Вычислим когомологии $\Omega = \Omega^\bullet_{[\pm]}$ для случая, когда c есть примитивный корень из единицы степени ℓ. Легко видеть, что $H^0(\Omega^\bullet) = \operatorname{Im} F_\Omega|_{A_{(\ell)}}$. Поэтому в данном случае разумно рассматривать $\Omega^\bullet_{(\ell)}$, $\Omega^\bullet$, $H^\bullet(\Omega^\bullet)$ как правые $A_{(\ell)}$-модули.

Теорема. *Правые $A_{(\ell)}$-модули $\Omega^k_{(\ell)}$ и $H^k(\Omega^\bullet)$ изоморфны ($k = 0, 1, \dots, n$), причем изоморфизм осуществляется «оператором Картье» $C^{-1}\colon \Omega^\bullet_{(\ell)} \to H^\bullet(\Omega^\bullet)$ таким, что $C^{-1}(\xi_i^{(\ell)}) = \xi_i x_i^{\ell-1}$ и $C^{-1}(\xi_{i_1} \dots \xi_{i_k} f) = C^{-1}(\xi_{i_1}) \dots C^{-1}(\xi_{i_k}) F_\Omega(f)$.*

Когда работа была закончена, автор получил препринт Ю. И. Манина [6], в котором, в частности, указан иной способ вычисления когомологий комплексов $\Omega^\bullet_{[\pm]}$.

Литература

1. *Мухин Е. Е.* // УМН. – 1991. – Т. 46, No. 4. – С. 165–166. **2.** *Demidov E. E., Manin Yu. I., Mukhin E. E., Zhdanovich D. V.* Non-standard quantum deformations of $\mathrm{GL}(n)$ and constant solutions of the Yang–Baxter equations. – Preprint./RIMS–701. – Kyoto, 1990. **3.** *Manin Yu. I.* // Comm. Math. Phys. – 1989. – V. 123, No. 2. – P. 163–175. **4.** *Sudbery A.* // J. Phys. – 1990. – A. 23. – P. 697–704. **5.** *Wess J., Zumino B.* Covariant differential calculus on the quantum hyperplane. – Preprint./CERN–TH–5697/90. – Geneva, 1990. **6.** *Manin Yu. I.* Notes on quantum groups and quantum de Rham complexes. – Preprint/MPI/91–60. – Bonn, 1991.

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
18 сентября 1991 г.

УДК 517.4

О комбинаторике коприсоединенных орбит

© 1993. А. А. Кириллов

1. Метод орбит в теории представлений групп Ли устанавливает соответствие между двумя типами множеств разной природы:

а) множеством $\widehat{G}$ классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений группы Ли G;

б) множеством $\mathfrak{g}^*/G$ орбит группы G в ее коприсоединенном представлении, действующем в пространстве $\mathfrak{g}^*$, дуальном к алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G.

Это обстоятельство делает актуальной задачу классификации коприсоединенных орбит групп Ли. Однако связь между орбитами и представлениями существует не только для групп Ли в их классическом понимании, но и для их обобщений и модификаций. В частности, интересные комбинаторные задачи возникают при рассмотрении алгебраических групп G над конечными полями. Этот аспект метода орбит до сих пор оставался в тени, и в этой заметке я хочу привлечь к нему внимание.

2. Пусть G_n — линейная алгебраическая группа всех верхних унитреугольных матриц порядка n, $G_n(K)$ — группа ее точек над полем K, $\mathfrak{g}_n(K)$ — соответствующая алгебра Ли, а $\mathfrak{g}_n^*(K)$ — дуальное K-линейное пространство. В случае когда $K = \mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов, мы используем обозначение $G_n(\mathbb{F}_q) =: G_{n,q}$. Задача о классификации коприсоединенных орбит для

групп $G_n(\mathbb{R})$ и $G_n(\mathbb{C})$ рассматривалась со времени возникновения метода орбит, но до сих пор не получила окончательного решения. Имеющиеся частичные результаты (классификация орбит общего положения и случаи малых n) дают надежду, что ответ можно сформулировать в форме, не зависящей от основного поля. Это естественно приводит к задаче описания орбит для простейшего поля $\mathbb{F}_2$, т.е. для групп $G_{n,2}$.

Для малых значений n число O_n коприсоединенных орбит группы $G_{n,2}$ дается следующей таблицей:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
O_n	1	1	2	5	16	61	275	1430	8506	57205

Значения O_n в этой таблице для $n \leqslant 6$ взяты из курсовой работы А. Михайлова (1971 г.), а для $n = 7, 8, 9$ — из [1].

Недавно в докладе В. И. Арнольда на заседании ММО (содержание доклада опубликовано в [2, 3], ср. также [4]) рассматривалась так называемая последовательность Эйлера–Бернулли $\{K_n\}$ с производящей функцией

$$\sum_{n\geqslant 0} K_n \frac{x^n}{n!} = \frac{\cos x}{1-\sin x}\,. \tag{1}$$

Начальные значения K_n даются такой таблицей:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K_n	1	1	1	2	5	16	61	272	1385	7936	50521

Сравнение этих таблиц приводит к естественной гипотезе:

$$O_n \geqslant K_{n+1}. \tag{2}$$

Комбинаторное доказательство этой гипотезы состояло бы в выделении среди всех коприсоединенных орбит группы $G_{n,2}$ некоторой «регулярной части» мощности K_n. Возможна также более детальная формулировка этой гипотезы в терминах треугольника Эйлера–Бернулли (см. [2, 3, 5]).

3. До сих пор подсчет числа $O_{n,q}$ коприсоединенных орбит для групп $G_{n,q}$ производился «вручную» с разбором множества частных случаев. Мы дадим здесь простую явную формулу типа статистической суммы для подсчета $O_{n,q}$. Кроме того, эта формула связывает число орбит с другой интересной комбинаторной величиной: числом пар перестановочных элементов в конечной алгебре Ли.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем $\mathbb{F}_q$, $\mathfrak{g}^*$ — дуальное пространство (над $\mathbb{F}_q$), χ — нетривиальный аддитивный характер поля $\mathbb{F}_q$. Рассмотрим для $Z \in \mathfrak{g}$ следующую «статистическую сумму»:

$$S(Z) = \sum \chi(\langle F, [X, Y] - Z\rangle), \tag{3}$$

где сумма берется по всем $X, Y \in \mathfrak{g}$ и всем $F \in \mathfrak{g}^*$.

С помощью замены $F \mapsto \lambda F$ легко убедиться, что величина $S(Z)$ не зависит от выбора характера χ. Кроме того, формула

$$\sum_{F\in V^*} \chi(\langle F, X\rangle) = q^{\dim V}\delta(X) \tag{4}$$

позволяет вычислить $S(Z)$ в следующем смысле.

Лемма 1. *Величина $S(Z)$ равна числу решений $(X, Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ уравнения $[X, Y] = Z$, умноженному на $q^{\dim \mathfrak{g}}$.*

В частности, $S(0)$ пропорционально числу пар перестановочных элементов в алгебре Ли $\mathfrak{g}$; мы обозначим это последнее число $M(\mathfrak{g})$.

Пусть теперь $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли линейной алгебраической группы G над полем $\mathbb{F}_q$. Тогда определено присоединенное действие G на $\mathfrak{g}$ и коприсоединенное действие G на $\mathfrak{g}^*$. Обозначим через S совокупность подалгебр Ли в $\mathfrak{g}$, которые соответствуют стабилизаторам точек в коприсоединенном представлении. Предположим теперь, что выполнено следующее условие:

(Э) Существует аналог экспоненциального отображения $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$, который задает биекцию каждой подалгебры Ли из класса S на соответствующую подгруппу в G.

Лемма 2. *Условие* (Э) *выполнено для всех алгебр Ли $\mathfrak{g}_{n,q}$.*

Доказательство. Покажем, что в качестве $\exp$ можно взять отображение

$$X \mapsto 1 + X. \tag{5}$$

В самом деле, пространство $\mathfrak{g}^*_{n,q}$ можно отождествить с совокупностью $\mathfrak{n}_-$ всех строго нижних треугольных матриц. Пусть $\mathfrak{b}_+$ — совокупность всех (нестрого) верхних треугольных матриц. Коприсоединенное действие $G_{n,q}$ имеет вид

$$F \mapsto gFg^{-1} \mod \mathfrak{b}_+.$$

Остается заметить, что $\mathfrak{b}_+(1+X) = \mathfrak{b}_+$, и поэтому условия

$$(1+X)F(1+X)^{-1} = F \mod \mathfrak{b}_+ \quad \text{и} \quad XF = FX \mod \mathfrak{b}_+$$

равносильны.

Теорема. *При наличии условия* (Э) *величина $S(0)$ равна числу G-орбит в $\mathfrak{g}^*$, умноженному на $q^{2\dim \mathfrak{g}}$.*

Доказательство. Проводя в (3) суммирование по X, мы получаем, что $S(0)$ равно $q^{\dim \mathfrak{g}} \cdot \{$число пар (F, Y), для которых $K_*(Y)F = 0\}$, где K_* означает коприсоединенное действие алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}^*$. Для каждого $F \in \mathfrak{g}^*$ условие $K_*(Y) = 0$ задает алгебру Ли стабилизатора точки $F \in \mathfrak{g}^*$. В силу условия (Э) число элементов в этой подалгебре равно $\#G/\#\Omega_F$, где Ω_F — орбита точки F, а $\#X$ означает число элементов конечного множества X. Суммируя по всем F из данной орбиты Ω, мы получаем величину $\#G$, равную $q^{\dim \mathfrak{g}}$ в силу условия (Э). Суммируя по всем орбитам, мы получаем утверждение теоремы.

Следствие. *Справедливо тождество*

$$O_{n,q} = q^{-n(n-1)/2} M(\mathfrak{g}_{n,q}). \tag{6}$$

Литература

1. *Гудивок П. М., Капитонова Ю. В., Поляк С. С., Рудько В. П., Циткин Л. И.* // Кибернетика (Киев). – 1990. – вып. 1. – С. 40–48. **2.** *Arnold V. I.* // Duke Math. J. – V. 63, No. 2. – P. 537–555. **3.** *Арнольд В. И.* // Успехи матем. наук. – 1991. – Т. 47, вып. 1 (283) – С. 3–45. **4.** *Andre D.* // J. Math. Pures Appl. – 1981. – V. 7. – P. 167–184. **5.** *Knuth D. E., Buckholtz T. J.* // Math. Comp. – 1967. – V. 21. – P. 663–688.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
27 июля 1992 г.