Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

S. S. Marchenkov, Functional aspects of the completeness problem for some classes of automaton functions, *Diskr. Mat.*, 2000, Volume 12, Issue 2, 103–117

https://www.mathnet.ru/eng/dm332

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.91
April 29, 2025, 21:56:55

Дискретная математика

том 12 выпуск 2 * 2000

УДК 519.716

Функциональные аспекты проблемы полноты для некоторых классов автоматных функций

© 2000 г. С. С. Марченков

Для замкнутого класса Q булевых функций через $\mathscr{A}(Q)$ обозначается замкнутый класс всех конечно-автоматных функций, вычислимых конечными автоматами, в каждом состоянии которых реализуется функция из Q. Доказано, что если Q_1, Q_2 — замкнутые классы булевых функций, $O_1 \subseteq Q_1 \subset Q_2$, то число предполных в $\mathscr{A}(Q_2)$ классов, содержащих класс $\mathscr{A}(Q_1)$, континуально. Через $\mathbf{C}_\varphi$ обозначается множество всех функций, определенных и равномерно непрерывных на бэровском пространстве E_2^∞ с модулем непрерывности φ. Установлено, что число классов Слупецкого в замкнутом классе непрерывных на E_2^∞ функций, который можно представить в виде счетного объединения классов $\mathbf{C}_{\varphi_i}$, где $\varphi_1(t) = 2t$, гиперконтинуально.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 97-01-00989.

1. Введение

Проблема полноты является одной из центральных проблем в теории функциональных систем. Решение этой проблемы в функциональном аспекте состоит в построении критериальной системы — системы замкнутых классов, невхождение ни в один из которых обеспечивает полноту исследуемого множества функций [1]. Для функциональных систем с конечным порождающим множеством функций критериальная система состоит только из предполных классов. Это вытекает из хорошо известных утверждений теоретико-множественного характера (см., например, [2]). Для функциональных систем, не имеющих конечных порождающих множеств функций, критериальная система наряду с предполными классами может содержать, вообще говоря, и другие замкнутые классы.

Хорошо известно [3], что функциональная система, состоящая из всех конечно-автоматных функций (например, в алфавите $\{0,1\}$), с операцией суперпозиции не имеет конечного порождающего множества функций. Число предполных классов в этой системе континуально [4], а согласно анонсированному в [5] результату (теорема 3) критериальная система не может исчерпываться только предполными классами.

В связи с этим представляют интерес некоторые варианты проблемы полноты, когда исследуемое на полноту множество функций включает в себя заранее заданные функции. Этими функциями могут быть, в частности, все одноместные конечно-автоматные функции. Как установлено в [5], множество $P^1_{\text{ка}}$ всех одноместных конечно-автоматных функций вместе с истинностной шефферовой функцией полно (относительно операции суперпозиции) в классе $P_{\text{ка}}$ всех конечно-автоматных функций. Таким образом, критериальная система в данном случае состоит из всех предполных в $P_{\text{ка}}$ классов, содержащих множество $P^1_{\text{ка}}$ (классы Слупецкого). В [6] доказано, что число таких классов континуально. Более того, в [6] установлено, что континуальным является множество всех предполных классов, которые состоят из функций, обладающих некоторым свойством линейности. Именно конечный автомат, вычисляющий подобную функцию, в каждом состоянии реализует линейную булеву функцию. Этот результат естественно приводит к постановке следующей общей задачи.

Пусть Q — замкнутый класс булевых функций, $\mathscr{A}(Q)$ — замкнутый класс всех конечно-автоматных функций, вычислимых конечными автоматами, в каждом состоянии которых реализуется некоторая функция из Q. Если Q_1, Q_2 — замкнутые классы булевых функций и $Q_1 \subset Q_2$, то каково число предполных в $\mathscr{A}(Q_2)$ классов, содержащих класс $\mathscr{A}(Q_1)$?

Ниже (теоремы 1,2) мы доказываем, что в этом случае критериальная система континуальна и состоит только из предполных классов. В предложениях 1,2 мы усиливаем основной результат из [5], показывая, что множество $P^1_{\text{ка}}$ можно заменить более узкими множествами, в частности, множеством всех конечно-автоматных подстановок.

Проблема полноты в литературе рассматривалась также для некоторых классов автоматных функций, которые не являются конечно-автоматными. Один из таких классов есть класс детерминированных функций [3]. В [7] доказано, что при любом n, $n \geqslant 2$, множество всех n-местных детерминированных функций не является полным относительно суперпозиции в классе всех детерминированных функций, а в [6] установлено, что число классов Слупецкого для множества всех детерминированных функций гиперконтинуально.

Детерминированные функции можно рассматривать как функции, вычислимые автоматами с бесконечным числом состояний. Другой подход состоит в том, чтобы рассматривать их в качестве непрерывных функций, заданных на бэровском пространстве E_2^∞, которое состоит из всех счетных двоичных последовательностей [8]. Каждая непрерывная функция, определенная на E_2^∞, оказывается при этом равномерно непрерывной. Если обозначить через $\mathbf{C}_\varphi$ класс всех непрерывных функций, имеющих модуль непрерывности φ, то $\mathbf{C}_t$ будет совпадать с классом всех детерминированных функций.

Проблему полноты можно ставить для класса $\mathbf{C}$ всех непрерывных функций и для ряда его подклассов. Ниже в продолжение исследований из [6] мы изучаем полноту в замкнутых классах $\mathbf{D}, \mathbf{D} \subseteq \mathbf{C}$, при наличии множества $\mathbf{D}^1$ всех одноместных функций из $\mathbf{D}$. В отличие от класса детерминированных функций при условии $\mathbf{C}_{2t} \subset \mathbf{D}$ в классе $\mathbf{D}$ имеется тройка функций, которая осуществляет взаимнооднозначное и непрерывное в обе стороны отображение $(E_2^\infty)^2$ на E_2^∞. Поэтому если $\mathbf{C}_{2t} \subset \mathbf{D}$, то каждый замкнутый в $\mathbf{D}$ класс, содержащий множество $\mathbf{D}^1$ и отличный от $\mathbf{D}$, можно расширить до предполного в $\mathbf{D}$ класса. Таким образом, число и структура классов Слупецкого в $\mathbf{D}$ в известной мере характеризуют сложность перехода в классе $\mathbf{D}$ от одноместных функций к многоместным. Доказываемая ниже теорема 3 говорит о том, что если замкнутый класс $\mathbf{D}$ можно представить в виде счетного объединения классов $\mathbf{C}_{\varphi_i}$, где $\varphi_1(t) = 2t$, то число классов Слупецкого в $\mathbf{D}$ гиперконтинуально.

Отметим еще, что каждый класс вида $\mathbf{C}_\varphi$ можно рассматривать как класс автоматных функций, для которого автоматы, вычисляющие функции из $\mathbf{C}_\varphi$, работают с предвосхищением, определяемым функцией φ.

2. Конечно-автоматные функции

Пусть $E_2 = \{0,1\}, E_2^\infty = E_2 \times E_2 \times \ldots$ Элементы x множества E_2^∞ представляем в виде $x = x(1)x(2)\ldots$, где $x(t) \in E_2$ при $t \geqslant 1$. Функцию $f\colon (E_2^\infty)^n \to E_2^\infty$ по техническим причинам удобно записывать в виде $f(x_1,\ldots,x_n) = y$, где y — выходная переменная. Через $P_{\text{ка}}$ обозначаем множество всех конечно-автоматных (ограниченно-детерминированных) функций [3], определенных на декартовых степенях множества E_2^∞ и принимающих значения из множества E_2^∞. Если $Q \subseteq P_{\text{ка}}$, то через Q^1 обозначаем множество всех одноместных функций из Q.

Конечно-автоматная функция $f(x_1,\ldots,x_n) = y$ называется истинностной, если существует такая n-местная булева функция F, что при любом $t, t \geqslant 1$, имеет место равенство

$$y(t) = F(x_1(t),\ldots,x_n(t)). \tag{1}$$

Функцию f, соответствующую в силу (1) булевой функции F, обозначаем через $\text{И}(F)$. Если Q — некоторое множество булевых функций, то пусть $\text{И}(Q)$ обозначает множество $\bigcup \text{И}(F)$, где объединение берется по всем булевым функциям F из Q.

Всякую конечно-автоматную функцию можно вычислить подходящим конечным автоматом [3]. Пусть конечный автомат A с множеством состояний $\{q_1,\ldots,q_r\}$ вычисляет функцию $f(x_1,\ldots,x_n) = y$. Тогда в каждом состоянии q_i автомата A реализуется некоторая n-местная булева функция F_i. Это означает, что если под действием входной последовательности

$$(x_1(1),\ldots,x_n(1)),\ldots,(x_1(t),\ldots,x_n(t))$$

автомат A из начального состояния переходит в состояние q_i, то в момент $t+1$ выход $y(t+1)$ автомата A равен $F_i(x_1(t+1),\ldots,x_n(t+1))$. Пусть Q — множество булевых функций. Через $\mathscr{A}(Q)$ обозначаем множество всех функций из $P_{\text{ка}}$, которые можно вычислить конечными автоматами, в каждом состоянии которых реализуется булева функция из Q.

Считаем, что на множестве $P_{\text{ка}}$ задана операция суперпозиции (см. [3]). Если $Q \subseteq P_{\text{ка}}$, то через $[Q]$ обозначаем замыкание множества Q относительно операции суперпозиции. Обычным образом вводим понятия полноты, базиса, замкнутого и предполного множеств. Нетрудно видеть, что для замкнутого множества Q булевых функций множество $\mathscr{A}(Q)$ конечно-автоматных функций также будет замкнутым.

Пусть P_2 есть множество всех булевых функций. Следуя [9], обозначим через O_1, O_4 и O_9 соответственно замкнутый класс всех булевых функций, равных функции x, замкнутый класс всех булевых функций, равных функциям x или $\bar{x}$, замкнутый класс всех булевых функций, равных функциям 0 или 1.

Теорема 1. *Пусть Q — замкнутый класс булевых функций, $O_1 \subseteq Q$ и $\{F_1,\ldots,F_k\}$ — базис класса Q. Тогда*

$$\mathscr{A}(Q) = [\mathscr{A}(O_1) \cup \{\text{И}(F_1),\ldots,\text{И}(F_k)\}].$$

Доказательство. Включение

$$[\mathscr{A}(O_1) \cup \{\text{И}(F_1), \ldots, \text{И}(F_k)\}] \subseteq \mathscr{A}(Q)$$

очевидно. Докажем обратное включение.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из $\mathscr{A}(Q)$. Тогда найдется конечный автомат A с множеством состояний $\{q_1, \ldots, q_r\}$ такой, что A вычисляет f и в состояниях $q_1, \ldots, q_r$ реализуются соответственно булевы функции $G_1, \ldots, G_r$ из класса Q. Так как $\{G_1, \ldots, G_r\} \subset Q$, а $\{F_1, \ldots, F_k\}$ — базис класса Q, суперпозициями функций $\text{И}(F_1), \ldots, \text{И}(F_k)$ можно определить такие истинностные функции $g_1, \ldots, g_r$, что

$$g_1 = \text{И}(G_1), \ldots, g_r = \text{И}(G_r).$$

Выберем в классе $\mathscr{A}(O_1)$ функцию $g_0(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_r)$, которая удовлетворяет следующим условиям. Функция g_0 вычисляется конечным автоматом A_0, имеющим состояния $q_1', \ldots, q_r'$ и такую же диаграмму переходов, что и автомат A (значения переменных $y_1, \ldots, y_r$ не влияют на переходы автомата A_0); в состояниях $q_1', \ldots, q_r'$ автомата A_0 реализуются соответственно булевы функции $y_1, \ldots, y_r$. Тогда нетрудно видеть, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g_0(x_1, \ldots, x_n, g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_r(x_1, \ldots, x_n)).$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть Q_1, Q_2 — замкнутые классы булевых функций, $O_1 \subseteq Q_1 \subset Q_2$, $\mathscr{R}$ — замкнутый класс конечно-автоматных функций и $\mathscr{A}(Q_1) \subseteq \mathscr{R} \subset \mathscr{A}(Q_2)$. Тогда класс $\mathscr{R}$ можно расширить до предполного в $\mathscr{A}(Q_2)$ класса.*

Доказательство. В силу теоремы 1 класс $\mathscr{R}$ вместе с конечным множеством функций из $\mathscr{A}(Q_2)$ образует полную в $\mathscr{A}(Q_2)$ систему (напомним, что любой замкнутый класс булевых функций имеет конечный базис по суперпозиции [9]). В этом случае согласно известному теоретико-множественному утверждению (см, например, [2], гл. II, параграф 5) класс $\mathscr{R}$ можно расширить до предполного в $\mathscr{A}(Q_2)$ класса.

Теорема 2. *Пусть Q_1, Q_2 — замкнутые классы булевых функций и $O_1 \subseteq Q_1 \subset Q_2$. Тогда мощность семейства предполных в $\mathscr{A}(Q_2)$ классов, каждый из которых содержит класс $\mathscr{A}(Q_1)$, равна мощности континуума.*

Доказательство. Поскольку класс $\mathscr{A}(Q_2)$ счетен, мощность семейства всех замкнутых в $\mathscr{A}(Q_2)$ классов не превосходит мощности континуума. Докажем, что в $\mathscr{A}(Q_2)$ имеется континуальное семейство предполных классов, каждый из которых содержит класс $\mathscr{A}(Q_1)$.

Пусть $N = \{1, 2, \ldots\}, p_i$ — i-е простое число, $i = 0, 1, 2, \ldots$, N_i — множество всех чисел из N, кратных p_i. Положим $N_i^1 = N_i$, $N_i^0 = \bar{N}_i$, где дополнение берется до множества N. Отметим следующий простой факт: для любого $m, m \geqslant 0$, и любых значений $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ из E_2 множество

$$N_0^{\alpha_0} \cap \ldots \cap N_m^{\alpha_m} \tag{2}$$

бесконечно.

Пусть булевы функции $F_1(x_1, \dots, x_l), \dots, F_k(x_1, \dots, x_l)$ образуют базис класса Q_2. Положим $f_i = \text{И}(F_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Для любого подмножества M множества N и любого $i, 1 \leqslant i \leqslant k$, определим функцию $f_i^M(x_1, \dots, x_l) = y_i$, полагая для любого $t, t \geqslant 1$,

$$y_i(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in M, \\ F_i(x_1(t), \dots, x_l(t)), & t \notin M. \end{cases}$$

Легко видеть, что при $M = N_i$ или $M = \bar{N}_i$ каждая из функций $f_1^M, \dots, f_k^M$ будет конечно-автоматной функцией из класса $\mathscr{A}(Q_2)$. Кроме того, для любого $i, 1 \leqslant i \leqslant k$, и любого $j, j \geqslant 0$,

$$f_i^{N_j}(f_i^{\bar{N}_j}(x_1, \dots, x_l), x_2, \dots, x_l) = f_i(x_1, \dots, x_l). \tag{3}$$

Пусть $\alpha = \alpha_0\alpha_1 \dots$ — последовательность из E_2^∞. Положим

$$\mathscr{A}^\alpha(Q_1) = \mathscr{A}(Q_1) \cup (\cup\{f_i^M(x_1, \dots, x_l)\}),$$

где объединение берется по всем i и M таким, что $1 \leqslant i \leqslant k$, $M = N_j^{\alpha_j}$, $j \geqslant 0$.

Из определения множества $\mathscr{A}^\alpha(Q_1)$ следует, что $\mathscr{A}^\alpha(Q_1) \subseteq \mathscr{A}(Q_2)$. Докажем, что $[\mathscr{A}^\alpha(Q_1)] \neq \mathscr{A}(Q_2)$. Предположим, что конечно-автоматная функция g реализуется формулой Φ над множеством функций $\mathscr{A}^\alpha(Q_1)$. Пусть число m таково, что в формулу Φ не входят функции вида f_i^M, где $M = N_j^{\alpha_j}$ и $j > m$. Как отмечалось, множество (2) бесконечно. Из определений множества $\mathscr{A}^\alpha(Q_1)$ и функций f_i^M следует, что для любого t из множества (2) каждая из входящих в формулу Φ функций реализует в момент t некоторую функцию из Q_1. Следовательно, этим свойством будет обладать и функция g, реализуемая формулой Φ. Поскольку в классе $\mathscr{A}(Q_2)$ имеются функции, не обладающие указанным свойством, приходим к неравенству $[\mathscr{A}^\alpha(Q_1)] \neq \mathscr{A}(Q_2)$.

Пусть α, β — различные последовательности из E_2^∞. Покажем, что

$$[\mathscr{A}^\alpha(Q_1) \cup \mathscr{A}^\beta(Q_1)] = \mathscr{A}(Q_2).$$

В самом деле, пусть, например, $\alpha_j \neq \beta_j$. Тогда $\{\alpha_j, \beta_j\} = E_2$ и, следовательно, $N_j^{\alpha_j} = \bar{N}_j^{\beta_j}$. Соотношение (3) показывает, что в этом случае все функции $f_1, \dots, f_k$ принадлежат множеству $[\mathscr{A}^\alpha(Q_1) \cup \mathscr{A}^\beta(Q_1)]$. Далее пользуемся включением $O_1 \subseteq Q_1$ и теоремой 1.

Итак, если $\alpha \neq \beta$, то множества $\mathscr{A}^\alpha(Q_1), \mathscr{A}^\beta(Q_1)$ не могут одновременно содержаться в одном и том же предполном в $\mathscr{A}(Q_2)$ классе. Вместе с тем согласно следствию 1 каждый замкнутый класс вида $[\mathscr{A}^\alpha(Q_1)]$ (который отличен от $\mathscr{A}(Q_2)$) можно расширить до предполного в $\mathscr{A}(Q_2)$ класса. Отсюда вытекает утверждение теоремы.

Следствие 2. *Пусть Q — один из пяти предполных в P_2 классов. Тогда мощность семейства предполных в $P_{\text{ка}}$ классов, каждый из которых содержит класс $\mathscr{A}(Q)$, равна мощности континуума.*

Отметим, что часть этого следствия, относящаяся к классу линейных функций, доказана другим методом в [6].

В [5] доказано, что система $P_{\text{ка}}^1 \cup \text{И}(P_2)$ полна в $P_{\text{ка}}$. Ниже выводятся два следствия из этого результата.

Предложение 1. *Система* $\mathscr{A}^1(O_7) \cup \text{И}(P_2)$ *полна в классе* $P_{\text{ка}}$.

Доказательство. Возьмем произвольную одноместную конечно-автоматную функцию $g(x)$. Пусть автомат A, имеющий состояния $q_1, \dots, q_r$, вычисляет функцию g. В классе $\mathscr{A}^1(O_7)$ определим функции $g_1(x), g_2(x)$. Для этого зададим автоматы A_1, A_2, вычисляющие функции g_1, g_2. Оба автомата A_1, A_2 имеют по r состояний, которые мы обозначим через $q'_1, \dots, q'_r$ и $q''_1, \dots, q''_r$. Диаграммы переходов автоматов A_1, A_2 совпадают с диаграммой переходов автомата A. Функции выходов автоматов A_1, A_2 определим так: если в состоянии q_i автомата A реализуется одна из функций $0, 1, x, \bar{x}$, то в состояниях q'_i, q''_i автоматов A_1, A_2 реализуются соответственно функции 0, 0, 1, 1 и 0, 1, 0, 1. Пусть булева функция $G(x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет соотношениям

$$G(x,0,0) = 0, \quad G(x,0,1) = 1, \quad G(x,1,0) = x, \quad G(x,1,1) = \bar{x}.$$

Положим $g_0 = \text{И}(G)$. Тогда, как нетрудно видеть,

$$g(x) = g_0(x, g_1(x), g_2(x)).$$

Таким образом,

$$P^1_{\text{ка}} \subset [\mathscr{A}^1(O_7) \cup \text{И}(P_2)].$$

Далее применяем цитированный выше результат из [5]. Предложение доказано.

Предложение 2. *Система* $\mathscr{A}^1(O_4) \cup \text{И}(P_2)$ *полна в классе* $P_{\text{ка}}$.

Доказательство. Пусть $g(x)$ — произвольная функция из класса $\mathscr{A}^1(O_7)$ и автомат A, имеющий состояния $q_1, \dots, q_r$, вычисляет функцию g. Как и при доказательстве предложения 1, определим автомат A_1 с множеством состояний $\{q'_1, \dots, q'_r\}$, который вычисляет функцию g_1 и диаграмма переходов которого совпадает с диаграммой переходов автомата A. Функцию выходов автомата A_1 зададим следующим образом: если в состоянии q_i автомата A реализуется одна из функций 0, 1, то в состоянии q'_i автомата A_1 реализуются соответственно функции x и $\bar{x}$. Положим $g_0(x_1, x_2) = \text{И}(x_1 \oplus x_2)$, где $x_1 \oplus x_2$ обозначает сумму по модулю 2. Тогда

$$g(x) = g_0(x, g_1(x)).$$

Остается воспользоваться предложением 1.

Отметим, что множество $\mathscr{A}^1(O_4)$ состоит из всех конечно-автоматных подстановок на множестве E_2^∞.

3. Непрерывные функции

На множестве E_2^∞ зададим метрику бэровского пространства: если

$$a, b \in E_2^\infty, \quad a = a(1)a(2)\dots, \quad b = b(1)b(2)\dots,$$

то при $a \neq b$ полагаем $\rho(a, b) = 1/t$, где t есть такое наименьшее число, что $a(t) \neq b(t)$. Метрику ρ перенесем на декартовы степени множества E_2^∞: если

$$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in (E_2^\infty)^n, \ \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n), \ \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n),$$

то

$$\rho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \rho(a_i, b_i).$$

Функция $f(x_1, \dots, x_n) = y$, отображающая множество $(E_2^\infty)^n$ в множество E_2^∞, (равномерно) непрерывна в метрике ρ, если существует такая функция $\varphi(t)$ натурального аргумента, принимающая натуральные значения, что при любом $t, t \geqslant 1$, значение $y(t)$ определяется только значениями

$$x_1(1), \dots, x_1(\varphi(t)), \dots, x_n(1), \dots, x_n(\varphi(t)).$$

Функцию $\varphi(t)$ с указанными свойствами будем называть модулем непрерывности функции f. Если $\varphi(t)$ — модуль непрерывности функции f и $\psi(t) \geqslant \varphi(t)$ для любых $t, t \geqslant 1$, то функцию $\psi(t)$ также можно считать модулем непрерывности функции f. В связи с этим и в целях упрощения технических выкладок в дальнейшем модули непрерывности будем предполагать монотонно не убывающими функциями.

Через $\mathbf{C}$ обозначим множество всех непрерывных на E_2^∞ функций, а через $\mathbf{C}_\varphi$ — подмножество всех функций из $\mathbf{C}$, имеющих модуль непрерывности φ.

Функцию $p(x_1, x_2) = y$ назовем функцией Пеано, если для любого t, $t \geqslant 1$,

$$y(2t-1) = x_1(t), \; y(2t) = x_2(t).$$

Функция $p(x_1, x_2)$ принадлежит классу $\mathbf{C}_t$ и осуществляет взаимно-однозначное и непрерывное в обе стороны соответствие (гомеоморфизм) между $(E_2^\infty)^2$ и E_2^∞. Обратное к p отображение задается двумя функциями $p_1(x) = y_1, p_2(x) = y_2$ такими, что при любом $t, t \geqslant 1$,

$$y_1(t) = x(2t-1), \; y_2(t) = x(2t).$$

Функции p_1, p_2 принадлежат классу $\mathbf{C}_{2t}$. Из определения функций p, p_1, p_2 следует, что имеют место тождества

$$p_1(p(x_1, x_2)) = x_1, \quad p_2(p(x_1, x_2)) = x_2, \quad p(p_1(x), p_2(x)) = x. \tag{4}$$

Предполагаем, что на множестве $\mathbf{C}$ задана операция суперпозиции. Понятия замкнутого и предполного множеств относим только к операции суперпозиции.

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{D}$ *— замкнутый класс непрерывных функций и* $\{p, p_1, p_2\} \subset \mathbf{D}$. *Тогда*

$$[\mathbf{D}^1 \cup \{p, p_1, p_2\}] = \mathbf{D}.$$

Доказательство. Включение

$$[\mathbf{D}^1 \cup \{p, p_1, p_2\}] \subseteq \mathbf{D}$$

очевидно. Установим обратное включение.

Для любого $n, n \geqslant 2$, суперпозициями функций p, p_1, p_2 определим функции

$$p^n(x_1, \dots, x_n), \qquad p_1^n(x), \dots, p_n^n(x)$$

так, чтобы выполнялись тождества

$$\begin{aligned} &p_1^n(p^n(x_1, \dots, x_n)) = x_1, \dots, p_n^n(p^n(x_1, \dots, x_n)) = x_n, \\ &p^n(p_1^n(x), \dots, p_n^n(x)) = x. \end{aligned} \tag{5}$$

Для этого при $n = 2$ положим $p^2 = p, p_1^2 = p_1, p_2^2 = p_2$ и воспользуемся тождествами (4). Если $n > 2$ и функции

$$p^{n-1}, p_1^{n-1}, \ldots, p_{n-1}^{n-1}$$

уже определены, то пусть

$$p^n(x_1, \ldots, x_n) = p(p^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n),$$
$$p_1^n(x) = p_1^{n-1}(p_1(x)), \ldots, p_{n-1}^n(x) = p_{n-1}^{n-1}(p_1(x)), \quad p_n^n(x) = p_2(x).$$

Пусть теперь $n \geqslant 2$ и $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из $\mathbf{D}$. Тогда функция

$$f_1(x) = f(p_1^n(x), \ldots, p_n^n(x))$$

принадлежит множеству $\mathbf{D}^1$, а на основании тождеств (5)

$$f_1(p^n(x_1, \ldots, x_n)) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Лемма доказана.

Через $x_1 \oplus x_2$ обозначим истинностную функцию, определенную через соответствующую булеву функцию $x_1 \oplus x_2$ — сложение по модулю 2.

Лемма 2. *Пусть $\mathbf{D}$ — замкнутый класс непрерывных функций и*

$$\mathbf{C}_{2t}^1 \cup \{x_1 \oplus x_2\} \subset \mathbf{D}.$$

Тогда

$$[\mathbf{D}^1 \cup \{x_1 \oplus x_2\}] = \mathbf{D}.$$

Доказательство. Включение

$$[\mathbf{D}^1 \cup \{x_1 \oplus x_2\}] \subseteq \mathbf{D}$$

очевидно. Докажем обратное включение.

Определим в классе $\mathbf{C}_{2t}^1$ такие функции $f_1(x) = y_1, f_2(x) = y_2$, что для любого $t, t \geqslant 1$,

$$y_1(2t-1) = y_2(2t) = x(t), \quad y_1(2t) = y_2(2t-1) = 0.$$

Тогда

$$f_1(x_1) \oplus f_2(x_2) = p(x_1, x_2).$$

Как отмечалось, функции p_1, p_2 принадлежат классу $\mathbf{C}_{2t}^1$. Для завершения доказательства леммы 2 остается воспользоваться леммой 1.

Лемма 3. *Пусть функции $f, f_1, \ldots, f_k$ принадлежат соответственно классам $\mathbf{C}_\varphi$, $\mathbf{C}_{\varphi_1}, \ldots, \mathbf{C}_{\varphi_k}$ и*

$$g(x_1, \ldots, x_n) = f(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n)).$$

Тогда $g \in \mathbf{C}_\psi$, где

$$\psi(t) = \max(\varphi_1(\varphi(t)), \ldots, \varphi_k(\varphi(t))).$$

Доказательство. Пусть

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = y_1, \dots, f_k(x_1, \dots, x_n) = y_k, \quad f(y_1, \dots, y_k) = y.$$

Согласно включению $f \in \mathbf{C}_\varphi$ и монотонности функции φ значения $y(1), \dots, y(t)$ полностью определяются значениями

$$y_1(1), \dots, y_1(\varphi(t)), \dots, y_k(1), \dots, y_k(\varphi(t)).$$

В свою очередь из соотношений $f_1 \in \mathbf{C}_{\varphi_1}, \dots, f_k \in \mathbf{C}_{\varphi_k}$ и монотонности функций $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ следует, что при любом $i, 1 \leqslant i \leqslant k$, значения $y_i(1), \dots, y_i(\varphi(t))$ полностью определяются значениями

$$x_1(1), \dots, x_1(\varphi_i(\varphi(t))), \dots, x_n(1), \dots, x_n(\varphi_i(\varphi(t))).$$

Отсюда вытекает утверждение леммы.

Пусть Φ — формула. Глубиной формулы Φ называется длина l максимальной цепочки $\Phi_1, \dots, \Phi_l$ подформул формулы Φ, где для любого $i, 1 \leqslant i < l$, формула Φ_i является собственной (отличной от Φ_{i+1}) подформулой формулы Φ_{i+1}.

Следствие 3. *Пусть $f_1 \in \mathbf{C}_{\varphi_1}, \dots, f_k \in \mathbf{C}_{\varphi_k}$, Φ — формула глубины l над множеством функций $\{f_1, \dots, f_k\}$, которая реализует функцию f. Тогда $f \in \mathbf{C}_\varphi$, где*

$$\varphi(t) = \max\{\varphi_{i_1}(\dots \varphi_{i_l}(t) \dots)\}$$

и максимум берется по всем наборам $(i_1, \dots, i_l)$, для которых $\{i_1, \dots, i_l\} \subseteq \{1, \dots, k\}$.

Доказательство получается непосредственно из леммы 3 индукцией по l.

Лемма 4. *Пусть Φ — формула над множеством $\mathbf{C}$, которая реализует функцию $f(x_1, x_2) = y$, и*

$$f_1(x_1, \dots, x_{n_1}) = y_1, \dots, f_k(x_1, \dots, x_{n_k}) = y_k$$

— все неодноместные функции, входящие в формулу Φ. Тогда для любого $t_0, t_0 \geqslant 1$, найдется такое $t_1, t_1 > t_0$, что t_1 зависит только от t_0, формулы Φ, модулей непрерывности всех входящих в формулу Φ функций и удовлетворяет следующему условию: если для любого $i, 1 \leqslant i \leqslant k$, и любого $t, t_0 < t \leqslant t_1$, имеет место равенство $y_i(t) = x_1(t)$, то f не является функцией Пеано.

Доказательство. Для любого $i, 1 \leqslant i \leqslant k$, через $g_i(x_1, \dots, x_{n_i}) = z_i$ обозначим такую функцию, что

$$z_i(t) = \begin{cases} y_i(t), & \text{если } t \leqslant t_0, \\ x_1(t), & \text{если } t > t_0. \end{cases}$$

Заменим в формуле Φ каждую функцию f_i соответствующей функцией g_i. Полученную формулу обозначим через Φ'. Пусть формула Φ' реализует функцию $g(x_1, x_2) = z$. Изучим поведение функции g.

Выберем в формуле Φ' какую-либо подформулу Φ'_1 с единственным вхождением одной из функций $g_1, \dots, g_k$. Пусть, например, подформула Φ'_1 имеет вид $g_1(\Psi_1, \dots, \Psi_{n_1})$, где $\Psi_1, \dots, \Psi_{n_1}$ — либо символы переменных x_1, x_2, либо формулы над **C**, содержащие только символы одноместных функций. Предположим далее, что формулы $\Psi_1, \ldots, \Psi_{n_1}$ реализуют соответственно функции $h_1(v_1), \ldots, h_{n_1}(v_{n_1})$ (здесь $\{v_1, \ldots, v_{n_1}\} \subseteq \{x_1, x_2\}$ и для единообразия в обозначениях в случае совпадения Ψ_j с переменной v_j в качестве h_j рассматривается тождественная функция). Тогда формула Φ_1' реализует функцию

$$g_1(h_1(v_1), \ldots, h_{n_1}(v_{n_1})) = w.$$

Пусть $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n_1}$ — модули непрерывности функций $g_1, h_1, \ldots, h_{n_1}$. Тогда в силу леммы 3 значения булевых переменных $w(1), \ldots, w(t_0)$ зависят только от значений переменных

$$v_1(1), \ldots, v_1(\psi(t_0)), \ldots, v_{n_1}(1), \ldots, v_{n_1}(\psi(t_0)), \tag{6}$$

где

$$\psi(t_0) = \max(\varphi_1(\varphi(t_0)), \ldots, \varphi_{n_1}(\varphi(t_0))).$$

Следовательно, если зафиксировать значения переменных (6), то согласно определению функции g_1 значения $w(t)$ при $t > t_0$ будут зависеть только от значений $v_1(s)$, где $s > \psi(t_0)$. Иначе говоря, при фиксированных значениях переменных (6) значения функции $g_1(h_1(v_1), \ldots, h_{n_1}(v_{n_1}))$, за исключением первых t_0 разрядов, будут совпадать с соответствующими значениями одноместной функции $h_1(v_1)$. Таким образом, при указанных ограничениях на значения переменных (6) функцию $g_1(h_1(v_1), \ldots, h_{n_1}(v_{n_1}))$ можно рассматривать как функцию $h_1'(v_1)$, которая отличается от функции $h_1(v_1)$ только в первых t_0 выходных разрядах. Заметим, что модуль непрерывности функции h_1' можно считать равным φ_1.

Пусть формула Φ'' получается из формулы Φ' заменой подформулы Φ_1' формулой $h_1'(v_1)$. По сравнению с формулой Φ' формула Φ'' имеет ровно на единицу меньше вхождений функций $g_1, \ldots, g_k$. Применим теперь к формуле Φ'' описанный выше процесс выделения подформулы типа $g_1(\Psi_1, \ldots, \Psi_{n_1})$ и замены ее формулой $h_1'(v_1)$. При этом будем иметь в виду, что формула Φ'' действительна при фиксированных значениях переменных (6). В результате из формулы Φ'' будет исключена еще одна подформула, содержащая ровно одну из функций $g_1, \ldots, g_k$. Ввиду монотонности модулей непрерывности ограничения на переменные списка (6) будут заменены аналогичными ограничениями на переменные более широкого (по величине $\psi(t_0)$) списка. Продолжая подобным образом, через конечное число шагов (равное числу вхождений функций $g_1, \ldots, g_k$ в формулу Φ') придем к следующему результату.

Существует такое $i, i \in \{1, 2\}$, что при фиксированных значениях переменных

$$x_1(1), \ldots, x_1(\tau(t_0)), x_2(1), \ldots, x_2(\tau(t_0)) \tag{7}$$

значения функции $g(x_1, x_2)$ зависят только от значений булевых переменных $x_i(t)$, где $t > \tau(t_0)$, а τ определяется через модули непрерывности входящих в формулу Φ функций согласно следствию из леммы 3.

Очевидно, что функция $g(x_1, x_2)$, обладающая этим свойством, не может являться функцией Пеано.

Чтобы получить требуемый в лемме результат, заметим следующее. Если значения переменных (7) фиксированы, $s_0 = \tau(t_0)+1$ и мы хотим убедиться, что функция g, реализуемая формулой Φ', не является функцией Пеано, то достаточно рассмотреть лишь значения $z(2s_0-1)$ и $z(2s_0)$. В самом деле, будь $g(x_1, x_2)$ функцией Пеано, мы имели бы равенства

$$z(2s_0 - 1) = x_1(s_0), \qquad z(2s_0) = x_2(s_0).$$

Однако по установленному свойству функции g при $i = 1$ значение $z(2s_0)$ зависит только от значений $x_1(t)$, где $t \geqslant s_0$, а при $i = 2$ значение $z(2s_0 - 1)$ зависит только от значений $x_2(t)$, где $t \geqslant s_0$.

Вместе с тем согласно следствию из леммы 3 при вычислении значений $y(2s_0 - 1)$ и $y(2s_0)$ достаточно знать лишь первые $\tau(2s_0)$ значений всех входящих в формулу Φ функций (а также переменных x_1, x_2). Значит, если положить $t_1 = \tau(2s_0)$ и от функций $g_1, \dots, g_k$ вернуться к функциям $f_1, \dots, f_k$, удовлетворяющим условиям $y_1(t) = \ldots = y_k(t) = x_1(t)$ при $t_0 < t \leqslant t_1$, то функция $f(x_1, x_2)$, реализуемая формулой Φ, будет отличаться от функции Пеано в одном из выходных разрядов $y(2s_0 - 1), y(2s_0)$. Лемма доказана.

Пусть $\mathbf{D}$ — замкнутый класс функций из $\mathbf{C}$. Классом Слупецкого в $\mathbf{D}$ называется предполный в $\mathbf{D}$ класс, который содержит множество $\mathbf{D}^1$. Гиперконтинуальной называем мощность множества всех подмножеств континуального множества.

В лемме 5 для каждой функции $g_\alpha(x_1, x_2) = z$ семейства $\mathbf{G}$ через $\bar{g}_\alpha(x_1, x_2) = w$ обозначаем такую функцию, что для любого $t, t \geqslant 1$,

$$w(t) = z(t) \oplus x_2(t). \tag{8}$$

Лемма 5. *Пусть $\mathbf{D}$ — замкнутый класс непрерывных функций, $\mathbf{C}_{2t} \subset \mathbf{D}$ и $\mathbf{D}$ содержит континуальные семейства функций*

$$\mathbf{G} = \{g_\alpha(x_1, x_2)\}, \quad \bar{\mathbf{G}} = \{\bar{g}_\alpha(x_1, x_2)\}, \quad \alpha \in I,$$

которые обладают следующими свойствами. Для каждой функции $g_\alpha(x_1, x_2) = z$ из $\mathbf{G}$ и для любого $t, t \geqslant 1$,

$$z(t) = x_1(t) \oplus x_2(t)$$

или

$$z(t) = x_1(t).$$

Если $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \cap \{\beta_1, \dots, \beta_m\} = \varnothing$, то множество

$$[\mathbf{D}^1 \cup \{g_{\alpha_1}, \dots, g_{\alpha_k}, \bar{g}_{\beta_1}, \dots, \bar{g}_{\beta_m}\}]$$

не содержит функции $x_1 \oplus x_2$. Тогда в $\mathbf{D}$ имеется гиперконтинуальное семейство классов Слупецкого.

Доказательство. Каждому подмножеству J множества I сопоставим подмножество $\mathbf{R}_J$ класса $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{R}_J = \mathbf{D}^1 \cup \left(\bigcup_{\alpha \in J} \{g_\alpha\} \right) \cup \left(\bigcup_{\beta \in I \setminus J} \{\bar{g}_\beta\} \right).$$

Покажем, что $[\mathbf{R}_J] \neq \mathbf{D}$. Предположим, что это не так. Тогда, в частности, найдутся конечное подмножество $\mathbf{F}$ множества $\mathbf{D}^1$ и конечные множества $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ такие, что

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset J, \qquad \{\beta_1, \dots, \beta_m\} \subset I \setminus J$$

и
$$(x_1 \oplus x_2) \in [\mathbf{F} \cup \{g_{\alpha_1}, \dots, g_{\alpha_k}, \bar{g}_{\beta_1}, \dots, \bar{g}_{\beta_m}\}]$$
(напомним, что $\mathbf{C}_{2t} \subset \mathbf{D}$ и потому $(x_1 \oplus x_2) \in \mathbf{D}$). Это противоречит выбору семейств $\mathbf{G}$ и $\bar{\mathbf{G}}$.

Далее, если $J_1 \neq J_2$, то
$$[\mathbf{R}_{J_1} \cup \mathbf{R}_{J_2}] = \mathbf{D}.$$
Действительно, так как $J_1 \neq J_2$, пусть, например, $J_1 \setminus J_2 \neq \varnothing$ и $\alpha \in J_1 \setminus J_2$. Тогда $g_\alpha \in \mathbf{R}_{J_1}$, $\bar{g}_\alpha \in \mathbf{R}_{J_2}$. Из определения функций $g_\alpha, \bar{g}_\alpha$ следует, что
$$g_\alpha(\bar{g}_\alpha(x_1, x_2), x_2) = x_1 \oplus x_2.$$
Применяя лемму 2, замечаем, что функция $x_1 \oplus x_2$ вместе с множеством $\mathbf{D}^1$ образует полную в $\mathbf{D}$ систему.

Итак, мы имеем гиперконтинуальное семейство $\{[\mathbf{R}_J]\}$ замкнутых подклассов класса $\mathbf{D}$, каждый из которых содержит множество $\mathbf{D}^1$ и отличен от $\mathbf{D}$, причем никакие два различные класса этого семейства не могут целиком содержаться в замкнутом подклассе класса $\mathbf{D}$, отличном от $\mathbf{D}$. Кроме того, в силу леммы 2 любое множество $\mathbf{R}_J \cup \{x_1 \oplus x_2\}$ является полным в $\mathbf{D}$. В этом случае согласно известному теоретико-множественному утверждению [2] класс $[\mathbf{R}_J]$ можно расширить до предполного в $\mathbf{D}$ класса, то есть до класса Слупецкого. Это завершает доказательство леммы.

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{D}$ *— замкнутый класс непрерывных функций,* $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots\}$ *— последовательность монотонных функций, содержащая функцию* $2t$, *и*
$$\mathbf{D} = \bigcup_{i \geqslant 1} \mathbf{C}_{\varphi_i}.$$
Тогда мощность семейства классов Слупецкого в $\mathbf{D}$ *гиперконтинуальна.*

Доказательство. Поскольку класс $\mathbf{D}$ состоит из континуального множества функций (это следует из включений $\mathbf{C}_{2t} \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{C}$), утверждение теоремы будет вытекать из леммы 5, если доказать, что классу $\mathbf{D}$ принадлежат континуальные семейства $\mathbf{G}$ и $\bar{\mathbf{G}}$, удовлетворяющие требованиям леммы.

В качестве множества индексов I континуального семейства $\mathbf{G} = \{g_\alpha(x_1, x_2)\}$ возьмем множество бесконечных двоичных последовательностей $\alpha = a_1 a_2 \dots$, где $a_i \in E_2$ при $i = 1, 2, \dots$ Функции g_α семейства $\mathbf{G}$ будут определяться по шагам (функции $\bar{g}_\alpha$ определяются через функции g_α с помощью (8)). На шаге 1 будут определены начальные отрезки $g_{a_1 \dots a_k}, \bar{g}_{a_1 \dots, a_k}$ функций g_α, $\bar{g}_\alpha$ $(\alpha = a_1 \dots a_k \dots)$, которые совпадают с функциями $g_\alpha, \bar{g}_\alpha$ для значений t от 1 до t_1. При $t > t_1$ значения функций $g_{a_1 \dots a_k}$, $\bar{g}_{a_1 \dots a_k}$ на шаге 1 не определяются. Вообще, на шаге s определяются начальные отрезки $g_{a_1 \dots a_m}$, $\bar{g}_{a_1 \dots a_m}$ функций $g_\alpha, \bar{g}_\alpha$ для значений t от 1 до t_s. Для любой последовательности α функция g_α будет представлять собой предел последовательности функций $g_{a_1 \dots a_n}$, где $a_1 \dots a_n$ — начало последовательности α.

Пусть $h_1, h_2, \dots$ — счетная последовательность символов одноместных функций, $\Psi_1(x_1, x_2), \Psi_2(x_1, x_2), \dots$ — счетная последовательность всех формул, которые удовлетворяют следующим требованиям. Каждая формула $\Psi_i(x_1, x_2)$ построена из символов переменных x_1, x_2, символов одноместных функций h_j и символов двуместных функций $g_{a_1\ldots a_n}, \bar{g}_{a_1\ldots a_n}$, $n = 1, 2, \ldots$; все входящие в формулу $\Psi_i(x_1, x_2)$ символы функций $g_{a_1\ldots a_n}$, $\bar{g}_{b_1\ldots b_n}$ имеют в качестве индексов двоичные последовательности $a_1 \ldots a_n$, $b_1 \ldots b_n$ одной и той же длины n; формула $\Psi_i(x_1, x_2)$ не содержит одновременно символы противоположных функций $g_{a_1\ldots a_n}$, $\bar{g}_{a_1\ldots a_n}$.

Для содержательного понимания приводимого ниже построения следует иметь в виду, что формулы $\Psi_i(x_1, x_2)$ играют роль моделей формул над множеством функций $\mathbf{D}^1 \cup \mathbf{G} \cup \bar{\mathbf{G}}$, в которых в роли одноместных функций из $\mathbf{D}^1$ с модулями непрерывности $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ выступают соответственно функции $h_1, h_2, \ldots$, а в роли функций $g_\alpha, \bar{g}_\alpha$ — функции $g_{a_1\ldots a_n}, \bar{g}_{a_1\ldots a_n}$, где $a_1 \ldots a_n$ есть начало последовательности α.

Приступим к определению функций $g_{a_1\ldots a_n}, \bar{g}_{a_1\ldots a_n}$.

Шаг 1. Рассматриваем формулу $\Psi_1(x_1, x_2)$. Пусть она построена из символов функций

$$h_{i_1}, \ldots, h_{i_r}, g_{a_1\ldots a_k}, \ldots, g_{b_1\ldots b_k}, \bar{g}_{c_1\ldots c_k}, \ldots, \bar{g}_{d_1\ldots d_k}.$$

Для любого двоичного набора $e_1 \ldots e_k$ длины k определим k значений функции $g_{e_1\ldots e_k}(x_1, x_2) = y$, полагая

$$y(t) = \begin{cases} x_1(t), & e_t = 0, \\ x_1(t) \oplus x_2(t), & e_t = 1 \end{cases} \tag{9}$$

$(1 \leqslant t \leqslant k)$. Функция $\bar{g}_{e_1\ldots e_k}(x_1, x_2) = y$ определяется противоположным образом:

$$y(t) = \begin{cases} x_1(t) \oplus x_2(t), & e_t = 0, \\ x_1(t), & e_t = 1. \end{cases}$$

Считая, что $h_{i_1}, \ldots h_{i_r}$ суть обозначения функций из $\mathbf{D}^1$, имеющих соответственно модули непрерывности $\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_r}$, и $t_0 = k$, выбираем согласно лемме 4 (все модули непрерывности функций (10), выступающих в лемме 4 в роли функций f_j, равны t) число $t_1, t_1 > t_0$, и для каждой из функций

$$g_{a_1\ldots a_k}, \ldots, g_{b_1\ldots b_k}, \bar{g}_{c_1\ldots c_k}, \ldots, \bar{g}_{d_1\ldots d_k} \tag{10}$$

при $t_0 < t \leqslant t_1$ полагаем значение $y(t)$ равным $x_1(t)$. Если при этом значение $y(t)$ некоторой функции $g_{e_1\ldots e_k}$ при $t_0 < t \leqslant t_1$ не будет определено, то также полагаем $y(t) = x_1(t)$. Неопределенные значения функций $\bar{g}_{e_1\ldots e_k}$ определяем по формуле (8). Переходим к шагу 2.

Шаг $s + 1$. Пусть уже проделаны s шагов построения и для некоторых натуральных l и t_s значения $y(t)$ всех функций $g_{e_1\ldots e_l}(x_1, x_2)$, $\bar{g}_{e_1\ldots e_l}(x_1, x_2)$ определены для всех $t, 1 \leqslant t \leqslant t_s$. Рассмотрим формулу $\Psi_{s+1}(x_1, x_2)$. Пусть она состоит из символов функций

$$h_{i_1}, \ldots h_{i_r}, g_{a_1\ldots a_m}, \ldots, g_{b_1\ldots b_m}, \bar{g}_{c_1\ldots c_m}, \ldots, \bar{g}_{d_1\ldots d_m}.$$

Далее различаем два случая, $m \leqslant l$ и $m > l$.

Пусть $m \leqslant l$. Для каждого из наборов

$$(a_1, \ldots, a_m), \ldots, (b_1, \ldots, b_m), (c_1, \ldots, c_m), \ldots, (d_1, \ldots, d_m)$$

выберем какое-либо расширение длины l:

$$(a_1, \dots, a_l), \dots, (b_1, \dots, b_l), (c_1, \dots, c_l), \dots, (d_1, \dots, d_l).$$

Предполагая, что $h_{i_1}, \dots, h_{i_r}$ суть обозначения функций из $\mathbf{D}^1$, имеющих соответственно модули непрерывности $\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_r}$, возьмем в лемме 4 в качестве t_0 величину t_s, в качестве функций f_j функции

$$g_{a_1 \dots a_l}, \dots, g_{b_1 \dots b_l}, \bar{g}_{c_1 \dots c_l}, \dots, \bar{g}_{d_1 \dots d_l} \tag{11}$$

(модули непрерывности которых равны t) и найдем соответствующую величину $t_{s+1}, t_{s+1} > t_s$. При $t_s < t \leqslant t_{s+1}$ значения $y(t)$ каждой из функций (11) полагаем равным $x_1(t)$. Если значения $y(t)$ функции $g_{e_1 \dots e_l}$ при этом остаются неопределенными, то также полагаем $y(t) = x_1(t)$. Неопределенные значения функций $\bar{g}_{e_1 \dots e_l}$ определяем по формуле (8). Переходим к шагу $s + 2$.

Пусть $m > l$. Тогда сначала определяем значения $y(t)$ всех функций $g_{e_1 \dots e_m}$ при $t_s < t \leqslant t_s + m - l$, полагая

$$y(t+j) = \begin{cases} x_1(t+j), & e_j = 0, \\ x_1(t+j) \oplus x_2(t+j), & e_j = 1 \end{cases} \tag{12}$$

$(1 \leqslant j \leqslant m - l)$. Значения $y(t)$ функций $\bar{g}_{e_1 \dots e_m}$ определяем противоположным образом. Затем, принимая величину $t_s + m - l$ за новое значение t_s, поступаем так же, как в случае $m \leqslant l$. В завершение переходим к шагу $s + 2$.

Заметим, во-первых, что для любого натурального n на шагах конструкции определяются 2^n различных функций $g_{e_1 \dots e_n}$. Это вытекает из (9) и (12), причем последнее соотношение выполняется для бесконечного числа значений s, поскольку в формулы последовательности $\{\Psi_i(x_1, x_2)\}$ входят все символы функций $g_{a_1 \dots a_n}, n \geqslant 1$. Таким образом, для любой последовательности $\alpha = a_1 a_2 \dots$ будут определены все функции $g_{a_1}, g_{a_1 a_2}, \dots$ Как видно из построения этих функций, каждая функция $g_{a_1 \dots a_{n+1}}$ есть расширение функции $g_{a_1 \dots a_n}$. Следовательно, определение функции g_α в виде предела последовательности функций $g_{a_1}, g_{a_1 a_2}, \dots$ корректно. Кроме того, если $\beta = b_1 b_2 \dots, \alpha \neq \beta$ и, например, $a_n \neq b_n$, то функции $g_{a_1 \dots a_n}$ и $g_{b_1 \dots b_n}$, как это следует из (9) и (12), будут различными. Значит, различными будут и функции g_α, g_β. Это приводит к континуальному семейству функций $\mathbf{G} = \{g_\alpha(x_1, x_2)\}$. Из построения вытекает также, что если $g_\alpha(x_1, x_2) = y$, $\bar{g}_\alpha(x_1, x_2) = z$, то при любом $t, t \geqslant 1$, выполняется равенство $z(t) = y(t) \oplus x_2(t)$.

Пусть теперь $\Phi(x_1, x_2)$ — формула над множеством функций $\mathbf{D}^1 \cup \mathbf{G} \cup \bar{\mathbf{G}}$, которая не содержит одновременно никаких двух функций вида g_α, $\bar{g}_\alpha$ и которая реализует функцию $g(x_1, x_2)$. Выберем число m с таким расчетом, чтобы индексы α всех входящих в формулу Φ функций $g_\alpha, \bar{g}_\alpha$ различались в первых m разрядах. Далее, пусть входящие в формулу Φ одноместные функции $f_1, \dots, f_r$ из $\mathbf{D}^1$ имеют соответственно модули непрерывности $\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_r}$. Тогда формуле $\Phi(x_1, x_2)$ отвечает в приведенном выше построении некоторая формула $\Psi_s(x_1, x_2)$, составленная из символов переменных x_1, x_2, символов одноместных функций $h_{i_1}, \dots, h_{i_r}$ и символов функций $g_{a_1 \dots a_m}$, $\bar{g}_{b_1 \dots b_m}$, где $a_1 \dots a_m$ и $b_1 \dots b_m$ суть начала последовательностей α, β, для которых функции g_α и $\bar{g}_\beta$ входят в формулу $\Phi(x_1, x_2)$. На шаге s конструкции функции $g_{a_1 \dots a_m}, \bar{g}_{b_1 \dots b_m}$ в соответствии с леммой 4 будут доопределены на конечном интервале значений t таким образом, что применение формулы Φ к любым дальнейшим доопределениям этих функций (в частности, к функциям $g_\alpha, \bar{g}_\beta$) приводит к функциям, отличным от $x_1 \oplus x_2$. Таким образом, функция $g(x_1, x_2)$, реализуемая формулой $\Phi(x_1, x_2)$, будет отлична от функции $x_1 \oplus x_2$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Кудрявцев В. Б., Относительно функциональных систем. *Проблемы кибернетики* (1984), **41**, 5–40.
2. Кон Г., *Универсальная алгебра.* Мир, Москва, 1968.
3. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику.* Наука, Москва, 1986.
4. Кудрявцев В. Б., О мощностях множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами. *Проблемы кибернетики* (1965) **13**, 45–74.
5. Бабин Д. Н., О полноте двуместных о.-д. функций относительно суперпозиции. *Дискретная математика* (1989) **1**, №4, 86–91.
6. Марченков С. С., О классах Слупецкого для детерминированных функций. *Дискретная математика* (1998) **10**, №2, 128–136.
7. Марченков С. С., Об одном методе анализа суперпозиций непрерывных функций. *Проблемы кибернетики* (1980) **37**, 5–17.
8. Трахтенброт Б. А., Барздинь Я. М., *Конечные автоматы.* Наука, Москва, 1970.
9. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. *Функции алгебры логики и классы Поста.* Наука, Москва, 1966.

Статья поступила 10.02.1999.