha \sin\beta / \sin(\alpha + \beta).$$

Если в области аппроксимации имеется точка перегиба кривой B, в которой размещается, напр., опора p_k, то соседние опорные точки p_{k-1}, p_{k+1} должны отыскиваться из условий $\varepsilon(i) \leqslant E$, $i = k-1, k$. В этом случае опора p_k не сдвигается.

Полученные результаты подтверждены на ЭВМ численным моделированием адаптивной интерполяции и аппроксимации параметрически заданных кривых.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кипоть В. Л. Эффективные алгоритмы кусочной аппроксимации графических данных // Методы и средства обработки сложной грифической информации: Тез. докл. II Всесоюз. конф.— Горький, 1985.— С. 48.
2. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Приближения в хаусдорфовой метрике // Теория приближения функций.— М.: Наука, 1977.— С. 175—182.
3. Мартынюк В. Т. О приближении ломаными кривых, заданных параметрическими уравнениями, в хаусдорфовой метрике // Укр. матем. журн.— 1976.— Т. 28.— № 1.— С. 87—92.
4. Вакарчук С. Б. Аппроксимация кривых и поверхностей сплайнами // Препринт. Ин-т математики АН УССР.— Киев, 1982.— № 32.— 48 с.
5. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций.— М.: Наука, 1880.— 352 с.
6. Завьялов Ю. С., Шумилов Б. М. Локальная аппроксимация и наилучшее равномерное приближение сплайнами // Тр. Международн. конф.: Теория приближения функций.— Киев, 31 мая — 5 июня 1983.— М.: Наука, 1987.— С. 168—171.
7. Zhivkov N. V. Plane poligonal approximation of bounded convex sets // Докл. Болгарск. АН.— 1982.— Т. 35.— № 12.— С. 1631—1634.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: Определения, теоремы и формулы.— М.: Наука, 1978.— 831 с.

г. Томск

Поступила
24.04.1987