Н. А. Вавилов, О подгруппах унитарной группы над полулокальным кольцом, *УМН*, 1982, том 37, выпуск 4, 147–148

О ПОДГРУППАХ УНИТАРНОЙ ГРУППЫ НАД ПОЛУЛОКАЛЬНЫМ КОЛЬЦОМ

Н. А. Вавилов

В работах [1], [2], [5] описаны подгруппы полной линейной группы $GL(n, \Lambda)$ над полулокальным кольцом Λ, содержащие группу $D(n, \Lambda)$ диагональных матриц. Аналогичный вопрос решен также для расщепимых групп остальных классических типов (для $G\,\mathrm{Sp}_{2l}$ см. [6], изложение результатов для GO_n появится в «Бюллетене Польской Академии наук»). В настоящей заметке мы решаем аналогичный вопрос для подгрупп четномерной унитарной группы, соответствующей форме максимального индекса Витта.

Пусть Λ — ассоциативное кольцо с единицей и инволюцией ρ (антиавтоморфизмом порядка 2). Пусть $\rho x = \bar{x}$; $R = \{x \in \Lambda \mid x = \bar{x}\}$ — кольцо инвариантов; Λ^* и R^* — мультипликативные группы колец Λ и R соответственно. В основных результатах настоящей заметки предполагается, что Λ — полулокальное кольцо такое, что 1) $2 \in R^*$, 2) в каждом поле вычетов R содержится не менее семи элементов, 3) существует $\theta \in \Lambda^*$ такое, что $\bar{\theta} = -\theta$.

Обозначим через f матрицу порядка l, у которой на побочной диагонали стоят 1 и нули на всех остальных местах, а через F — блочную матрицу порядка $2l$, имеющую вид

$$F = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix}.$$

Полная унитарная группа $\Gamma = GU(2l, \Lambda)$ состоит из тех матриц x порядка $2l$ над Λ, для которых $xF\bar{x}^t = \lambda F$, для некоторого $\lambda \in R^*$, где x^t — матрица, транспонированная к x. Через $\Delta = \Delta(2l, \Lambda)$ обозначим подгруппу содержащихся в Γ диагональных матриц.

Напомним, что таблица $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, двусторонних идеалов σ_{ij} кольца Λ называется D-сетью идеалов в Λ порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ и $\sigma_{ii} = \Lambda$ для всех i, j, r (см. [1], [2]). Каждой сети соответствует подгруппа $G(\sigma)$ в полной линейной группе $G = GL(n, \Lambda)$, состоящая из тех матриц $a = (a_{ij}) \in G$, для которых $a_{ij}, a'_{ij} \equiv \delta_{ij} (\mathrm{mod}\ \sigma_{ij})$ при всех i, j, где $a^{-1} = (a'_{ij})$ — обратная к a матрица.

Для $r = 1, \ldots, n$ положим $r^* = n + 1 - r$ и назовем сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ порядка n над кольцом Λ с инволюцией унитарной, если $\sigma_{i^*j} = \bar{\sigma}_{ji}$ при всех i, j. В случае $n = 2l$ унитарная сеть определяет унитарную сетевую подгруппу $\Gamma(\sigma) = G(\sigma) \cap \Gamma$ в группе $\Gamma = GU(2l, \Lambda)$. Через $N_\Gamma(\sigma)$ обозначим нормализатор $\Gamma(\sigma)$ в Γ.

Как обычно, через e обозначим единичную матрицу, через e_{ij} — матричную единицу у которой на месте (i, j) стоят 1 и нули на всех остальных местах. Унитарные трансвекции определяются равенствами $T_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij} - \bar{\alpha} e_{j^*i^*}$, $\alpha \in \Lambda$, при $i \neq j, j^*$, и $T_{ii^*}(\alpha) = e + \alpha e_{ii^*}$, $\alpha \in R$. Для унитарной сети σ положим $\hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}$, если $i \neq j^*$, и $\hat{\sigma}_{ii^*} = \sigma_{ii^*} \cap R$. Пусть $E_\Gamma(\sigma)$ — подгруппа, порожденная унитарными трансвекциями $T_{ij}(\alpha)$, $\alpha \in \hat{\sigma}_{ij}$, $i \neq j$. Для подгруппы H в Γ, нормализуемой Δ, положим $\hat{\sigma}_{ij} = \{\alpha \in \Lambda;\ T_{ij}(\alpha) \in H\}$. При незначительных дополнительных предположениях (в частности, выполненных, если Λ — полулокальное кольцо, удовлетворяющее условиям 1) — 3) выше) все $\hat{\sigma}_{ij}$, $i \neq j^*$, являются идеалами в Λ, а $\hat{\sigma}_{ii^*}$ — в R, и если положить $\sigma_{ij} = \Lambda\hat{\sigma}_{ij}$ при $i \neq j$ и $\sigma_{ii} = \Lambda$, то набор идеалов $\sigma = (\sigma_{ij})$ образует унитарную сеть, которую мы будем называть сетью, ассоциированной с группой H (см. [4]). При этом $E_\Gamma(\sigma) \leqslant H$ и σ — наибольшая сеть с таким свойством.

Т е о р е м а 1. *Пусть Λ — полулокальное кольцо с инволюцией, удовлетворяющее условиям* 1) — 3). *Тогда для любой подгруппы H в $\Gamma = GU(2l, \Lambda)$, содержащей группу $\Delta = \Delta(2l, \Lambda)$, имеют место включения*

$$\Gamma(\sigma) \leqslant H \leqslant N_\Gamma(\sigma),$$

где σ — сеть, ассоциированная с группой H.

Напомним, что подгруппа Δ группы Γ называется пронормальной в Γ, если для любого $x \in \Gamma$ подгруппы Δ и $x\,\Delta x^{-1}$ сопряжены уже в подгруппе $\langle \Delta, x\,\Delta x^{-1} \rangle$, ими порожденной.

Теорема 2. *Пусть Λ — матрично локальное кольцо с инволюцией, удовлетворяющее условиям* 1) — 3). *Тогда подгруппа $\Delta = \Delta(2l, \Lambda)$ пронормальна в $\Gamma = GU(2l, \Lambda)$.*

Иначе говоря, эта теорема утверждает, что если H, F — две подгруппы в Γ, содержащие Δ, и $xHx^{-1} = F$ для некоторого $x \in \Gamma$, то $x = \pi y$, где $y \in H$, а $\pi \in N_\Gamma(\Delta)$.

Доказательства теорем 1 и 2 основаны в основном на тех же соображениях, что и доказательства в работах [1], [2], [4] — [6], хотя и несколько сложнее технически.

Замечания. 1°. Для случая конечного поля теорема 1 совершенно другими методами доказана в [8]. 2°. Аналог теоремы 1 имеет место и в том случае, когда условие 3) не выполнено, но в этом случае вместо сетей нужно рассматривать наборы идеалов, в которых условие $\sigma_{ij}\sigma_{ji^*} \subseteq \sigma_{ii^*}$ заменено на более слабое: $\mathrm{Tr}\, \sigma_{ij}\sigma_{ji^*} \subseteq \sigma_{ii^*}$, где $\mathrm{Tr}\, I = \{a + \bar{a},\ a \in I\}$. 3°. Аналог теоремы 1 справедлив для подгрупп, нормализуемых группой Δ, но при этом включения заменяются на следующие: $E_\Gamma(\sigma) \leqslant H \leqslant N_\Gamma(\sigma)$. 4°. Теорема 2 позволяет, в частности, вычислить фактор-группы $N_\Gamma(\sigma)/\Gamma(\sigma)$, возникающие в теореме 1. Все они являются факторами группы Вейля $N_\Gamma(\Delta)/\Delta$. 5°. Внешне задача, решаемая в настоящей заметке, совпадает с задачей, решаемой в [3], [7]. На самом деле это не так даже в том случае, когда в каждой размерности имеется всего одна унитарная группа. Дело в том, что тор, рассматриваемый в этих работах, анизотропен, в то время как в настоящей заметке настолько близок к расщепимому, насколько это возможно.

В заключение автор благодарит З. И. Боревича за интерес к настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] З. И. Боревич. Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1976, **64**, с. 12—29.

[2] З. И. Боревич, Н. А. Вавилов. Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц.— Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1978, **148**, с. 43—57.

[3] З. И. Боревич, С. Л. Крупецкий. Подгруппы унитарной группы, содержащие группу диагональных матриц.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1979, **86**, с. 19—29.

[4] Н. А. Вавилов. О параболических подгруппах групп Шевалле скрещенного типа над полулокальным кольцом.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1979, **94**, с. 21—36.

[5] Н. А. Вавилов. О подгруппах полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащих группу диагональных матриц.— Вестн. ЛГУ, 1981, № 1, с. 10—15.

[6] Н. А. Вавилов, Е. В. Дыбкова. Подгруппы полной симплектической группы, содержащие группу диагональных матриц.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1980, **103**, с. 31—47.

[7] С. Л. Крупецкий. О подгруппах унитарной группы над локальным полем.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1979, **94**, с. 81—103.

[8] G. M. Seitz. Subgroups of finite groups of Lie type.— J. Algebra, 1979, **61**:1, p. 16—27.

Ленинградский государственный университет

Поступило в Правление общества 15 декабря 1981 г.