Г. М. Адельсон-Вельский, Ю. А. Шрейдер, Банахово среднее на группах, *УМН*, 1957, том 12, выпуск 6, 131–136

1957 г. ноябрь—декабрь *т. XII, вып. 6 (78)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

НАУЧНЫЕ СООБЩЕНЯ И ЗАДАЧИ

БАНАХОВО СРЕДНЕЕ НА ГРУППАХ

Г. М. Адельсон-Вельский и Ю. А. Шрейдер

Банаховым средним [1]) на группе $\mathfrak{G}$ мы будем называть функционал L, определенный для всех ограниченных вещественных функций $f(g)$ на группе $\mathfrak{G}$ и обладающий следующими свойствами:

$$L\{\lambda f+\mu\varphi\}=\lambda L\{f\}+\mu L\{\varphi\}, \tag{1}$$

$$\inf_g f(g)\leqslant L\{f\}\leqslant \sup_g f(g), \tag{2}$$

$$L\{f(g)\}=L\{f(gh)\}, \tag{3}$$

где h — любой элемент группы $\mathfrak{G}$, а λ, μ — числа.

Банахово среднее является естественным обобщением так называемого банахова предела [1]. Как мы увидим ниже, банахово среднее существует не на всякой группе $\mathfrak{G}$. Роль групп, на которых существует банахово среднее, показывает, например, следующая

Теорема 1. *Если на группе $\mathfrak{G}$ существует банахово среднее и группа $\mathfrak{G}$ обладает ограниченным представлением в кольце операторов в гильбертовом пространстве, то группа $\mathfrak{G}$ обладает эквивалентным данному унитарным представлением.*

Доказательство можно провести, обобщая рассуждения Б. С.-Надя [2]. Мы рассмотрим здесь условия, достаточные для того, чтобы на группе $\mathfrak{G}$ существовало банахово среднее.

Пусть имеется конечное множество E, состоящее из элементов $g_1, g_2, \ldots, g_k$. Возьмем все возможные произведения, в которых участвует не более чем n из этих элементов в произвольном порядке: $g_{i_1}g_{i_2}\cdots g_{i_n}$. Множество всех таких произведений мы обозначим через E^n. Обозначим через

$$l_n=l_n(g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n) \tag{4}$$

число элементов множества E^n.

Определение 1. Группа $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию (A), если для любых $g_1, g_2, \ldots, g_k\in\mathfrak{G}$ и любого числа $\varepsilon>0$ имеет место оценка

$$l_n=o(e^{\varepsilon n}).$$

[1]) Точнее, *правым банаховым средним.*

Например, в случае абелевой группы $\mathfrak{G}$

$$l_n \leqslant n^k = o\left(e^{\varepsilon n}\right),$$

в случае конечной группы

$$l_n = O(1) = o\left(e^{\varepsilon n}\right),$$

в случае свободной группы, если $g_1, g_2, \ldots, g_k$ суть ее образующие, то

$$l_n = k^n.$$

В последнем случае условие (A) не удовлетворяется.

Теорема 2. *На всякой группе $\mathfrak{G}$, удовлетворяющей условию (A), существует банахово среднее.*

Доказательство будет основано на следующей конструкции. Пусть $f(g)$ — функция на группе $\mathfrak{G}$, тогда каждому конечному множеству $E \subset \mathfrak{G}$ мы поставим в соответствие число

$$f(E) = \frac{1}{|E|} \sum_{g \in E} f(g), \tag{5}$$

где $|E|$ означает *количество элементов* множества E.

Назовем *нормой* функции $f(g)$ величину[1])

$$\|f\| = \limsup_{E} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |f(E^k)|, \tag{6}$$

где $f(E)$ обозначает функцию множества, соответствующую функции $f(g)$ согласно (5).

Лемма 1. *Если группа $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию (A), то для любого $h \in \mathfrak{G}$*

$$\|f(g) - f(gh)\| = 0. \tag{7}$$

В самом деле, возьмем некоторое конечное множество E, содержащее элемент h; как и раньше, обозначим $l_k = |E^k|$. Так как, по предположению, группа $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию (A), то для любого наперед заданного $\delta > 0$ найдется такое n, что

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{l_{k+1} - l_k}{l_k} < \delta. \tag{8}$$

В самом деле, если бы было для всех n

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{l_{k+1} - l_k}{l_k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{l_{k+1}}{l_k} - 1\right) > a > 0,$$

то число членов этой суммы, для которых $\frac{l_{k+1}}{l_k} - 1 < \frac{a}{2}$, не превосходит $\frac{a - l_1 + 1}{\frac{a}{2} - l_1 + 1} n$, так как всегда $\frac{l_{k+1}}{l_k} - 1 \leqslant l_1 - 1$. Следовательно, для $\frac{a}{2(l_1 - 1) - a} n$ членов $\frac{l_{k+1}}{l_k} > 1 + \frac{a}{2}$.

[1]) Предел $\limsup\limits_{E}$ берется в смысле С. О. Шатуновского по частично упорядоченной системе всех конечных подмножеств группы $\mathfrak{G}$.

Отсюда следует, что

$$l_n > \left[\left(1+\frac{a}{2}\right)^{\frac{a}{2(l_1-1)-a}}\right]^n = b^n,$$

а это противоречит условию (A).

Теперь можно написать оценку

$$|f(E^k)-f(E^kh)| = \frac{1}{l_k}\left|\sum_{g\in E^k} f(g) - \sum_{g'\in E^kh} f(g')\right| \leqslant \frac{1}{l_k}\left|\sum_{g\in E^k\setminus E^kh} f(g) - \sum_{g'\in E^kh\setminus E^k} f(g')\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\,\frac{|E^{k+1}\setminus E^k|}{l_k}\sup|f(g)| = 2\sup|f(g)|\left(\frac{l_{k+1}}{l_k}-1\right). \tag{9}$$

Отсюда на основании (8) имеем

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f(E^k)-f(E^kh)| < 2\sup|f(g)|\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{l_{k+1}}{l_k}-1\right) = o(1). \tag{10}$$

Это и значит, что

$$\|f(g)-f(gh)\| = 0. \tag{11}$$

Лемма 1 доказана.

Каждой функции множеств (конечных) $\varphi(E)$ мы поставим теперь в соответствие два числа:

$$S\{\varphi\} = \lim_{E}\sup\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(E^k), \tag{12}$$

$$J\{\varphi\} = \lim_{E}\inf\lim_{n\to\infty}\inf\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(E^k). \tag{12'}$$

Ясно, что

$$\inf_g f(g) \leqslant J\{f(E)\} \leqslant S\{f(E)\} \leqslant \sup_g f(g). \tag{13}$$

Из леммы 1 и неравенств (13) следует

Теорема 3. *Если группа $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию (A), то всякий линейный функционал $L\{f\}$ в пространстве функций множеств (конечных) с нормой, определенной равенством* (6) *и удовлетворяющий условию*

$$J\{f\} \leqslant L\{f\} \leqslant S\{f\}, \tag{14}$$

определяет банаховское среднее на группе $\mathfrak{G}$ с помощью соотношения

$$L\{f(g)\} = L\{f(E)\}. \tag{15}$$

Можно показать, что и обратно, всякое банаховское среднее на группе $\mathfrak{G}$, удовлетворяющей условию (A), порождается вышеописанной конструкцией.

Чтобы построить линейный функционал в пространстве функций множеств, удовлетворяющий условию (14), поступим следующим образом. Заметим, что рассматриваемое пространство функций множеств является коммутативным нормированным вещественным кольцом, если определить умножение формулой

$$f(E)\,f_1(E) = ff_1(E), \tag{16}$$

а норму формулой (6). При этом из легко проверяемого соотношения

$$\| f^2 \| = \| f \|^2 \tag{17}$$

следует [3], что данное кольцо есть кольцо всех непрерывных функций $\sigma(M)$ на некотором бикомпакте $\mathfrak{M}$ (пространстве максимальных идеалов кольца). При этом, если функции множества $f(E)$ соответствует функция $\sigma_f(M)$ на $\mathfrak{M}$, то

$$J\{f\} = \min_M \sigma_f(M), \tag{18}$$

$$S\{f\} = \max_M \sigma_f(M). \tag{19}$$

Таким образом, по теореме А. А. Маркова [4] всякий функционал, удовлетворяющий условию (14), представим в виде

$$L\{f(E)\} = \int\limits_{\mathfrak{M}} \sigma_f(M)\, d\Phi, \tag{20}$$

где Φ вполне аддитивная неотрицательная мера на $\mathfrak{M}$, полное изменение которой равно единице.

Приведем теперь примеры групп, на которых отсутствует банахово среднее:

1. Свободная группа с двумя образующими a и b. Всякий элемент этой группы может быть представлен в виде несократимого «слова», оканчивающегося либо на a, либо на b, либо на a^{-1}, либо на b^{-1}.

Пусть $f(g) = 1$, если g оканчивается на a и $f(g) = 0$ в противном случае. Тогда $\varphi(g) = f(ga) = 1$, если g оканчивается на любую букву, кроме a^{-1}. А $\psi_b(g) = \varphi(g) - f(g) = 1$, если g оканчивается на b или b^{-1}, и $\psi_b(g) = 0$ в противном случае. Если бы на свободной группе существовало банахово среднее, то мы имели бы $L\{\psi_b\} = L\{\varphi\} - L\{f\} = 0$. Аналогично мы могли бы показать, что $L\{\psi_a\} = 0$, где $\psi_a(g) = 1$, если g оканчивается на a или a^{-1} и $\psi_a(g) = 0$ в противном случае. Но тогда согласно свойству (1):

$$1 = L\{1\} = L\{\psi_a(g) + \psi_b(g)\} = 0 + 0 = 0. \tag{21}$$

Полученное противоречие показывает, что на свободной группе отсутствует банахово среднее.

2. Группа вращений трехмерного пространства. Основываясь на известном примере [5], можно показать, что на этой группе также нет банахова среднего.

Интересно было бы выяснить, является ли условие (A) необходимым для существования банахова среднего на группе. Во всяком случае, если это условие не выполнено, то указанная здесь конструкция не проходит. Именно, можно показать, что в этом случае лемма 1 заведомо не верна. Однако необходимое и достаточное условие для существования банахова среднего на группе может быть получено иным способом.

Теорема 4. *Для существования банахова среднего на группе $\mathfrak{G}$ необходимо и достаточно, чтобы было выполнено следующее условие: если группа $\mathfrak{G}$ представлена в виде суммы непересекающихся подмножеств*

$E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n h_n \supset \mathfrak{G}$, *то нельзя разбить эти подмножества на две совокупности* $E_1, E_2, \ldots, E_k$ и $E_{k+1}, \ldots, E_n$ *и так сдвинуть каждое из множеств, чтобы* $E_1 h_1 \cup E_2 h_2 \ldots \cup E_k h_n \supset \mathfrak{G}$ *и*

$$E_{k+1} h_{k+1} \cup \ldots \cup E_n h_n \supset \mathfrak{G}.$$

Укажем еще несколько просто доказываемых полезных результатов относительно банаховских средних.

Теорема 5. *Если на группе $\mathfrak{G}$ существует банахово среднее, то оно существует на любой ее подгруппе $H \subset \mathfrak{G}$ и в пространстве классов смежности $\mathfrak{G}/H$.*

Теорема 6. *Если на группе $\mathfrak{G}$ существует правое банахово среднее, то на ней существует и двустороннее банахово среднее.*

Доказательство. Пусть $L\{f(g)\}$ — правое банахово среднее, обозначим $\varphi(h) = L\{f(hg)\}$. Функция $\varphi(h)$ ограничена, а функционал $L^*\{f\} = L\{\varphi(h)\}$ является двусторонним банаховым средним.

Теорема 7. *Если группа $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию (A), то всякое правое банахово среднее является также двусторонним банаховым средним.*

В самом деле, в этом случае банахово среднее дается формулой (15), а, как нетрудно видеть, эта формула порождает двустороннее банахово среднее.

Если бы еще удалось доказать, что существует $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{l_{k+1}}{l_k}$, то конструкция несколько упростилась бы, именно можно было бы писать норму вместо (6) в виде

$$\|f\|_1 = \limsup_{E} \limsup_{k\to\infty} |f(E^k)|. \tag{22}$$

В частности, такой нормой можно пользоваться для абелевых групп.

Заметим, что понятие банахова среднего и теорема 2 могут быть перенесены на полугруппы[1]). С помощью этого понятия могут быть также обобщены результаты А. А. Маркова о существовании интегрального инварианта [6]. В формулировке этих результатов слова «абелево множество преобразований», могут быть заменены «полугруппа преобразований, удовлетворяющая условию (A)».

Параллельную теорию можно развить для непрерывных функций на топологических группах с мерой Хаара.

Роль условия (A) играет в этом случае следующее условие (A^*): для всякого элемента h существует окрестность единицы $U \ni h$, такая, что $\mu(U^n) = o(e^{\varepsilon n})$, где $\mu(U^n)$ есть мера n-й степени окрестности U.

Функция множества определяется по функции точки так:

$$f(E) = \frac{1}{\mu(E)} \int\limits_E f(g)\, d\mu(g).$$

[1]) Полугруппой мы называем множество с одной операцией, отличающееся от группы тем, что существование обратного не предполагается.

Норма задается условием

$$\| f(g) \| = \limsup_{U} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(U^k).$$

Интересно выяснить связь между обоими понятиями банахового среднего. Другая задача состоит в том, чтобы установить, для всякой ли группы, удовлетворяющей условию (A), существует полная система конечномерных представлений.

В заключение авторы выражают свою признательность И. М. Гельфанду за обсуждение приведенных результатов.

Поступило в редакцию 2 ноября 1956 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Banach, Theorie des operations linéaires, Warszawa, 1932, 33.

[2] B. S.-Nady, Acta Sci. math. 3, (1948).

[3] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, Коммутативные нормированные кольца, УМН I, вып. 2(12) (1946).

[4] А. А. Марков, Матем. сб. 1 (46): 1 (1938), 165.

[5] S. Banach, A. Tarsky, Fund. Math. 6.

[6] А. А. Марков, ДАН 17 (1937).