МАРТ 1983 г., ТОМ XIX, № 3

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.1

Н. И. ВУЛПЕ

АФФИННО-ИНВАРИАНТНЫЕ УСЛОВИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО РАЗЛИЧЕНИЯ КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ЦЕНТРА

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt}=a^j_\alpha x^\alpha+a^j_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta \quad (j,\ \alpha,\ \beta=1,\ 2), \tag{1}$$

где тензор $a^j_{\alpha\beta}$ симметричен по нижним индексам, по которым производится полное свертывание.

Вопросами распределения особых точек на плоскости и поведения в круге Пуанкаре траекторий этой системы при наличии в начале координат особой точки типа «центр» занимались многие авторы (см., например, [1—5]). Наиболее полное исследование дано в [3], где приведены 32 возможные топологически различные качественные картины поведения траекторий системы (1) в круге Пуанкаре в указанном случае, однако здесь (как будет показано ниже) одна возможность упущена, а другая не реализуется.

Две системы типа (1) назовем топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм их кругов Пуанкаре, переводящий траектории одной системы в траектории другой системы.

В настоящей заметке найдены аффинно-инвариантные полуалгебраические условия топологического различения систем вида (1) при наличии центра в начале координат. Используются некоторые из найденных в [6] аффинных инвариантов системы (1), а именно: $I_1=a^\alpha_\alpha$, $I_2=a^\alpha_\beta a^\beta_\alpha$, $I_3=a^\alpha_p a^\beta_{\alpha q} a^\gamma_{\beta\gamma}\varepsilon^{pq}$, $I_4=a^\alpha_p a^\beta_{\beta q} a^\gamma_{\alpha\gamma}\varepsilon^{pq}$, $I_5=a^\alpha_p a^\beta_{\gamma q} a^\gamma_{\alpha\beta}\varepsilon^{pq}$, $I_6=a^\alpha_p a^\beta_\gamma a^\gamma_{\alpha q} a^\delta_{\beta\delta}\varepsilon^{pq}$, $I_7=a^\alpha_{pr} a^\beta_{\alpha q} a^\gamma_{\beta s} a^\delta_{\gamma\delta}\varepsilon^{pq}\varepsilon^{rs}$, $I_8=a^\alpha_{pr} a^\beta_{\alpha q} a^\gamma_{\delta s} a^\delta_{\beta\gamma}\varepsilon^{pq}\varepsilon^{rs}$, $I_9=a^\alpha_{pr} a^\beta_{\beta q} a^\gamma_{\gamma s} a^\delta_{\alpha\delta}\varepsilon^{pq}\varepsilon^{rs}$, $I_{10}=a^\alpha_p a^\beta_\delta a^\gamma_\nu a^\delta_{\alpha q} a^\nu_{\beta\gamma}\varepsilon^{pq}$, $I_{13}=a^\alpha_p a^\beta_{qr} a^\gamma_{\gamma s} a^\delta_{\alpha\beta} a^\nu_{\delta\nu}\varepsilon^{pq}\varepsilon^{rs}$, $I_{16}=a^\alpha_p a^\beta_r a^\gamma_\delta a^\delta_{\alpha q} a^\nu_{\beta s} a^\tau_{\gamma\mu} a^\mu_{\nu\tau}\varepsilon^{pq}\varepsilon^{rs}$ $(\varepsilon^{11}=\varepsilon^{22}=0,\ \varepsilon^{12}=-\varepsilon^{21}=1)$.

В работе [6, с. 150] доказана

Лемма 1. *Для наличия в начале координат центра системы (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $I_1=I_6=0$, $I_2<0$ и хотя бы одна из следующих трех серий условий: 1) $I_{13}=0$; 2) $I_3=0$; 3) $5I_3-2I_4=13I_3-10I_5=0$.*

Там же показано, что при $I_1=0$, $I_2<0$ система (1) аффинным преобразованием координат x^1, x^2 и заменой времени $t_1=kt$ $(k>0)$ приводится к виду $(x\equiv x^1,\ y\equiv x^2)$

$$\frac{dx}{dt}=y+a^1_{11}x^2+2a^1_{12}xy+a^1_{22}y^2,\quad \frac{dy}{dt}=-x+a^2_{11}x^2-2a^1_{11}xy+a^2_{22}y^2. \tag{2}$$

Для системы (2)

$$\begin{gathered} I_3=-(a^1_{12}+a^2_{22})(a^2_{11}+a^2_{22}),\quad I_4=-(a^1_{12}+a^2_{22})^2,\\ -I_5=2(a^1_{11})^2-2a^1_{11}a^1_{22}+(a^1_{12})^2+2a^1_{12}a^2_{11}+(a^2_{22})^2,\\ I_6=(a^1_{11}+a^1_{22})(a^1_{12}+a^2_{22}),\quad I_9=a^2_{11}(a^1_{12}+a^2_{22})^3,\quad I_{13}=a^1_{11}(a^1_{12}+a^2_{22})^3. \end{gathered} \tag{3}$$

1. Начнем исследование с частного случая наличия центра $I_1=I_4=0$, $I_2<0$, который, как показывают формулы (3), содержится в 1)—3).

Обозначим $\alpha=I_2^2I_8-28I_2I_5^2+16I_5I_{10}$.

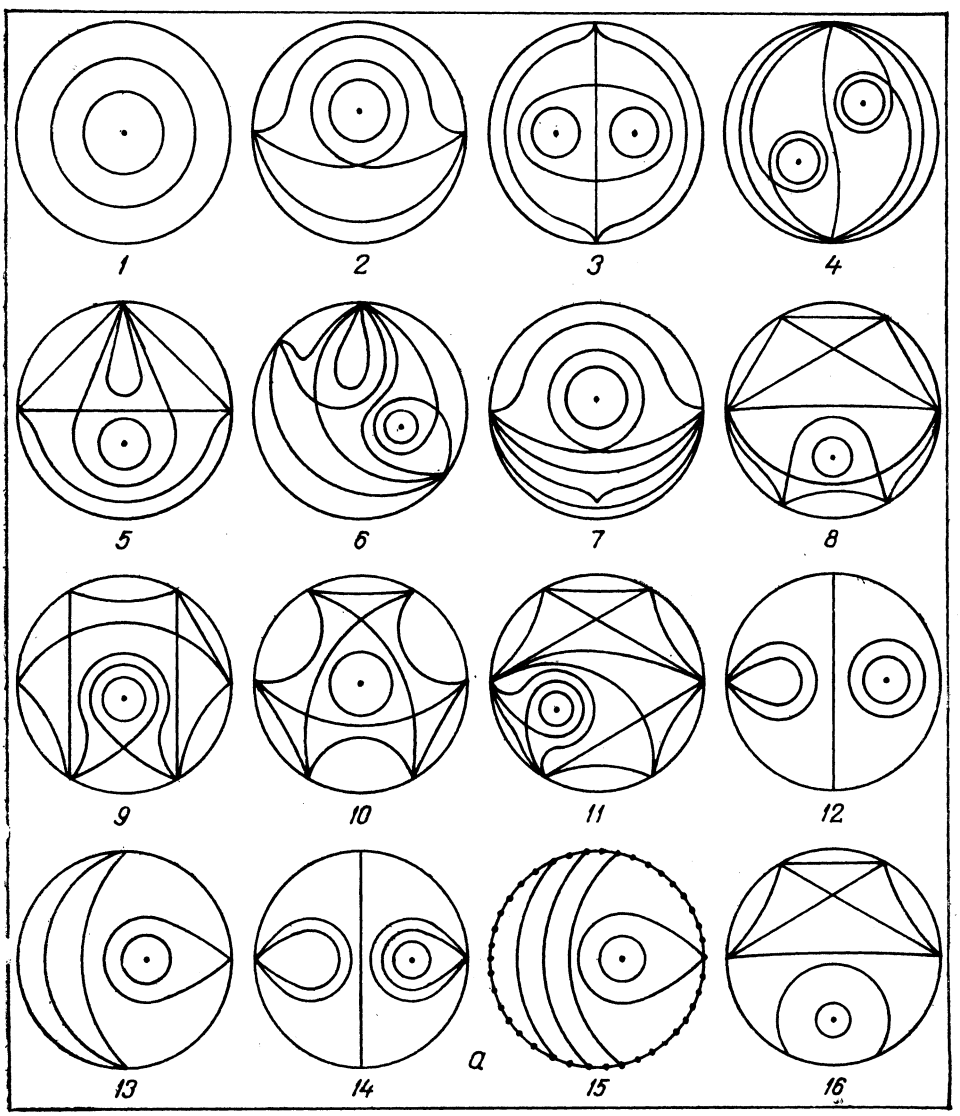
Лемма 2. *Пусть $I_1=I_4=0$, $I_2<0$. Тогда качественные картины системы (1) исчерпываются картинкой 1 (рисунок, а) при $I_5=I_{10}=0$; 2 — при $\alpha<0$ и при $\alpha=I_{16}=0$, $I_{10}\neq0$; 3, 4 — при $\alpha>0$, $I_8>0$ и соответственно $I_{16}=0$, $I_{16}\neq0$; 5, 6 — при $\alpha>0$, $I_8=0$ и соответственно $I_{16}=0$, $I_{16}\neq0$; 7 — при $\alpha=0$, $I_{16}\neq0$; 8, 9 — при $I_8<0$, $I_{10}\neq0$, $I_{16}=0$ и соответственно $I_2I_5(I_2I_5+2I_{10})>4I_{10}^2+I_2^3I_8$, $I_2I_5(I_2I_5+2I_{10})<4I_{10}^2+I_2^3I_8$; 10 — при $I_5\neq0$, $I_{10}=0$; 11 — при $I_8<0$, $I_{16}\neq0$.*

Доказательство. При выполнении условий $I_1=I_4=0$, $I_2<0$ поворотом координатных осей и преобразованием подобия систему (2) можно привести к виду

$$\frac{dx}{dt}=y+2cxy+by^2,\quad \frac{dy}{dt}=-(x+ax^2+cy^2) \tag{4}$$

с $c=0$ или $c=1/2$. Для системы (4)

$$I_2=-2,\ I_5=2c(a-c),\ I_8=2a(4c^3+ab^2),\ I_{10}=-b^2-(a+c)^2,$$
$$I_{16}=b(3ac^2-a^3+ab^2+2c^3), \tag{5}$$

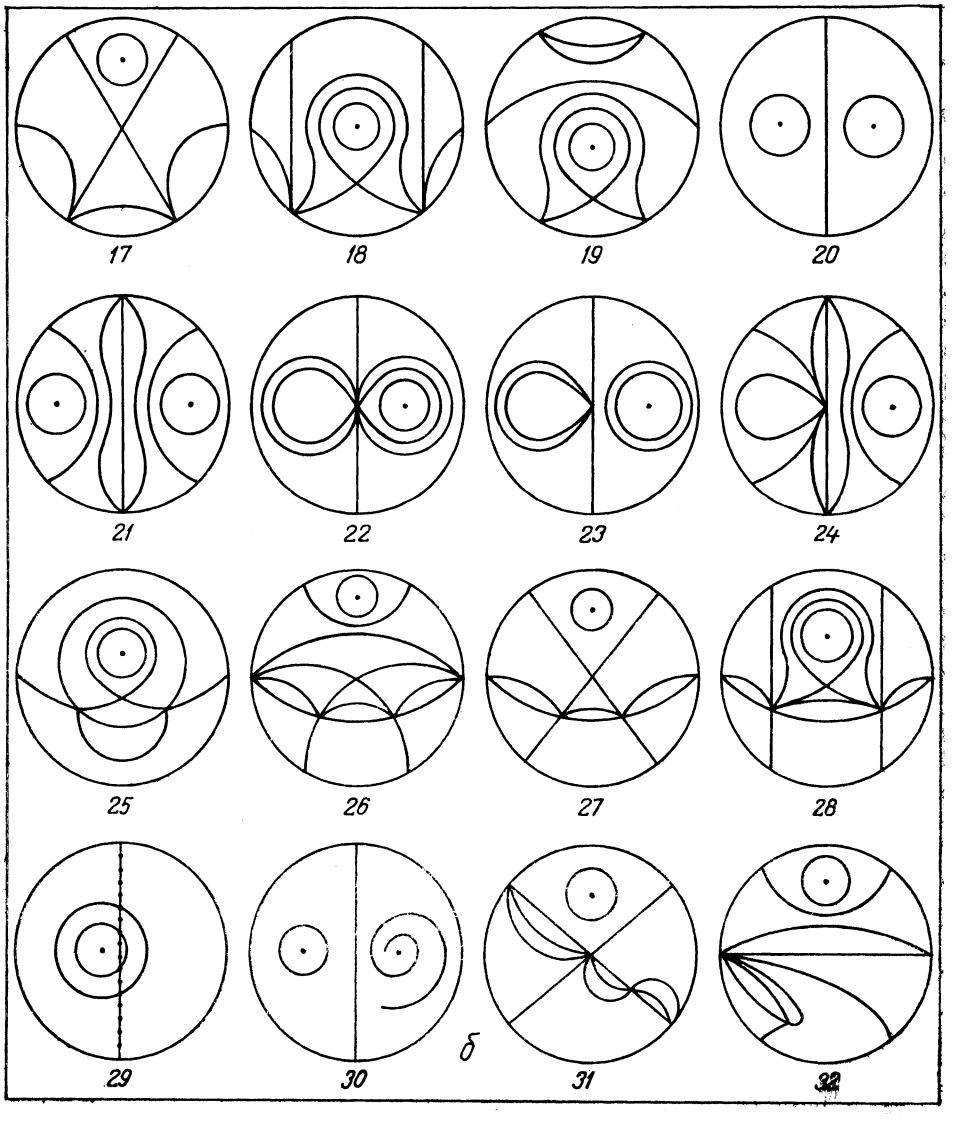


а общим интегралом соответствующего ей уравнения будет

$$2ax^3+2by^3+6cxy^2+3x^2+3y^2=C. \qquad (6)$$

Заметим, что при $c=1/2$ инвариант $\alpha=8(a-1)^2(b^2+2-2a)$.

1) Пусть $\alpha>0$. Если $I_8>0$, то, согласно (5), получим $b^2+2-2a>0$, $a(2ab^2+1)>0$ при $c\neq0$ и $\alpha=4I_8=8a^2b^2>0$ при $c=0$. Как легко установить, в обоих случаях система (4) имеет в конечной части плоскости (КЧП) два центра и два седла, а на бесконечности всего одну точку типа «узел». Учитывая свойство кривых (6) (см., например, [7]) быть связными при наличии по крайней мере двух точек самопересечения, приходим к выводу, что седла системы (4) имеют общую сепаратрису тогда и только тогда, когда $b=0$, $c\neq0$ или $4ab^2=(a-1)(2a+1)^2$, $c\neq0$ или $b^2=a^2$, $c=0$. При этом сепаратрисы, получающиеся при соответствующем значении C из (6), распадаются на пересекающиеся эллипс и прямую. В результате получается картинка *3*. Если же общей сепаратрисы нет, то, изучая уравнение сепаратрис седел системы (4), получаем картинку *4*. Остается заметить, что из (5) имеем $I_{16}=ab(b^2-a^2)$ при $c=0$ и $I_{16}=\frac{b}{4}[4ab^2-(a-1)(2a+1)^2]$ при $c=1/2$. Поэтому условия наличия (отсутствия) общих сепаратрис у седел системы (4) эквивалентны условию $I_{16}=0$ $(I_{16}\neq0)$.



При $I_8=0$ с учетом (5) и $\alpha>0$ получаем $c\neq0$, $a(2ab^2+1)=0$, $b^2+2-2a>0$. В этом случае в КЧП система (4) имеет центр и два седла, а на бесконечности — узел и закрытый седло-узел (по терминологии работы [8]). При этом, учитывая (6), легко показать, что седла системы (4) имеют общую сепаратрису тогда и только тогда, когда $a=b=0$ или $a=-1$, $2b^2=1$. В обоих случаях сепаратрисы распадаются на пересекающиеся прямую и параболу и в результате получается картинка *5*. Заметим, что при $a=0$ инвариант $I_{16}=b/4$, а при $2ab^2+1=0$ (тогда $a<0$) $I_{16}=-b(a+1)(2a-1)^2$. **Следовательно, условия наличия общей** сепаратрисы седел эквивалентны $I_{16}=0$. Если же $I_{16}\neq0$, то с учетом уравнений сепаратрис получим картинку *6*.

Пусть $I_8<0$. Из (5) следует: $c\neq0$, $a<0$, $2ab^2+1>0$. В этом случае система (4) имеет в КЧП центр и три седла, а на бесконечности — три узла. Если при этом $I_{16}\neq0$, из (5) следует $b[4ab^2-(a-1)(2a+1)^2]\neq0$, а тогда с учетом (6) легко убедиться в отсутствии общей сепаратрисы у любых двух седел. Исследуя уравнения сепаратрис с учетом расположения седел на плоскости, получается картинка *11*. Если $I_{16}=0$, $I_{10}\neq0$, то $b[4ab^2-(a-1)(2a+1)^2]=0$, $b^2+\left(a+\frac{1}{2}\right)^2\neq0$, и тогда только два седла имеют общую сепаратрису, причем их сепаратрисы распадаются на пересекающиеся гиперболу и прямую. Исследуя уравнения сепаратрис (6) при соответствующих значениях C, получаем картинку *8* при $b=0$, $a>-1/2$ и при $b\neq0$, $a<-1/2$ и *9* — при $b=0$, $a<-1/2$ и при $b\neq0$, $a>-1/2$. С учетом (5) находим, что $I_2^2I_5^2+2I_2I_5I_{10}-I_2^3I_8-4I_{10}^2$ равно $(2-4a)\left(a+\frac{1}{2}\right)^3$ при $b=0$ и $-\frac{1}{4a^2}(2a-1)^2(2a+1)^3$ при $b\neq0$. Так как $a<0$, то условия наличия картинок *8* и *9* эквивалентны соответственно $I_2I_5(I_2I_5+2I_{10})>I_2^3I_8+4I_{10}^2$ и $I_2I_5(I_2I_5+2I_{10})<I_2^3I_8+4I_{10}^2$. Если же $I_{10}=0$ (тогда $I_{16}=0$), то $b=0$, $a=-1/2$. Из (6) легко заметить, что система (4) имеет три интегральные прямые, пересекающиеся попарно в особых точках типа седла, образуя треугольник, внутри которого находится начало координат, т. е. имеется картинка *10*. Остается заметить, что из $I_8<0$ следует $\alpha>0$, а условия $I_{10}=0$, $I_8<0$ эквивалентны $I_{10}=0$, $I_5\neq0$.

2) Пусть $\alpha=0$. Если при этом $I_{10}=0$, то из (5) следует $a=b=c=0$ и, согласно (6), качественная картина соответствует картинке *1*. При $I_{10}\neq0$, $I_{16}=0$ с учетом (5) получаем $ab=0$, $a^2+b^2\neq0$ при $c=0$ и $a=1$, $b=0$ при $c\neq0$. В обоих случаях система (4) имеет в КЧП центр и седло, а на бесконечности — один узел. С учетом (6) приходим к картинке *2*. Если же $I_{16}\neq0$ (тогда $I_{10}\neq0$), то из (5) следует $bc\neq0$, $(a-1)(b^2+2-2a)=0$. В КЧП система (4) имеет седло, центр и вырожденное седло, причем с учетом (6) седла не имеют общей сепаратрисы. Так как при этом на бесконечности — узел, получается картинка *7*. Остается заметить, что условия $\alpha=I_{10}=0$ эквивалентны условиям $I_5=I_{10}=0$.

3) Рассмотрим, наконец, случай $\alpha<0$. Из (5) следует: $c\neq0$, $b^2+2-2a<0$. В этом случае в КЧП система (4) имеет центр и седло, а на бесконечности — узел, что соответствует картинке *2*. Так как исчерпаны все возможные случаи, лемма 2 доказана.

2. Обозначим $\beta=4I_4^2-3I_2I_9-4I_3I_4$, а при $I_4\neq0$ положим $\gamma=\frac{3}{I_4^2}(2I_3I_4+I_2I_9)$.

Лемма 3. *Пусть $I_1=I_6=I_{13}=0$, $I_2<0$, $I_4\neq0$. Тогда качественные картины системы (1) исчерпываются картинкой 2 при $\beta\gamma\geqslant0$, $\gamma I_9>0$, $I_9(4-\gamma)\leqslant0$ и при $\gamma=0$, $\beta<0$; 3 — при $\beta\gamma<0$, $\gamma I_9>0$; 5 — при $\gamma(\gamma-6)>0$, $I_9=0$; 8, 9, 10 — при $\gamma(\gamma-6)>0$, $\gamma I_9<0$ и соответственно $\gamma I_3I_4>0$, $\gamma I_3I_4<0$, $I_3=0$; 12—15 — при $I_9=0$ и соответственно $0\leqslant\gamma\leqslant3$, $4<\gamma\leqslant6$, $3<\gamma<4$, $\gamma=4$; 16 — при $\gamma=6$, $I_3I_4>0$, $I_9<0$; 17 (см. рисунок, б) — при*

$\gamma=6$, $I_3=0$; *18 — при* $\gamma=6$, $I_3I_4<0$; *19 — при* $I_9>0$, $0\leqslant\gamma<4$; *20, 21 — при* $\beta>0$, $I_9<0$ *и соответственно* $0\leqslant\gamma<4$, $\gamma>4$; *22, 23, 24 — при* $\beta=0$ *и соответственно* $0<\gamma<3$, $3\leqslant\gamma\leqslant4$, $4<\gamma<6$; *25 — при* $\beta<0$, $0<\gamma\leqslant4$; *26, 27, 28 — при* $\beta<0$, $4<\gamma<6$ *и соответственно* $I_3I_4>0$, $I_3=0$, $I_3I_4<0$; *29 — при* $\beta=\gamma=0$.

Доказательство. Пусть $I_1=I_6=I_{13}=0$, $I_2<0$, $I_4\neq0$. Тогда из (3) следует $a^1_{11}=a^1_{22}=0$, $a^1_{12}+a^2_{22}\neq0$, причем всегда можно считать $a^1_{12}+a^2_{22}=1$, так как этого можно добиться преобразованием

$$x_1=(a^1_{12}+a^2_{22})x,\quad y_1=(a^1_{12}+a^2_{22})y. \tag{7}$$

При этом система (2) примет вид

$$\frac{dx}{dt}=y+2(1-e)xy,\quad \frac{dy}{dt}=-x+dx^2+ey^2. \tag{8}$$

Для нее

$$I_3=-(d+e),\quad I_4=-1,\quad I_9=d,\quad \beta=2d+4-4e,\quad \gamma=6e. \tag{9}$$

Заметим, что соответствующее системе (8) уравнение является уравнением Бернулли, и тогда общий интеграл системы (8) при $e(e-1)(2e-1)(3e-2)\neq0$ имеет вид

$$y^2=\frac{dx^2}{2-3e}+\frac{3e-2-d}{2e(3e-2)(2e-1)}(2ex+1)+C|1+2(1-e)x|^{\frac{e}{1-e}}. \tag{10}$$

При $e=0$, 1/2, 2/3, 1 общими интегралами системы (8) будут соответственно выражения

$$y^2=\frac{d}{2}x^2-\frac{d+2}{2}x+\frac{d+2}{4}\ln|2x+1|+C, \tag{11}$$

$$y^2=2d(x+1)^2-(4d+2)(x+1)\ln|x+1|-2(d+1)+C(x+1), \tag{12}$$

$$y^2=\frac{3d}{4}(2x+3)^2\ln|2x+3|+\frac{3}{2}(3d+1)(2x+3)-$$

$$-\frac{9}{8}(3d+2)+C(2x+3)^2, \tag{13}$$

$$y^2=-dx^2+\frac{1}{2}(2x+1)(1-d)+Ce^{2x}. \tag{14}$$

1) Пусть $\beta\gamma>0$. При $\gamma I_9>0$ из (9) следует: $e(d+2-2e)>0$, $de>0$ и система (8) имеет в КЧП центр и седло. Если при этом $I_9(4-\gamma)\leqslant0$, то с учетом (9) находим $d(2-3e)\leqslant0$, и тогда система (8) имеет на бесконечности одну особую точку (узел). С учетом (10), (13) и (14) получается картинка *2*. Если же $I_9(4-\gamma)>0$, то на бесконечности — седло и два узла, и с учетом (10) и (12) приходим к картинке *19*. При $\gamma I_9<0$, $I_9(4-\gamma)\leqslant0$ из (9) следует $de<0$, $d(2-3e)\leqslant0$ и с учетом $\beta\gamma>0$ в КЧП система (8) имеет два центра, а на бесконечности — седло. Исследуя (10), (12) и (13), получаем картинку *20*. Если же $\gamma I_9<0$, $I_9(4-\gamma)>0$, то система (8) имеет в КЧП два центра, а на бесконечности — два седла и узел. С учетом (10) приходим к картинке *21*.

При $I_9=0$ и $\beta\gamma>0$ из (9) следует $d=0$, $0<e<1$, и тогда центр — единственная особая точка системы (8) в КЧП. Учитывая (10), (12), (13), а также наличие интегральной прямой $x=\dfrac{1}{2(e-1)}$ и типы особенностей на бесконечности, получаем картинку *12* при $e\leqslant1/2$, *14* — при $1/2<e<2/3$, *15* — при $e=2/3$ и *13* — при $e>2/3$.

Остается заметить, что условия $\beta\gamma>0$, $\gamma I_9>0$, $I_9(4-\gamma)>0$ эквивалентны $I_9>0$, $0<\gamma<4$; условия $\beta\gamma>0$, $\gamma I_9<0$, $I_9(4-\gamma)\leqslant 0$ эквивалентны $\beta>0$, $I_9<0$, $0<\gamma\leqslant 4$; условия $\beta\gamma>0$, $\gamma I_9<0$, $I_9(4-\gamma)>0$ эквивалентны $\beta>0$, $I_9<0$, $\gamma>4$; условия $I_9=0$, $\beta\gamma>0$ эквивалентны $I_9=0$, $0<\gamma<6$.

2) Пусть $\beta\gamma<0$. Если при этом $\gamma I_9>0$, то с учетом (9) находим $e(d+2-2e)<0$, $de>0$, и тогда система (8) имеет в КЧП два центра и два седла, а на бесконечности — узел. Так как в этом случае при $C=0$ общий интеграл (10) представляет собой эллипс, пересекаемый интегральной прямой $x=(e-1)/2$, то получается картинка *3*. При $\gamma I_9<0$, $\gamma(\gamma-6)>0$, согласно (9), имеем $de<0$, $e(e-1)>0$, и тогда система (8) имеет в КЧП центр и три седла, а на бесконечности — три узла. Исследуя общий интеграл (10), приходим к картинке *8* при $e(d+e)>0$, *9* — при $e(d+e)<0$ и *10* — при $d+e=0$. При этом, согласно (9), заметим, что $I_3I_4=d+e$ — инвариант четного веса, а $\gamma=6e$ — абсолютный инвариант. Если $\gamma I_9<0$, $0<\gamma<6$, то система (8) имеет в КЧП центр, седло и два узла. Если при этом $\gamma\leqslant 4$, то на бесконечности — седло и с учетом (10), (12) и (13) получается картинка *25*. Если же $4<\gamma<6$, то система (8) имеет на бесконечности узел и два седла. Исследуя (10), получаем картинку *26* при $d+e>0$, *27* — при $d+e=0$ и *28* — при $d+e<0$.

При $\gamma=6$ и $\beta\gamma<0$ с учетом (9) находим $e=1$, $d<0$, и система (8) имеет в КЧП центр и седло, а на бесконечности — два седло-узла и вырожденный узел. Исследуя (14), получаем картинку *16* при $d+1>0$, *17* — при $d+1=0$ и *18* — при $d+1<0$, а из (9) при $e=1$ находим $I_3I_4=d+1$.

Если $I_9=0$ и $\beta\gamma<0$, то, согласно (9), имеем $d=0$, $e(e-1)>0$, и, следовательно, система (8) имеет в КЧП центр и два седла, а на бесконечности — узел и закрытый седло-узел. Так как при $d=C=0$ общий интеграл (10) представляет собой параболу, которую пересекает интегральная прямая $x=(e-1)/2$, получаем картинку *5*.

Остается заметить, что из $\gamma(\gamma-6)>0$, $\gamma I_9<0$ следует $\beta\gamma<0$; из $0<\gamma<6$, $\beta<0$ — $I_9<0$; из $\gamma=6$, $I_3I_4\leqslant 0$ — $\beta<0$, а при $I_9=0$ имеем $3\beta\gamma=2\gamma(6-\gamma)$.

3) Пусть $\beta=0$, $\gamma\neq 0$. Согласно (9), $d=2(e-1)$. Если при этом $e(e-1)>0$, то система (8) имеет в КЧП центр и седло, а на бесконечности — узел. С учетом (10) получаем картинку *2*. Если же $0<e<1$, то система (8) имеет в КЧП центр и закрытый седло-узел (сложная особая точка), а на бесконечности — седло при $e\leqslant 2/3$ и узел и два седла при $e>2/3$. Исследуя (10), (12) и (13), получаем картинку *22* при $e<1/2$, *23* — при $1/2\leqslant e\leqslant 2/3$ и *24* — при $e>2/3$.

Если $\gamma=6$, то с учетом (9) и $\beta=0$ получаем $d=0$, $e=1$, и система (8) имеет в КЧП центр, а на бесконечности — седло и вырожденный узел. Исследуя (14), приходим к картинке *13*.

4) Пусть, наконец, $\gamma=0$. При $I_9=0$, согласно (9), получим $d=e=0$, и система (8) имеет в КЧП центр, а на бесконечности — седло и закрытый седло-узел. С учетом (11) получаем картинку *12*. Если $I_9>0$, то система (8) имеет в КЧП седло и центр, а на бесконечности — седло и два узла. С учетом (11) приходим к картинке *19*. При $I_9<0$ и $d+2<0$ система (8) имеет в КЧП седло и центр, а на бесконечности — узел, и с учетом (11) получаем картинку *2*. Если $I_9<0$, $d+2>0$, то с учетом (9) — $2<d<0$ и в КЧП будут два центра, а на бесконечности — седло. Исследуя (11), приходим к картинке *20*. Если же $d+2=0$, то система (8) имеет интегральную прямую, все точки которой являются особыми, и в результате имеем картинку *29*.

Остается заметить, что при $e=0$ инвариант $\beta=d+2$, а из $\beta<0$ следует $I_9<0$. Лемма 3 доказана.

3. Обозначим $\delta=27I_8-I_9-18I_7$.

Лемма 4. *Пусть* $I_1=I_3=I_6=0$, $I_2<0$, $I_{13}\neq 0$. *Тогда качественные*

картины системы (1) исчерпываются картинкой 10 при $I_9>I_8$; 17 — при $I_9=I_8$; 27 — при $I_9<I_8$; $\delta<0$; 30 — при $\delta>0$ и 31 — при $\delta=0$.

Доказательство. Из (3) при $I_1=I_3=I_6=0$, $I_2<0$, $I_{13}\neq 0$ следует $a^1_{12}+a^2_{22}\neq 0$, и тогда

$$a^1_{11}+a^1_{22}=0, \quad a^2_{11}+a^2_{22}=0. \tag{15}$$

Поворотом координатных осей (при этом соотношения (15) сохраняются) и преобразованием подобия можно привести систему (2) к виду

$$\frac{dx}{dt}=y+2nxy, \quad \frac{dy}{dt}=-x+lx^2+2mxy-ly^2 \tag{16}$$

с $l=0$ или $l=1$. Для (16) находим

$$I_9-I_8=4ln(l^2+m^2+n^2), \quad \delta=-8(2n+l)^2(l^2+2ln+m^2),$$
$$I_{13}=m[(2n-l)m^2-(n-l)^2(2n+l)]. \tag{17}$$

1) Пусть $\delta<0$. Если при этом $I_9<I_8$, то из (17) следует $l\neq 0$ ($l=1$), $n<0$, $2n+1\neq 0$, $m^2+2n+1>0$, и система (16) имеет в КЧП центр, седло и два узла, а на бесконечности — узел и два седла. Если же $I_9>I_8$, то, согласно (17), $l\neq 0$ ($l=1$), $n>0$ и система (16) имеет в КЧП центр и три седла, а на бесконечности — три узла. Учитывая, что при $m^2+2n+1>0$, $n(2n+1)\neq 0$ система (16) имеет три интегральные прямые $y=\frac{1}{2n+1}(m\pm\sqrt{m^2+2n+1})(x-1)$, $x=-\frac{1}{2n}$, пересекающиеся попарно в трех особых точках, приходим к картинке *10* при $n>0$ и *27* при $n<0$. Если $I_9=I_8$, то из (17) в силу $\delta<0$ следует $nl=0$, $m(n^2+l^2)\neq 0$ и система (16) имеет в КЧП центр и седло, а на бесконечности — два седло-узла и вырожденный узел. Учитывая, что система (16) имеет две интегральные прямые ($y=\frac{1}{2m}$, $x=-\frac{1}{2n}$ при $l=0$ и $y=(m\pm\pm\sqrt{m^2+1})(x-1)$ при $n=0$), пересекающиеся в особой точке типа седла, получаем картинку *17*.

Остается заметить, что из $I_8\leqslant I_9$ следует $\delta<0$.

2) Пусть $\delta=0$. Из (17) и $I_{13}\neq 0$ следует $l\neq 0$ ($l=1$), $2n+1=0$ или $l\neq 0$ ($l=1$), $m^2+2n+1=0$. В обоих случаях система (16) имеет в КЧП центр, узел и седло-узел, а на бесконечности — седло и седло-узел. Учитывая наличие двух интегральных прямых ($y=\frac{1}{m}(1-x)$, $x=-\frac{1}{2n}$ при $m^2+2n+1=0$ и $y=\frac{1}{2m}(1-x)$, $x=1$ при $2n+1=0$) системы (16), пересекающихся в сложной особой точке (седло-узле), получаем картинку *31*.

3) При $\delta>0$ из (17) следует $l\neq 0$ ($l=1$), $m^2+2n+1<0$, причем $m\neq 0$ в силу $I_{13}\neq 0$. Система (16) имеет в КЧП центр и фокус, а на бесконечности— седло. Как доказано в [5, с. 92], особую точку типа фокус для системы (16) не могут окружать предельные циклы. Учитывая наличие интегральной прямой $x=-\frac{1}{2n}$, получаем картинку *30*. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Если $I_1=I_6=5I_3-2I_4=13I_3-10I_5=0$, $I_2<0$, $I_{13}\neq 0$, то качественная картина системы (1) соответствует картинке 32.*

Для доказательства достаточно заметить, что при выполнении условий леммы из (3) следует $a^1_{11}a^2_{11}\neq 0$, $a^1_{11}+a^1_{22}=2a^1_{12}-3a^2_{22}-5a^2_{11}=$ $=2(a^2_{11})^2+a^2_{11}a^2_{22}+(a^1_{11})^2=0$ и, как показано в [5, с. 94], аффинным преобразованием система (2) приводится к виду $\frac{dx}{dt}=-y+\mu x^2-xy$,

$\frac{dy}{dt}=x+x^2-3\mu xy-2y^2$ с $\mu\neq 0$, а ее качественная картина соответствует картинке *32*.

4. Сводка условий.

Замечание. При выполнении условий $I_1=I_6=0$, $I_2<0$ из $I_4=0$ с учетом (3) следует $I_3=I_9=I_{13}=\beta=0$. Поэтому в сериях условий, в которых $\beta\neq 0$ или $I_9\neq 0$, или $I_{13}\neq 0$, можно исключить условие $I_4\neq 0$.

Предложение 1. *Две серии условий из лемм 2 и 3 для картинки 5 эквивалентны одной серии*

$$I_1=I_6=I_8=I_9=I_{13}=I_{16}=0,\quad I_2<0,\quad I_5I_{10}>0. \tag{18}$$

Действительно, пусть выполнены условия (18). Тогда при $I_4=0$ находим $\alpha=-28I_2I_5^2+16I_5I_{10}>0$, т. е. выполнены условия леммы 2 для картинки *5*. Если же $I_4\neq 0$, то для системы (8) из (18) с учетом (9) следует $d=0$, а тогда

$$I_5I_{10}=e(e-1)(2e^2-2e+1). \tag{19}$$

Поэтому из $I_5I_{10}>0$ следует $e(e-1)>0$ и с учетом (9) имеем $\gamma(\gamma-6)>>0$, т. е. выполнены условия леммы 3 для картинки *5*.

Обратно, если имеют место соотношения леммы 2 для картинки *5*, то для системы (4) будет $c\neq 0$, $a\leqslant 0$, а тогда с учетом (5) получаем $I_5I_{10}>0$. Если же выполнены условия леммы 3, то для системы (8) $I_{16}=0$, а из $I_9=0$ следует $I_8=0$ и (19). Тогда при $\gamma(\gamma-6)>0$ (т. е. $e(e-1)>0$) получим $I_5I_{10}>0$. Учитывая замечание, приходим к выводу, что в обоих случаях имеют место условия (18).

Предложение 2. *Три серии условий из лемм 2—4 для картинки 10 эквивалентны*

$$I_1=I_3=I_6=I_{10}=0,\quad I_2<0,\quad I_8<I_9. \tag{20}$$

Действительно, пусть выполнены условия (20). Если при этом $I_4=0$, то, согласно замечанию, $I_9=0$, а тогда из $I_8<0$ для системы (4) следует $c\neq 0$, $a<0$. Отсюда получаем $I_5\neq 0$, и выполнены условия леммы 2. При $I_4\neq 0$, $I_{13}=0$ для системы (8) находим

$$I_8-I_9=d(e-1)(2e^2-2e+1). \tag{21}$$

С учетом этого из (20) следует $d(e-1)<0$, а из $I_3=0$ имеем $d+e=0$, и поэтому $de<0$. Следовательно, $\gamma I_9<0$, а тогда $\gamma(\gamma-6)>0$, т. е. имеют место соотношения из леммы 3. Если же $I_{13}\neq 0$, $I_3=0$, то из (21) следует выполнение условий леммы 4.

Обратно, если имеют место условия леммы 2 для картинки *10*, то для системы (4), учитывая (5) и замечание, имеем $I_3=I_4=I_9=0$, $c\neq 0$, а тогда из $I_{10}=0$ следует $b=0$, $a=-1/2$. Поэтому $I_8<0=I_9$, т. е. выполнены условия (20). Пусть имеют место условия леммы 3 для картинки *10*. Тогда для системы (8) $d+e=0$, $e(e-1)>0$, $de<0$, откуда с учетом (21) получим $I_8<I_9$, причем $I_{10}=(d+e)(1-e-d)=0$.

Если $I_{13}\neq 0$, $I_3=0$, то, учитывая, что для системы (16) $I_{10}=0$, получаем, что из условий леммы 4 для картинки *10* следуют условия (20).

Предложение 3. *Учитывая формулы (9), (17) и (21), две серии условий из лемм 3 и 4 для картинки 17 можно заменить одной*: $I_1=I_3=I_6=0$, $I_2<0$, $I_8=I_9\neq 0$.

Предложение 4. *Две серии условий из лемм 3 и 4 для картинки 27 эквивалентны*

$$I_1=I_3=I_6=0,\quad I_2<0,\quad I_8>I_9,\quad \delta<0. \tag{22}$$

Действительно, если $I_{13}\neq 0$, то условия (22) совпадают с условиями леммы 4 для картинки *27*. Пусть $I_{13}=0$. Тогда из (22) с учетом замечания следует $I_4\neq 0$. Для системы (8) находим $\delta=8d(3e-2)^3$ и поэтому из (22), (21) и (9) получим $d+e=0$, $d(e-1)>0$, $d(3e-2)<0$.

Отсюда следует: $2/3<e<1$, $I_9=-e<0$, $\beta=4-6e<0$, т. е. выполнены условия леммы 3.

Обратно, если имеют место условия леммы 3 для картинки *27*, то для системы (8) получим $2/3<e<1$, $d<0$, и тогда $\delta<0$, а из (21) следует $I_9<I_8$, т. е. выполнены условия (22).

Таким образом, с учетом замечания и предложений 1—4 справедлива

Теорема. *При наличии в начале координат центра системы (1) ее качественные картины исчерпываются картинкой 1 при* $I_4=I_5=I_{10}=0$; *2 — при* $I_4=0$, $\alpha<0$, *при* $I_4=\alpha=I_{16}=0$, $I_{10}\neq0$, *при* $\beta\gamma\geqslant0$, $\gamma I_9>0$, $I_9(4-\gamma)\leqslant0$, $I_{13}=0$ *и при* $I_{13}=\gamma=0$, $\beta<0$; *3 — при* $I_4=I_{16}=0$, $\alpha>0$, $I_8>0$ *и при* $I_{13}=0$, $\beta\gamma<0$, $\gamma I_9>0$; *4 — при* $I_4=0$, $\alpha>0$, $I_8>0$, $I_{16}\neq0$; *5 — при* $I_8=I_9=I_{13}=I_{16}=0$, $I_5I_{10}>0$; *6 — при* $I_4=I_8=0$, $I_{16}\neq0$; *7 — при* $I_4=\alpha=0$, $I_{16}\neq0$; *8 — при* $I_4=I_{16}=0$, $I_8<0$, $I_{10}\neq0$, $I_2I_5(I_2I_5+2I_{10})>4I_{10}^2+I_2^3I_8$ *и при* $I_{13}=0$, $\gamma(\gamma-6)>0$, $\gamma I_9<0$, $\gamma I_3I_4>0$; *9 — при* $I_4=I_{16}=0$, $I_8<0$, $I_{10}\neq0$, $I_2I_5(I_2I_5+2I_{10})<4I_{10}^2+I_2^3I_8$ *и при* $I_{13}=0$, $\gamma(\gamma-6)>0$, $\gamma I_9<0$, $\gamma I_3I_4<0$; *10 — при* $I_3=I_{10}=0$, $I_8<I_9$; *11 — при* $I_4=0$, $I_8<0$, $I_{16}\neq0$; *12 — при* $I_9=I_{13}=0$, $I_4\neq0$, $0\leqslant\gamma\leqslant3$; *13 — при* $I_9=I_{13}=0$, $I_4\neq0$, $4<\gamma\leqslant6$; *14 — при* $I_9=I_{13}=0$, $I_4\neq0$, $3<\gamma<4$; *15 — при* $I_9=I_{13}=0$, $I_4\neq0$, $\gamma=4$; *16 — при* $I_{13}=0$, $\gamma=6$, $I_9<0$, $I_3I_4>0$; *17 — при* $I_3=0$, $I_8=I_9\neq0$; *18 — при* $I_{13}=0$, $\gamma=6$, $I_3I_4<0$; *19 — при* $I_{13}=0$, $I_9>0$, $0\leqslant\gamma<4$; *20 — при* $I_{13}=0$, $I_9<0$, $\beta>0$, $0\leqslant\gamma<4$; *21 — при* $I_{13}=0$, $I_9<0$, $\beta>0$, $\gamma>4$; *22 — при* $I_{13}=\beta=0$, $I_4\neq0$, $0<\gamma<3$; *23 — при* $I_{13}=\beta=0$, $I_4\neq0$, $3\leqslant\gamma\leqslant4$; *24 — при* $I_{13}=\beta=0$, $I_4\neq0$, $4<\gamma<6$; *25 — при* $I_{13}=0$, $\beta<0$, $0<\gamma\leqslant4$; *26 — при* $I_{13}=0$, $\beta<0$, $4<\gamma<6$, $I_3I_4>0$; *27 — при* $I_3=0$, $I_9<I_8$, $18I_7+I_9>27I_8$; *28 — при* $I_{13}=0$, $\beta<0$, $4<\gamma<6$, $I_3I_4<0$; *29 — при* $I_{13}=\beta=\gamma=0$, $I_4\neq0$; *30 — при* $I_3=0$, $I_{13}\neq0$, $18I_7+I_9<27I_8$; *31 — при* $I_3=18I_7+I_9-27I_8=0$, $I_{13}\neq0$; *32 — при* $5I_3-2I_4=13I_3-10I_5=0$, $I_{13}\neq0$, *где* $\alpha=I_2^2I_8-28I_2I_5^2+16I_5I_{10}$, $\beta=4I_4^2-3I_2I_9-4I_3I_4$, $\gamma=\dfrac{3}{I_4^2}(2I_3I_4+I_2I_9)$.

Заметим, что нами получены условия в виде равенства и неравенств между полиномами от коэффициентов системы (1), т. е. каждый топологический класс системы (1) в случае центра образует в десятимерном пространстве ее коэффициентов полуалгебраическое множество (в терминологии В. И. Арнольда [9]).

Отметим, что в [3] утверждается существование также 32 топологически различных классов, однако отсутствует картинка *29*, которая соответствует системе (8) при $e=0$, $d=-2$, а вместо нее под номером *32* приведен другой рисунок (не полученный в настоящей заметке), соответствующий якобы системе $\dfrac{dx}{dt}=y-\dfrac{1}{3}axy+ax^2$, $\dfrac{dy}{dt}=-x+3axy-ay^2$. Заметим, однако, что по лемме 1 эта система не имеет центра в начале координат, ибо для нее $I_6=\dfrac{4}{3}a^2\neq0$.

Литература

1. Лукашевич Н. А.— Докл. АН БССР, 1960, т. 4, № 12, с. 497—500.
2. Латипов Х. Р., Широв И. И.— В сб.: Исследования по дифференциальным уравнениям. Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1963, с. 117—131.
3. Куклес И. С, Хасанова М.— Докл. АН ТаджССР, 1964, т. 7, № 12, с. 3—6.
4. Латипов Х. Р.— Изв. вузов, Математика, 1965, № 1 (44), с. 96—104.
5. Лукашевич Н. А.— Дифференц. уравнения, 1965, т. 1, № 1, с. 82—95.
6. Сибирский К. С. Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц.— Кишинев: Штиинца, 1976.—268 с.
7. Смогоржевский А. С., Столова Е. С. Справочник по теории плоских кривых третьего порядка.— М.: Физматгиз, 1961.
8. Андреев А. Ф.— Вестник ЛГУ, 1955, № 8, с. 43—65.
9. Арнольд В. И.— УМН, 1970, т. 25, 2 (152).

Институт математики с ВЦ АН МССР

Поступила в редакцию 13 мая 1981 г.