Автоматика и телемеханика, № 1, 2014

Стохастические системы, системы массового обслуживания

© 2014 г. С.В. ИВАНОВ
(Московский авиационный институт)

ДВУХУРОВНЕВЫЕ ЗАДАЧИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С КВАНТИЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ[1]

Предлагается постановка двухуровневой задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием. Исследуется свойство непрерывности критериальной функции. Доказывается теорема существования решения. Предлагается детерминированный эквивалент задачи для случая скалярного случайного параметра. Приводится эквивалентная задача в виде двухэтапной задачи стохастического программирования с равновесными ограничениями и квантильным критерием. Для случая дискретного распределения случайных параметров задача сводится к смешанной задаче линейного программирования. Приводятся результаты численных экспериментов.

1. Введение

Задачи двухуровневой оптимизации возникают при моделировании систем, процесс принятия решения в которых имеет многоуровневую структуру. Предполагается участие двух игроков: лидера и последователя. Последователь принимает решение, зная стратегию лидера. Лидер учитывает оптимальную стратегию последователя при выборе своей стратегии. Впервые данная задача была рассмотрена Штакельбергом при изучении моделей рынка [1], однако интенсивное изучение данных задач приходится на последние три десятилетия. Основные результаты теории двухуровневых задач содержатся в [2–6].

Среди приложений задач двухуровневого программирования можно выделить иерархические модели экономики [7], транспортную задачу [8], задачу размещения предприятий [9] и модели алюминиевой промышленности [10].

Линейная задача двухуровневого программирования в оптимистической постановке имеет вид

$$c_1^{\mathrm{T}} u + f^{\mathrm{T}} y^* \to \min_{u \in U,\, y^* \in Y^*(u)}, \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 11-07-00315а, 12-07-13108-офи-м-РЖД) и государственного финансирования целевых программ «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (Мероприятие 1.2.2, Госконтракт № 14.740.11.1128).

где

$$Y^*(u) \triangleq \operatorname{Arg}\min_{y}\left\{c_2^{\mathrm{T}} y \mid A_2 u + B_2 y \geqslant g,\ y \geqslant 0\right\},$$

$u \in \mathbb{R}^n$ — стратегия лидера, $y^* \in \mathbb{R}^k$ — оптимальная стратегия последователя, $A_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $c_1 \in \mathbb{R}^n$, $c_2 \in \mathbb{R}^k$, $f \in \mathbb{R}^k$, $g \in \mathbb{R}^m$, $U \triangleq \{u \in \mathbb{R}^n \mid A_1 u \leqslant b_1\}$ — множество допустимых стратегий лидера, $A_1 \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $b_1 \in \mathbb{R}^l$. Оптимистичность постановки (1) заключается в том, что лидер ориентируется на наилучшую для себя оптимальную стратегию последователя. Также возможна пессимистическая постановка задачи, в которой лидер принимает во внимание наихудшую для себя оптимальную стратегию последователя.

С помощью условий дополняющей нежесткости задача (1) может быть сведена к задаче математического программирования с равновесными ограничениями:

$$c_1^{\mathrm{T}} u + f^{\mathrm{T}} y \to \min_{u\in U,\, y\in\mathbb{R}^k,\, \lambda\in\mathbb{R}^m}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} A_2 u + B_2 y \geqslant g, \quad B_2^{\mathrm{T}}\lambda \leqslant c_2, \\ \lambda^{\mathrm{T}}(A_2 u + B_2 y - g) = 0, \quad y^{\mathrm{T}}(B_2^{\mathrm{T}}\lambda - c_2) = 0, \\ y \geqslant 0, \quad \lambda \geqslant 0. \end{gathered}$$

Решение данной задачи требует привлечения методов невыпуклой оптимизации. Однако при некоторых предположениях полученная задача может быть сведена к смешанной задаче линейного программирования [11].

В [12] предлагался метод сведения задачи (1) к параметрической задаче линейного программирования с дальнейшей оптимизацией по скалярному параметру.

Разработке численных методов решения задачи (1), основанных на методах невыпуклой оптимизации, посвящены работы [13–15].

Стохастическая постановка задачи двухуровневого программирования была предложена в [16]. Там же предложен алгоритм поиска локального оптимума. В [17] изучены свойства данной задачи. Изучению стохастической двухуровневой задачи, в которой стратегия последователя выбирается, исходя из условия минимума критериальной функции в форме математического ожидания, посвящена и работа [18]. В [18] приведены достаточные условия существования решения поставленной задачи, разработан алгоритм поиска локального оптимума и даны приложения стохастической постановки задачи двухуровневого программирования к задачам телекоммуникации.

Для поиска стратегии, обеспечивающей гарантированный по вероятности результат, в стохастическом программировании используется квантильный критерий [19], являющийся уровнем целевой функции, непревышение которого гарантируется с заданной вероятностью. Частный случай двухуровневой задачи с квантильным критерием рассматривался в [20] в контексте задачи проектирования сетей с заданным уровнем надежности. Для решения задачи был предложен генетический алгоритм. В [21] изучена двухуровневая задача в стохастической постановке с квантильным критерием для гауссовского распределения с неопределенным математическим ожиданием.

Комбинированная двухэтапная двухуровневая постановка задачи стохастического программирования с квантильным критерием использовалась для моделирования сложных экономических систем. На основе такой постановки разработаны модель для оптимизации железнодорожных перевозок [22] и модель для планирования инвестиций в развитие отраслей производства [23].

В данной работе изучается двухуровневая задача стохастического линейного программирования с квантильным критерием для произвольного распределения случайных параметров. В случае дискретного распределения случайных параметров предлагается метод сведе́ния данной задачи к смешанной задаче линейного программирования. Методы сведе́ния одноэтапных и двухэтапных задач стохастического программирования с квантильным критерием к задачам смешанного линейного программирования рассматривались в [24–27].

Оказывается, что класс двухуровневых задач стохастического программирования с критерием в форме математического ожидания может рассматриваться как расширение класса двухэтапных задач стохастического программирования [28, 29]. Аналогично класс двухуровневых задач стохастического программирования с квантильным критерием может рассматриваться как расширение класса двухэтапных задач стохастического программирования с квантильным критерием [30].

2. Постановка задачи

Пусть X — случайный вектор с реализациями $x \in \mathbb{R}^m$, u — стратегия лидера. Задача последователя формулируется в виде

$$c_2^{\mathrm{T}} y \to \min_{y \in Y(u,x)}, \tag{2}$$

где $Y(u,x) \triangleq \{y \in \mathbb{R}^k \mid A_2 u + B_2 y \geqslant x,\ y \geqslant 0\}$ — множество допустимых стратегий задачи последователя, $A_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — технологическая матрица, $B_2 \in \mathbb{R}^{m\times k}$ — матрица рекурсии, $c_2 \in \mathbb{R}^k$ — вектор коэффициентов линейной функции потерь последователя. Обозначим через $Y^*(u,x) \triangleq \operatorname{Arg} \min\limits_{y\in Y(u,x)} c_2^{\mathrm{T}} y$ множество оптимальных решений задачи (2). Если для пары (u,x) не существует решения задачи (2), т.е. $Y(u,x) = \varnothing$ либо оптимальное значение целевой функции в (2) не ограничено снизу, то будем предполагать, что $Y^*(u,x) = \varnothing$.

Определим функцию потерь лидера при реализации стратегии последователя:

$$\Phi(u,x) \triangleq \begin{cases} \min\limits_{y^* \in Y^*(u,x)} f^{\mathrm{T}} y^*, & \text{если } Y^*(u,x) \neq \varnothing, \\ +\infty, & \text{если } Y^*(u,x) = \varnothing, \end{cases} \tag{3}$$

где $f \in \mathbb{R}^k$ — вектор коэффициентов линейной функции потерь лидера, связанных со стратегией последователя.

Рассмотрим функцию квантили

$$\Phi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi \mid \mathbf{P}\{\Phi(u, X) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\}, \tag{4}$$

где α — фиксированный уровень надежности, $\mathbf{P}\{\cdot\}$ — вероятностная мера, порожденная распределением случайного вектора X.

Двухуровневая задача стохастического линейного программирования с квантильным критерием в оптимистической постановке формулируется в виде

$$c_1^{\mathrm{T}} u + \Phi_\alpha(u) \to \min_{u \in U}, \tag{5}$$

где $c_1 \in \mathbb{R}^n$ — вектор коэффициентов линейной функции потерь лидера, $U \triangleq \{u \in \mathbb{R}^n \mid A_1 u \leqslant b_1\}$ — множество допустимых стратегий лидера, $A_1 \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $b_1 \in \mathbb{R}^l$.

Заметим, что если целевые функции лидера и последователя совпадают (т.е. $c_2 = f$), то задача (5) является двухэтапной задачей стохастического программирования с квантильным критерием [30, 31].

Класс прикладных задач, описываемых данной моделью, достаточно широк. Приведем одну из возможных экономических интерпретаций.

Рассмотрим задачу планирования производства. Лидером является компания, которая производит n различных типов продукции. Лидер определяет объем производства каждого типа продукции. Для производства продукции требуется m видов ресурсов. Объемы ресурсов X_i, $i = \overline{1, m}$, доступных лидеру, предполагаются случайными и неизвестными лидеру во время выбора стратегии. В случае нехватки имеющихся ресурсов лидер обращается к последователю, который может произвести дополнительные ресурсы по более высокой цене. Пусть u_j — объем производства j-го типа продукции; y_i — объем производства последователем i-го ресурса; $A_2(i, j)$ — объем i-го ресурса, требуемый для производства единицы продукции j-го типа, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$; c_{1j} — стоимость единицы продукции j-го типа; f_i — стоимость дополнительно произведенной последователем единицы i-го ресурса; c_{2i} — издержки последователя при производстве единицы i-го ресурса. Тогда задачу планирования производства можно записать в виде

$$-c_1^{\mathrm{T}} u + \Phi_\alpha(u) \to \min_{u \in U},$$

где $\Phi_\alpha(u)$ задается формулами (2)–(4), а $Y(u, x) = \{y \in \mathbb{R}^k \mid A_2 u \leqslant x + y,\ A_3 y \leqslant b_3,\ y \geqslant 0\}$. Матрица A_3 и вектор b_3 задают возможные дополнительные ограничения на стратегию последователя. Первое слагаемое в целевой функции данной задачи представляет собой доход, взятый с обратным знаком, а второе слагаемое — издержки, непревышение которых гарантируется с заданным уровнем вероятности α.

3. Свойства задачи

Введем обозначение

$$W \triangleq \{(u, x) \mid Y(u, x) \neq \varnothing\}.$$

Так как множество W является проекцией выпуклого замкнутого полиэдрального множества $\{(u, x, y) \mid A_2 u + B_2 y \geqslant x,\ x \geqslant 0\}$ на подпространство переменных (u, x), то W — выпуклое замкнутое полиэдральное множество.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если существует пара $(\hat{u}, \hat{x}) \in W$ такая, что $|\Phi(\hat{u}, \hat{x})| < +\infty$, то $|\Phi(u, x)| < +\infty$ для всех $(u, x) \in W$ и функция $\Phi(\cdot)$ — липшицева на множестве W,

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

В доказанной теореме 1 утверждается свойство Липшица для функции на множестве W. Явный вид данного множества указать сложно. Поэтому получим следствие из теоремы 1, обеспечивающее свойство Липшица для функции $\Phi(\cdot)$ на всем пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Следствие 1. Пусть $\tilde{V} \triangleq \{\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}^{m+1} \mid (-c_2 \mid B_2)^{\mathrm{T}} \tilde{\lambda} \leqslant f,\ \tilde{\lambda} \geqslant 0\} \neq \varnothing$, $0^+\tilde{V} \triangleq \{\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}^{m+1} \mid (-c_2 \mid B_2)^{\mathrm{T}} \tilde{\lambda} \leqslant 0,\ \tilde{\lambda} \geqslant 0\} = \{\bar{0}\}$, $V_1 \triangleq \{\lambda \in \mathbb{R}^m \mid B_2^{\mathrm{T}} \lambda \leqslant c_2,\ \lambda \geqslant 0\} \neq \varnothing$, где $\bar{0}$ — нулевой вектор соответствующей размерности. Тогда $\Phi(\cdot)$ — липшицева на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и $|\Phi(u, x)| < +\infty$ для всех (u, x).

Доказательства следствия 1 и всех последующих следствий вынесены в Приложение.

Можно предложить и другое условие, обеспечивающее совпадение W с $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Следствие 2. Пусть $V_2 \triangleq \{\lambda \in \mathbb{R}^m \mid B_2^{\mathrm{T}} \lambda \leqslant f,\ \lambda \geqslant 0\} \neq \varnothing$, $0^+V \triangleq \{\lambda \in \mathbb{R}^m \mid B_2^{\mathrm{T}} \lambda \leqslant 0,\ \lambda \geqslant 0\} = \{\bar{0}\}$, $V_1 \neq \varnothing$. Тогда $\Phi(\cdot)$ — липшицева на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и $|\Phi(u, x)| < +\infty$ для всех (u, x).

В следующей теореме предложены условия непрерывности функции квантили.

Теорема 2. Пусть $|\Phi(u, x)| < +\infty$ для всех $(u, x) \in W$. Тогда функция квантили $\Phi_\alpha(\cdot)$, определенная в (4), является непрерывной на множестве $K_1 \triangleq \{u \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in \mathcal{X}\ Y(u, x) \neq \varnothing\}$, где $\mathcal{X}$ — носитель вероятностной меры $\mathbf{P}\{\cdot\}$.

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

В теореме 2 предлагаются условия, обеспечивающие непрерывность функции квантили лишь на множестве K_1. Используя следствия из теоремы 1, предложим следствие из теоремы 2, которое гарантирует непрерывность функции квантили на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, а значит, и существование решения задачи (5).

Следствие 3. Пусть $U \neq \varnothing$, $0^+U \triangleq \{A_1 u \leqslant 0\} = \{\bar{0}\}$, где $\bar{0}$ — нулевой вектор соответствующей размерности, и выполнены условия следствия 1 или следствия 2, тогда решение задачи (5) существует.

4. Скалярный случай

Рассмотрим случай $x \in \mathbb{R}^1$, $A_2 \triangleq a_2^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $B_2 \triangleq b_2^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{1\times k}$, $b_{2j} > 0$, $c_{2j} \geqslant 0$, $j = \overline{1,k}$. Тогда задача последователя

$$c_2^{\mathrm{T}} y \to \min_{y \in Y(u,x)}, \tag{6}$$

где $Y(u,x) \triangleq \{y \in \mathbb{R}^k \mid a_2^{\mathrm{T}} u + b_2^{\mathrm{T}} y \geqslant x,\ y \geqslant 0\}$, может быть решена аналитически.

Каждому $j^* \in \mathcal{J} \triangleq \operatorname{Arg} \min\limits_{j=\overline{1,k}} \{\frac{c_{2j}}{b_{2j}}\}$ можно сопоставить оптимальное решение задачи (6) y^μ, соответствующее вершине множества $Y(u,x)$, $\mu = \overline{1,M}$, где M — количество элементов в множестве $\mathcal{J}$. Данное оптимальное решение y^μ может быть записано в виде:

$$y^\mu_{j^*} = \max\left\{0, \frac{x - a_2^{\mathrm{T}} u}{b_{2j^*}}\right\},$$
$$y^\mu_j = 0, \quad j \neq j^*, \quad \mu = \overline{1,M}.$$

Таким образом, можно найти представление множества оптимальных решений задачи последователя в виде

$$Y^*(u,x) = \operatorname{Conv}\left\{y^1, \ldots, y^M\right\},$$

где $\operatorname{Conv}\left\{y^1, \ldots, y^M\right\}$ — выпуклая оболочка векторов $y^1, \ldots, y^M$.

Функция потерь лидера $\Phi(u,x)$ является оптимальным значением целевой функции задачи линейного программирования, поэтому минимум в определении $\Phi(u,x)$ достигается в одной из вершин множества $Y^*(u,x)$. Следовательно,

$$\Phi(u,x) = \min_{j^* \in \mathcal{J}} \left\{ f_{j^*} \max\left\{0, \frac{x - a_2^{\mathrm{T}} u}{b_{2j^*}}\right\}\right\}. \tag{7}$$

Минимум в (7) достигается при $j^* = j' \in \operatorname{Arg} \min\limits_{j^* \in \mathcal{J}} \left\{\frac{f_{j^*}}{b_{2j^*}}\right\}$, т.е.

$$\Phi(u,x) = f_{j'} \max\left\{0, \frac{x - a_2^{\mathrm{T}} u}{b_{2j'}}\right\},$$

где $j' \in \operatorname{Arg} \min\limits_{j^* \in \mathcal{J}} \left\{\frac{f_{j^*}}{b_{2j^*}}\right\}$.

Если $f_{j'} \geqslant 0$, то функция потерь $\Phi(u,x)$ является монотонно не убывающей по x, поэтому функция квантили имеет вид

$$\Phi_\alpha(u) = f_{j'} \max\left\{0, \frac{x_\alpha - a_2^{\mathrm{T}} u}{b_{2j'}}\right\},$$

где $x_\alpha \triangleq \min\{x \mid \mathbf{P}\{X \leqslant x\} \geqslant \alpha\}$ — квантиль уровня α распределения случайной величины X. Таким образом, может быть построен детерминированный эквивалент задачи лидера в форме задачи линейного программирования

$$\varphi \to \min_{\varphi \in \mathbb{R}, u \in U}$$

при ограничениях

$$c_1^{\mathrm{T}} u \leqslant \varphi,$$

$$c_1^{\mathrm{T}} u + \frac{f_{j'}}{b_{2j'}}(x_\alpha - a_2^{\mathrm{T}} u) \leqslant \varphi.$$

Если $f_{j'} < 0$, то функция потерь $\Phi(u,x)$ является монотонно не возрастающей по x. Согласно теореме, доказанной в [22], функция квантили в этом случае имеет вид

$$\Phi_\alpha(u) = f_{j'} \max\left\{0, \frac{x'_\alpha - a_2^{\mathrm{T}} u}{b_{2j'}}\right\},$$

где $x'_\alpha \triangleq -\min\{x \mid \mathbf{P}\{-X \leqslant x\} \geqslant \alpha\}$ — квантиль уровня α распределения случайной величины $(-X)$, взятая с обратным знаком. Детерминированный эквивалент задачи (5) имеет вид

$$c_1^{\mathrm{T}} u + f_{j'} \max\left\{0, \frac{x'_\alpha - a_2^{\mathrm{T}} u}{b_{2j'}}\right\} \to \min_{u \in U}.$$

5. Сведéние задачи к двухэтапной задаче стохастического программирования с квантильным критерием

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Множество решений задачи (5) *совпадает с множеством решений задачи*

$$c_1^{\mathrm{T}} u + \Phi_\alpha(u) \to \min_{u \in U}, \tag{8}$$

где

$$\Phi_\alpha(u) = \min\{\varphi \mid \mathbf{P}\{\Phi(u,X) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\},$$

$$\Phi(u,x) = \begin{cases} \min\limits_{(y,\lambda) \in \Lambda(u,x)} f^{\mathrm{T}} y, & \text{\textit{если} } \Lambda(u,x) \neq \varnothing; \\ +\infty, & \text{\textit{если} } \Lambda(u,x) = \varnothing, \end{cases} \tag{9}$$

$$\Lambda(u,x) = \{(y,\lambda) \mid A_2 u + B_2 y \geqslant x,\ B_2^{\mathrm{T}} \lambda \leqslant c_2,$$
$$\lambda^{\mathrm{T}}(A_2 u + B_2 y - x) = 0,\ y^{\mathrm{T}}(B_2^{\mathrm{T}} \lambda - c_2) = 0,\ y \geqslant 0,\ \lambda \geqslant 0\}.$$

Кроме того, критериальная функции задачи (5) *не ограничена снизу тогда и только тогда, когда не ограничена снизу критериальная функция задачи* (8).

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Phi(u,x)$, определенную в (3) как оптимальное значение целевой функции задачи линейного программирования. Ограничение данной задачи на оптимальность стратегии последователя $y^* \in Y^*(u,x)$ может быть заменено на необходимые и достаточные условия оптимальности решения задачи линейного программирования [32]. Вектор $y^* \geqslant 0$ является оптимальным в задаче (2) тогда и только тогда, когда существует вектор $\lambda \in \mathbb{R}^m$ такой, что

$$A_2u + B_2y^* \geqslant x, \quad B_2^{\mathrm{T}}\lambda \leqslant c_2, \tag{10}$$

$$\lambda^{\mathrm{T}}(A_2u + B_2y^* - x) = 0, \quad y^{*\mathrm{T}}(B_2^{\mathrm{T}}\lambda - c_2) = 0, \quad \lambda \geqslant 0. \tag{11}$$

Заметим, что $Y^*(u,x) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\Lambda(u,x) \neq \varnothing$. Поэтому $\Phi(u,x) = \min\limits_{(y,\lambda)\in\Lambda(u,x)} f^{\mathrm{T}}y$, если $\Lambda(u,x) \neq \varnothing$. Если $Y^*(u,x) = \varnothing$ (что равносильно $\Lambda(u,x) = \varnothing$), то не существует вектора λ, удовлетворяющего свойствам (10), (11), и $\Phi(u,x) = +\infty$. Таким образом, $\Phi(u,x)$ может быть определено как оптимальное значение целевой функции задачи (9). Значит, задачи (5) и (8) имеют одинаковые целевые функции и ограничения. Поэтому утверждение теоремы 3 выполнено. ■

Задача (8) является двухэтапной задачей стохастического программирования с равновесными ограничениями (11) и квантильным критерием. Доказанная теорема показывает, что задачи класса двухуровневых задач стохастического линейного программирования с квантильным критерием могут быть сведены к задачам класса двухэтапных задач стохастического программирования с квантильным критерием.

6. Случай дискретного распределения случайного вектора

Пусть случайный вектор X имеет дискретное распределение с конечным числом реализаций x^ν, $\nu = \overline{1,N}$. Вероятности реализаций составляют

$$p_\nu \triangleq \mathbf{P}\{X = x^\nu\}, \quad p_\nu > 0, \quad \nu = \overline{1,N}.$$

Будем считать, что выполнены условия существования решения задачи (5) и существования решения задачи (2) для всех $(u,x) \in U \times \mathcal{X}$.

Обозначим оптимальное решение задачи (8) через u^*, оптимальное значение y в задаче (9) при фиксированных (u,x) обозначим $y^*(u,x)$. Соответствующее значение вектора λ обозначим $\lambda^*(u,x,y)$.

Задача (8) с помощью метода, предложенного в [27], может быть сведена к смешанной задаче математического программирования. Пусть известна оценка снизу γ оптимального значения критериальной функции задачи (8):

$$\gamma \leqslant c_1^{\mathrm{T}}u^* + \Phi_\alpha(u^*).$$

Предположим также, что известны оценки $\Gamma(x)$ такие, что неравенство

$$\Gamma(x) \geqslant c_1^{\mathrm{T}} u^* + f^{\mathrm{T}} y^*(u^*, x)$$

выполнено для всех оптимальных u^* и $x \in \mathcal{X}$. Тогда задача (8) эквивалентна задаче

$$c_1^{\mathrm{T}} u + \varphi \to \min_{\varphi \in \mathbb{R},\, u \in U, y^1, y^2, \ldots, y^N \in \mathbb{R}^k,\, \lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^N \in \mathbb{R}^m,\, \delta \in \{0,1\}^N} \tag{12}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered}
f^{\mathrm{T}} y^\nu - \varphi \leqslant (\Gamma(x^\nu) - \gamma)(1 - \delta_\nu), \quad \nu = \overline{1, N}; \\
A_2 u + B_2 y^\nu \geqslant x^\nu, \quad \nu = \overline{1, N}; \\
B_2^{\mathrm{T}} \lambda^\nu \leqslant c_2, \quad \nu = \overline{1, N}; \\
\lambda^{\nu\mathrm{T}} (A_2 u + B_2 y^\nu - x^\nu) = 0, \quad \nu = \overline{1, N}; \\
y^{\nu\mathrm{T}} (B_2^{\mathrm{T}} \lambda^\nu - c_2) = 0, \quad \nu = \overline{1, N}; \\
y^\nu \geqslant 0, \quad \lambda^\nu \geqslant 0, \quad \nu = \overline{1, N}; \\
\sum_{\nu=1}^{N} \delta_\nu p_\nu \geqslant \alpha.
\end{gathered}$$

Эквивалентность здесь понимается в том смысле, что оптимальное значение u в задаче (12) является оптимальным значением u в задаче (8) и любое оптимальное значение u^* переменной u задачи (8) является оптимальным значением u в задаче (12). Кроме того, оптимальные значения критериальных функций в задачах (8) и (12) совпадают.

Задача (12) является задачей математического программирования с равновесными ограничениями, которые с помощью метода, предложенного в [11], могут быть заменены линейными ограничениями:

$$\begin{gathered}
\lambda^\nu \leqslant L(e_m - \eta^\nu), \quad A_2 u + B_2 y^\nu - x^\nu \leqslant L \eta^\nu, \\
y^\nu \leqslant L(e_k - \zeta^\nu), \quad c_2 - B_2^{\mathrm{T}} \lambda^\nu \leqslant L \zeta^\nu,
\end{gathered}$$

где $L > 0$ — достаточно большая константа, $\eta^\nu \in \{0,1\}^m$, $\zeta^\nu \in \{0,1\}^k$ — векторы бинарных дополнительных переменных, e_m, e_k — векторы, составленные из единиц, размерностей m и k соответственно.

Таким образом, задача (12) может быть переписана в виде

$$c_1^{\mathrm{T}} u + \varphi \to \min_{\varphi \in \mathbb{R},\, u \in U, y^1, \ldots, y^N \in \mathbb{R}^k,\, \lambda^1, \ldots, \lambda^N \in \mathbb{R}^m,\, \delta \in \{0,1\}^N,\, \eta^1, \ldots, \eta^N,\, \zeta^1, \ldots, \zeta^N} \tag{13}$$

при ограничениях

$$f^{\mathrm{T}}y^{\nu} - \varphi \leqslant (\Gamma(x^{\nu}) - \gamma)(1 - \delta_{\nu}), \quad \nu = \overline{1, N};$$
$$A_2 u + B_2 y^{\nu} \geqslant x^{\nu}, \quad \nu = \overline{1, N};$$
$$B_2^{\mathrm{T}} \lambda^{\nu} \leqslant c_2, \quad \nu = \overline{1, N};$$
$$\lambda^{\nu} \leqslant L(e_m - \eta^{\nu}), \quad A_2 u + B_2 y^{\nu} - x^{\nu} \leqslant L\eta^{\nu}, \quad \nu = \overline{1, N};$$
$$y^{\nu} \leqslant L(e_k - \zeta^{\nu}), \quad c_2 - B_2^{\mathrm{T}} \lambda^{\nu} \leqslant L\zeta^{\nu}, \quad \nu = \overline{1, N};$$
$$y^{\nu} \geqslant 0, \quad \lambda^{\nu} \geqslant 0, \quad \nu = \overline{1, N};$$
$$\sum_{\nu=1}^{N} \delta_{\nu} p_{\nu} \geqslant \alpha,$$
$$\eta^{\nu} \in \{0, 1\}^m, \quad \zeta^{\nu} \in \{0, 1\}^k, \quad \nu = \overline{1, N}.$$

Для обеспечения эквивалентности задач (12) и (13) по переменным u, y^1, $y^2, \ldots, y^N$ необходимо потребовать, чтобы неравенство

$$\begin{aligned} \max \bigl\{ &\|A_2 u^* + B_2 y^*(u^*, x^{\nu}) - x^{\nu}\|_{\infty},\ \|\lambda^*(u^*, x^{\nu}, y^*(u^*, x^{\nu}))\|_{\infty}, \\ &\|B_2^{\mathrm{T}} \lambda^*(u^*, x^{\nu}, y^*(u^*, x^{\nu})) - c_2\|_{\infty},\ \|y^*(u^*, x^{\nu})\|_{\infty} \bigr\} \leqslant L \end{aligned} \tag{14}$$

было выполнено для всех $\nu = \overline{1, N}$ и оптимальных решений u^* и $y^*(u^*, x^{\nu})$. Если значение $\lambda^*(u^*, x^{\nu}, y^*(u^*, x^{\nu}))$ определено неоднозначно при фиксированных u^* и $y^*(u^*, x^{\nu})$, то в неравенстве (14) можно взять любое его значение. Здесь $\|\cdot\|_{\infty}$ — ∞-норма вектора.

7. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим следующие исходные данные:

$$c_1 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad f = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 1{,}44 & 0{,}4 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 0{,}36 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} 1{,}1 & 1{,}5 \\ 3 & 2{,}5 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0{,}875 & 1{,}6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть случайный вектор X имеет 16 равновероятных реализаций, вычисляемых по формуле $x^{\nu} = \left(25\left(\left[\frac{\nu-1}{4}\right] + 1\right), 25\left(\nu - 4\left[\frac{\nu-1}{4}\right]\right)\right)^{\mathrm{T}}$, $\nu = \overline{1, 16}$, где квадратные скобки используются для обозначения целой части числа.

Задача (13) была решена на компьютере AMD A6-3500 APU, 2,10 ГГц, 4 ГБ ОЗУ с помощью программы *LPSolve*. Результаты для различных уровней α отображены в табл. 1.

Был проведен эксперимент по увеличению реализаций случайного вектора с 16 до 25. Задача (13) была решена с теми же исходными данными, но другим распределением случайного вектора.

Таблица 1. Результаты решения задачи для 16 реализаций

α	u^*	φ^*	$c_1^{\mathrm{T}} u^* + \varphi^*$	время счета, с
0,5	$(2{,}8553; 4{,}8553)^{\mathrm{T}}$	31,7184	33,5460	13,306
0,8	$(2{,}0812; 4{,}0812)^{\mathrm{T}}$	59,9301	61,3707	26,619
0,9	$(4{,}0000; 6{,}0000)^{\mathrm{T}}$	77,9400	80,3400	2,533
0,99	$(4{,}0000; 6{,}0000)^{\mathrm{T}}$	77,9400	80,3400	0,523

Таблица 2. Результаты решения задачи для 25 реализаций

α	u^*	φ^*	$c_1^{\mathrm{T}} u^* + \varphi^*$	время счета, с
0,5	$(2{,}7684; 4{,}7684)^{\mathrm{T}}$	31,9096	33,6938	14318,019
0,8	$(4{,}0000; 6{,}0000)^{\mathrm{T}}$	59,9400	62,3400	508,554
0,9	$(4{,}0000; 6{,}0000)^{\mathrm{T}}$	77,9400	80,3400	259,969
0,99	$(4{,}0000; 6{,}0000)^{\mathrm{T}}$	77,9400	80,3400	8,392

Пусть теперь случайный вектор X имеет 25 равновероятных реализаций, вычисляемых по формуле $x^\nu = \left(20\left(\left[\frac{\nu-1}{5}\right]+1\right), 20\left(\nu - 5\left[\frac{\nu-1}{5}\right]\right)\right)^{\mathrm{T}}$, $\nu = \overline{1,25}$. Результаты решения задачи отображены в табл. 2.

Из примеров видно, что в случае дискретного распределения случайного вектора с количеством реализаций не более 25 задача может быть успешно решена за приемлемое время. Однако при уровне α, близком к 0,5, решение задачи требует значительно бóльших вычислительных затрат.

8. Заключение

В работе рассмотрен новый класс задач — двухуровневые задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием. Показано, что рассматриваемая двухуровневая задача может быть сведена к двухэтапной задаче стохастического программирования с равновесными ограничениями и квантильным критерием. Следует заметить, что к настоящему времени не существует эффективных алгоритмов решения нелинейных двухэтапных задач, поэтому эквивалентная задача требует дальнейшего изучения. В данной работе изучен случай дискретного распределения вектора случайных параметров. Показано, что задача может быть сведена к смешанной задаче линейного программирования большой размерности. Численные эксперименты показали, что при небольшом количестве реализаций вектора случайных параметров задача может быть решена с помощью стандартных программных средств. Однако для решения задачи при большем количестве реализаций требуется разработка специальных алгоритмов, что является направлением дальнейших исследований.

Автор выражает благодарность заведующему кафедрой теории вероятностей профессору Кибзуну А.И. и научному руководителю доценту Наумову А.В. за предложенные идеи и ценные замечания.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим функцию оптимального значения критерия задачи последователя (2)

$$\psi(u,x) \triangleq \min_y \{c_2^{\mathrm{T}} y \mid A_2 u + B_2 y \geqslant x,\ y \geqslant 0\}.$$

Из теории линейного программирования [33] известно, что функция $\psi(u,x)$ является выпуклой полиэдральной функцией на множестве W. При этом либо $\psi(u,x) \equiv -\infty$, либо $\psi(u,x) > -\infty$ для всех $(u,x) \in W$. Следовательно, если выполнено условие $Y^*(\hat{u},\hat{x}) \neq \varnothing$ для некоторой пары $(\hat{u},\hat{x})$, то $Y^*(u,x) \neq \varnothing$ для всех $(u,x) \in W$. С помощью функции $\psi(u,x)$ функция потерь лидера (3) может быть переписана в следующем виде [3, с. 52]:

$$\text{(П.1)}\quad \Phi(u,x) = \begin{cases} \min\limits_{y^*} \{f^{\mathrm{T}} y^* \mid c_2^{\mathrm{T}} y^* \leqslant \psi(u,x),\ y^* \in Y(u,x)\}, & \text{если } Y^*(u,x) \neq \varnothing, \\ +\infty, & \text{если } Y^*(u,x) = \varnothing, \end{cases}$$

Если $\psi(u,x) \equiv -\infty$, то $\Phi(u,x) \equiv +\infty$. Теперь рассмотрим случай, когда $Y^*(u,x) \neq \varnothing$ для всех $(u,x) \in W$. Тогда либо $\Phi(u,x) \equiv -\infty$ для всех $(u,x) \in W$, либо $\Phi(u,x) > -\infty$ для всех $(u,x) \in W$. Если $\Phi(u,x) > -\infty$, то при фиксированных $(u,x) \in W$ функция $\Phi(u,x)$ является оптимальным значением целевой функции задачи линейного программирования, решение которой существует. Поэтому $\Phi(u,x)$ является оптимальным значением целевой функции двойственной задачи линейного программирования

$$\text{(П.2)}\qquad -\psi(u,x)\lambda_0 + (x - A_2 u)^{\mathrm{T}} \lambda \to \max_{\lambda_0 \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R}^m}$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -c_2 & B_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda \end{pmatrix} \leqslant f,$$
$$\lambda_0, \lambda \geqslant 0.$$

Как известно, решение задачи линейного программирования достигается в одной из вершин многогранного множества, описываемого системой ограничений задачи. Пусть $\{\tilde{\lambda}^j\}_{j=1}^J$ — множество вершин многогранного множества $\tilde{V} \triangleq \{\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \begin{pmatrix} -c_2 \mid B_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \tilde{\lambda} \leqslant f,\ \tilde{\lambda} \geqslant 0\}$. Тогда функция (П.1) может быть записана в виде

$$\Phi(u,x) = \max_{j=\overline{1,J}} \left\{ \begin{pmatrix} -\psi(u,x) & (x - A_2 u)^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \tilde{\lambda}^j \right\}.$$

Таким образом, функция $\Phi(\cdot)$ является непрерывной на W, как максимум непрерывных функций.

Докажем липшицевость $\Phi(\cdot)$. Функция $\psi(\cdot)$ является выпуклой полиэдральной функцией. Это значит, что множество W можно разбить на конечное количество подмножеств W_i, в каждом из которых $\psi(\cdot)$ является линейной функцией, поэтому функция $\Phi(\cdot)$ представляет собой максимум конечного числа линейных функций на каждом множестве W_i. Поэтому $\Phi(\cdot)$ липшицева на каждом множестве W_i, а, значит, в силу непрерывности и на всем множестве W. ■

Доказательство следствия 1. Условие $0^+\tilde{V} = \{\bar{0}\}$ влечет, что $0^+V \triangleq \{\lambda \in \mathbb{R}^m \mid B_2^{\mathrm{T}}\lambda \leqslant 0\} = \{\bar{0}\}$. Из $0^+V = \{\bar{0}\}$, $V_1 \neq \varnothing$ следует [32], что множество переменных в двойственной задаче по отношению к задаче последователя ограничено и непусто. Следовательно, решение двойственной задачи, а значит, и прямой задачи последователя существует при любых значениях пары (u, x). Поэтому $W = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и $|\psi(u, x)| < \infty$. При выполнении условий $0^+\tilde{V} = \{\bar{0}\}$ и $\tilde{V} \neq \varnothing$ множество допустимых переменных в задаче (П.2) является ограниченным, а значит, решение двойственной задачи (П.2), как и прямой задачи (П.1), существует и конечно при любых (u, x). Липшицевость функции $\Phi(\cdot)$ на $W = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ обеспечивает теорема 1. ■

Доказательство следствия 2. Из условий $0^+V = \{\bar{0}\}$ и $V_1 \neq \varnothing$ следует, что решение задачи последователя существует и конечно при любых значениях (u, x), поэтому $W = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Условия $0^+V = \{\bar{0}\}$ и $V_2 \neq \varnothing$ влекут, что решение задачи $\min\left\{f^{\mathrm{T}}y \mid y \in Y(u, x)\right\}$ существует, поэтому решение задачи $\Phi(u, x) = \min\{f^{\mathrm{T}}y^* \mid y^* \in Y(u, x),\ c_2^{\mathrm{T}}y^* \leqslant \psi(u, x)\}$ при условиях сформулированного следствия 2 также существует и конечно при любых значения $(u, x) \in W = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Липшицевость функции $\Phi(\cdot)$ на $W = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ обеспечивает теорема 1. ■

Доказательство теоремы 2. Из доказательства теоремы 2.5 из [19] следует, что при равномерной непрерывности (а значит, и липшицевости) функции потерь $\Phi(u, x)$ на $U' \times \mathcal{X}$ функция квантили $\Phi_\alpha(\cdot)$ является непрерывной на U', где U' — некоторое подмножество $\mathbb{R}^n$.

Так как $|\Phi(u, x)| < +\infty$ для всех $(u, x) \in W$, то $\Phi(u, x)$ является липшицевой на W. В качестве множества U' рассмотрим множество K_1. Заметим, что $K_1 \times \mathcal{X} \subset W$. Поэтому $|\Phi(u, x)| < +\infty$ для всех $(u, x) \in K_1 \times \mathcal{X}$, и $\Phi(\cdot)$ — липшицева на $K_1 \times \mathcal{X}$. Значит, функция квантили $\Phi_\alpha(\cdot)$ является непрерывной на K_1. ■

Доказательство следствия 3. Из следствия 1 или следствия 2 следует, что $W = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. По теореме 2 функция $\Phi_\alpha(\cdot)$ обладает свойством липшицевости на $\mathbb{R}^n$. Из условий $U \neq \varnothing$ и $0^+U = \{\bar{0}\}$ следует [32], что множество U является замкнутым и ограниченным. Согласно теореме Вейерштрасса минимум непрерывной функции $c_1 u + \Phi_\alpha(u)$ достигается на замкнутом и ограниченном множестве U. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stackelberg H.F.* Marktform und Gleichgewicht. Berlin (Germany): Springer-Verlag, 1934.
2. *Bard J.* Practical Bilevel Optimization. Algorithms and Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998.
3. *Dempe S.* Foundations of Bilevel Programming. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.
4. *Vicente L.N., Calamai P.H.* Bilevel and Multilevel Programming. A Bibliography Review // J. Global Optim. 1994. V. 5. No. 3. P. 291–306.
5. *Dempe S.* Annotated Bibliography on Bilevel Programming and Mathematical Programs with Equilibrium Constraints // Optimization. 2003. V. 52. No. 3. P. 333–359.

6. *Dempe S.* Bilevel Programming — A Survey // Preprint TU Bergakademie Freiberg Nr. 2003-11. Fakultät für Mathematik und Informatik, 2003.
7. *Yang H., Bell M.G.H.* Transportation Bilevel Programming Problems. Recent Methodological Advances // Transportation Res. Part B. 2001. V. 35. No. 1. P. 1–4.
8. *Abou-Kandil H., Bertrand P.* Government — Private Sector Relations as a Stackelberg Game. A Degenerate Case // J. Econom. Dynam. Control. 1987. V. 11. No. 4. P. 513–517.
9. *Береснев В.Л.* Верхние оценки для целевых функций дискретных задач конкурентного размещения предприятий // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2008. Т. 15. № 4. С. 3–24.

   Beresnev V.L. Upper Bounds for Objective Functions of Discrete Competitive Facility Location Problems // J. Appl. Industrial Mathematics. 2009. V. 3. No. 4. P. 419–432.
10. *Nicholls M.G.* Aluminum Production Modeling — A Nonlinear Bilevel Programming Approach // Oper. Research. 1995. V. 43. No. 2. P. 208–218.
11. *Fortuny-Amat J., McCarl B.* A Representation and Economic Interpretation of a Two-Level Programming Problem // J. Oper. Res. Soc. 1981. V. 32. No. 9. P. 783–792.
12. *Jia F., Yang F., Wang S.-Y.* Sensitivity Analysis in Bilevel Linear Programming // Syst. Sci. Mathemat. Sci. 1998. V. 11. No. 4. P. 359–366.
13. *Стрекаловский А.С., Орлов А.В., Малышев А.В.* Численное решение одного класса задач двухуровневого программирования // Сиб. журн. вычислит. мат. 2010. Т. 13. № 2. С. 201–212.

    Strekalovsky A.S., Orlov A.V., Malyshev A.V. Numerical Solution of a Class of Bilevel Programming Problems // Numerical Anal. Appl. 2010. V. 3. No. 2. P. 165–173.
14. *Груздева Т.В., Петрова Е.Г.* Численное решение линейной двухуровневой задачи // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. 2010. Т. 50. № 10. С. 1715–1726.

    Gruzdeva T.V., Petrova E.G. Numerical Solution of a Linear Bilevel Problem // Comput. Math. Mathem. Physics. 2010. V. 50. No. 10. P. 1631–1641.
15. *Strekalovsky A.S., Orlov A.V., Malyshev A.V.* On Computational Search for Optimistic Solutions in Bilevel Problems // J. Global Optim. 2010. V. 48. No. 1. P. 159–172.
16. *Patriksson M., Wynter L.* Stochastic Nonlinear Bilevel Programming // Technical report. PRISM. Université de Versailles - Saint Quentin en Yvelines, Versailles, France, 1997.
17. *Christiansen S., Patriksson M., Wynter L.* Stochastic Bilevel Programming in Structural Optimization // Structural Multidisciplinary Optim. 2001. V. 21. No. 5. P. 361–371.
18. *Werner A.S.* Bilevel Stochastic Programming Problems. Analysis and Application to Telecommunications // Dr. ing. thesis, 2004. Section of Investment, Finance and Accounting. Dept. of Industrial Economics and Technology Management, NUST, Norway.
19. *Кибзун А.И., Кан Ю.С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
20. *Chen A., Kim J., Zhong Zh., et al.* Alpha Reliable Network Design Problem // Transportation Res. Record. J. Tranportation Res. Board. 2007. No. 2029. P. 49–57.

21. *Katagiri H., Uno T., Kato K., et al.* Random Fuzzy Bilevel Linear Programming through Possibility-Based Value at Risk Model // Int. J. Machine Learning Cybernet. Preprint. October 2012.

22. *Кибзун А.И., Наумов А.В., Иванов С.В.* Двухуровневая задача оптимизации деятельности железнодорожного транспортного узла // Управление большими системами. 2012. № 38. С. 140–160.

23. *Наумов А.В., Иванов С.В.* Задача распределения инвестиций в развитие отраслей наземного космического комплекса // Электр. журн. «Труды МАИ». 2012. № 50.

24. *Norkin V.* On Mixed Integer Reformulations of Monotonic Probabilistic Programming Problems with Discrete Distributions. http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2010/05/2619.html. 2010.

25. *Иванов С.В., Наумов А.В.* Алгоритм оптимизации квантильного критерия для полиэдральной функции потерь и дискретного распределения случайных параметров // АиТ. 2012. № 1. С. 116–129.

    Ivanov S.V., Naumov A.V. Algorithm to Optimize the Quantile Criterion for the Polyhedral Loss Function and Discrete Distribution of Random Parameters // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 1. P. 105–117.

26. *Кибзун А.И., Наумов А.В., Норкин В.И.* О сведении задачи квантильной оптимизации с дискретным распределением случайных данных к задачам смешанного целочисленного программирования // АиТ. 2013. № 6. С. 66–86.

    Kibzun A.I., Naumov A.V., Norkin V.I. On Reducing a Quantile Optimization Problem with Discrete Distribution to a Mixed Integer Programming Problem // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 6. P. 951–967.

27. *Кибзун А.И., Норкин В.И., Наумов А.В.* Сведение задач двухэтапной вероятностной оптимизации с дискретным распределением случайных данных // Тр. науч. семинара в сбор. тр. «Стохастическое программирование и его приложения» / Под ред. П.С. Кнопова, В.И. Зоркальцева, Я.М. Иваньо и др. Иркутск: Ин-т систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, 2012. С. 76–104.

28. *Kall P., Wallace S.W.* Stochastic Programming. Chichester: Wiley, 1994.

29. *Birge J., Louveaux F.* Introduction to Stochastic Programming. N.Y.: Springer-Verlag, 1997.

30. *Кибзун А.И., Наумов А.В.* Двухэтапные задачи квантильного линейного программирования // АиТ. 1995. № 1. С. 83–93. *Kibzun A.I., Naumov A.V.* Two-Stage Problems of Quantile Linear Programming // Autom. Remote Control. 1995. V. 56. No. 1. P. 68–76.

31. *Наумов А.В., Бобылев И.М.* О двухэтапной задаче стохастического линейного программирования с квантильным критерием и дискретным распределением случайных параметров // АиТ. 2012. № 2. С. 61–72.

    Naumov A.V., Bobylev I.M. On the Two-Stage Problem of Linear Stochastic Programming with Quantile Criterion and Discrete Distribution of the Random Parameters // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 2. P. 265–275.

32. *Еремин И.И.* Линейная оптимизация и системы линейных неравенств. М.: Академия, 2007.

33. *Beer K.* Lösung großer linearer Optimierungsaufgaben. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1977.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 02.04.2013