А. Л. Делицын, Задача дифракции в волноводе,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 3, 375–381

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 3, с. 375–381

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958:535.4

ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ В ВОЛНОВОДЕ

© 2005 г. **А. Л. Делицын**

Рассматривается задача дифракции на диэлектрическом теле в волноводе. В случае наличия в среде, заполняющей волновод, поглощения разрешимость задачи дифракции следует из энергетических оценок, полученных в работе [1]. Цель настоящей работы – доказательство разрешимости этой задачи в случае отсутствия в среде поглощения.

Задача рассматривается в цилиндре $Q = ((x, y) \in \Omega, z \in (-\infty, \infty))$. Область Ω односвязная, граница области $\partial\Omega$ состоит из конечного числа бесконечно дифференцируемых дуг и удовлетворяет условию конуса. Задача описывается системой уравнений Максвелла, приведенной к виду

$$\operatorname{rot} \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H - k^2 H = 0, \quad \operatorname{div} H = 0. \tag{1}$$

На боковой поверхности всюду, за исключением угловых точек, зададим граничные условия

$$\operatorname{rot} H \times n|_{\partial Q} = 0, \quad Hn|_{\partial Q} = 0. \tag{2}$$

Параметр k вещественный. Функция ε удовлетворяет условию $1 \le \varepsilon \le \varepsilon_{\max}$ в области V_0, занятой диэлектрическим телом, $\varepsilon \equiv 1$, $(x, y, z) \notin V_0$. Считаем, что диэлектрическое тело лежит в области $z_1 + \tau < z < z_2 - \tau$. Область $\overline{V}_0$ представима в виде объединения конечного числа областей $\overline{V}_0 = \bigcup_i \overline{V}_i$. В областях V_i функция ε бесконечно дифференцируемая. Границы областей V_i состоят из конечного числа бесконечно дифференцируемых поверхностей и удовлетворяют условию конуса. Будем искать решение H, бесконечно дифференцируемое, в областях $\overline{V}_i$ всюду, за исключением ребер и конических точек.

На гладких участках поверхностей разрыва S диэлектрической проницаемости поставим условия сопряжения

$$[H \times n]|_S = 0, \tag{3}$$

$$[\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H \times n]|_S = 0. \tag{4}$$

В качестве условия на ребре потребуем, чтобы $H \in ((L_2)^3)^{\mathrm{loc}}$, $\operatorname{rot} H \in ((L_2)^3)^{\mathrm{loc}}$, т.е. условие ограниченности L_2 нормы векторов H и $\operatorname{rot} H$ в любой конечной подобласти цилиндра Q.

Поставим парциальные условия излучения Свешникова [1] в областях $z < z_1 + \tau$, $z > z_2 - \tau$.

Пусть χ_n, ψ_n – собственные функции задачи

$$-\Delta_\perp \chi_n = \lambda_{1n} \chi_n, \quad \chi_n|_{\partial\Omega} = 0, \tag{5}$$

$$-\Delta_\perp \psi_n = \lambda_{2n} \psi_n, \quad \partial\psi_n / \partial n|_{\partial\Omega} = 0. \tag{6}$$

Обозначим

$$i\gamma_{1n} = \sqrt{k^2 - \lambda_{1n}}, \quad n = \overline{1, N_1}, \quad \lambda_{1n} < k^2, \quad \gamma_{1n} = \sqrt{\lambda_{1n} - k^2}, \quad n > N_1, \quad \lambda_{1n} > k^2,$$

$$i\gamma_{2n} = \sqrt{k^2 - \lambda_{2n}}, \quad n = \overline{1, N_2}, \quad \lambda_{2n} < k^2, \quad \gamma_{2n} = \sqrt{\lambda_{2n} - k^2}, \quad n > N_2, \quad \lambda_{2n} > k^2.$$

Считаем, что $k^2 \ne \lambda_{1n}$, $k^2 \ne \lambda_{2n}$ и что из $-\infty$ падает нормальная волна вида $H = A \operatorname{rot} \chi_m e_z e^{i\gamma_{1m} z}$, где A – константа, $m \le N_1$. Условия излучения представим в виде требования разложимости вектора H при $z < z_1 + \tau$, $z > z_2 - \tau$ в сходящиеся в $(L_2(\Omega))^2$ ряды

$$H=\sum_{n=1}^{N_1} a_n \operatorname{rot}\chi_n e_z e^{i\gamma_{1n}z}+\sum_{n=N_1+1}^{\infty} a_n \operatorname{rot}\chi_n e_z e^{-\gamma_{1n}z}+\sum_{n=1}^{N_2} c_n(i\gamma_{2n}\operatorname{grad}_\perp\psi_n+\lambda_{2n}\psi_n e_z)e^{i\gamma_{2n}z}+$$

$$+\sum_{n=N_2+1}^{\infty} c_n(-\gamma_{2n}\operatorname{grad}_\perp\psi_n+\lambda_{2n}\psi_n e_z)e^{-\gamma_{2n}z},\quad z>z_2, \tag{7}$$

$$H=\sum_{n=1}^{N_1} b_n \operatorname{rot}\chi_n e_z e^{-i\gamma_{1n}z}+\sum_{n=N_1+1}^{\infty} b_n \operatorname{rot}\chi_n e_z e^{\gamma_{1n}z}+\sum_{n=1}^{N_2} d_n(-i\gamma_{2n}\operatorname{grad}_\perp\psi_n+\lambda_{2n}\psi_n e_z)e^{-i\gamma_{2n}z}+$$

$$+\sum_{n=N_2}^{\infty} d_n(\gamma_{2n}\operatorname{grad}_\perp\psi_n+\lambda_{2n}\psi_n e_z)e^{\gamma_{2n}z}+Ae^{i\gamma_{1m}z}\operatorname{rot}\chi_m e_z,\quad z<z_1. \tag{8}$$

В случае, если вектор H представим в областях $z<z_1+\tau$, $z>z_2-\tau$ в виде сходящихся в $L_2(\Omega)$ рядов, то вектор $\operatorname{rot} H\in(L_2)^{3,\mathrm{loc}}$ представим в виде сходящихся в $L_2(\Omega)$ рядов

$$\operatorname{rot} H=\sum_{n=1}^{N_1} a_n(i\gamma_{1n}\operatorname{grad}_\perp\chi_n+\lambda_{1n}\chi_n e_z)e^{i\gamma_{1n}z}+\sum_{n=N_1+1}^{\infty} a_n(\gamma_{1n}\operatorname{grad}_\perp\chi_n+\lambda_{1n}\chi_n e_z)e^{-\gamma_{1n}z}+$$

$$+k^2\sum_{n=1}^{N_2} c_n\operatorname{rot}\psi_n e_z e^{-i\gamma_{2n}z}+k^2\sum_{n=N_2+1}^{\infty} c_n\operatorname{rot}\psi_n e_z e^{\gamma_{2n}z},\quad z>z_2, \tag{9}$$

$$\operatorname{rot} H=\sum_{n=1}^{N_1} b_n(i\gamma_{1n}\operatorname{grad}_\perp\chi_n+\lambda_n\chi_n e_z)e^{i\gamma_{1n}z}+\sum_{n=N_1+1}^{\infty} b_n(\gamma_{1n}\operatorname{grad}_\perp\chi_n+$$

$$+\lambda_{1n}\chi_n e_z)e^{\gamma_{1n}z}+k^2\sum_{n=1}^{N_2} d_n\operatorname{rot}\psi_n e_z e^{-i\gamma_{2n}z}+k^2\sum_{n=N_2+1}^{\infty} d_n\operatorname{rot}\psi_n e_z e^{-\gamma_{2n}z}+$$

$$+Ae^{i\gamma_{1m}z}(i\gamma_{1m}\operatorname{grad}_\perp\chi_m+\lambda_{1m}\chi_m e_z),\quad z<z_1, \tag{10}$$

поскольку в силу теорем Фубини и Б. Леви [2] векторы H и $\operatorname{rot} H$ при почти всех z представимы в виде

$$H=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\overline{Z}}_{2n}\operatorname{grad}_\perp\psi_n+\sum_{n=1}^{\infty} Z_{1n}\operatorname{rot}\chi_n e_z+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\overline{Z}}_{3n}\psi_n e_z, \tag{11}$$

$$\operatorname{rot} H=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{Z}_{2n}\operatorname{rot}\psi_n e_z+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{Z}_{1n}\operatorname{grad}_\perp\chi_n+\lambda_{1n}\overline{Z}_{3n}\chi_n e_z, \tag{12}$$

$Z_{in},\overline{Z}_{in}\in L_2$, $i=\overline{1,3}$, где под нормой $\|Z\|$ понимаем $\|Z\|_{L_2[z_1,z_2]}$. Это утверждение следует из полноты системы векторов $\operatorname{grad}_\perp\psi_n,\operatorname{rot}\chi_n e_z$ в $(L_2(\Omega))^2$ и полноты каждой из систем функций χ_n,ψ_n в $L_2(\Omega)$.

Так как функции ψ_n,χ_n удовлетворяют граничным условиям (5), (6), то $\operatorname{grad}_\perp\psi_n,\operatorname{rot}\chi_n e_z$ удовлетворяет граничному условию $Hn|_{\partial\Omega}=0$.

В силу того что $\operatorname{div} H=0$, имеет место равенство

$$(H_\perp,\widetilde{Z}_n\operatorname{grad}\psi_n)_{L_2(V)}+(H_z,\widetilde{Z}_n'\psi_n)_{L_2(V)}=0$$

для любого $\widetilde{Z}_n\in C_0^\infty$. Отсюда следует, что $\lambda_{2n}\overline{\overline{Z}}_{2n}=\overline{\overline{Z}}{}'_{3n}$. Обозначим $Z_{2n}=\lambda_{2n}^{-1}\overline{\overline{Z}}_{3n}$. Тогда $\overline{\overline{Z}}_{2n}=Z_{2n}'$. В результате вектор H примет вид

$$H=\sum_{n=1}^{\infty} Z_{2n}'\operatorname{grad}_\perp\psi_n+\sum_{n=1}^{\infty} Z_{1n}\operatorname{rot}\chi_n e_z+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\overline{Z}}_{2n}\psi_n e_z. \tag{13}$$

В силу того что вектор $H \in H(\mathrm{rot})$, для любого вектора $\widetilde{H} = \widetilde{Z}_n \chi_n e_z$, $\widetilde{Z}_n \in C_0^\infty$, справедливо равенство

$$(\mathrm{rot}\, H, \widetilde{Z}_n \chi_n e_z)_{L_2(V)} = (H, \widetilde{Z}_n\, \mathrm{rot}\, \chi_n e_z)_{L_2(V)}.$$

Отсюда следует, что $\overline{Z}_{3n} = \lambda_{1n} Z_{1n}$, $\overline{Z}_{1n} = \lambda_{1n} Z'_{1n}$. Для вектора $H = \mathrm{rot}\mathrm{rot} \widetilde{Z}_n \psi_n e_z$ справедливо равенство

$$(\mathrm{rot}\, H, \mathrm{rot}\, \widetilde{Z}_n \psi_n e_z)_{L_2(V)} = (H, \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, \widetilde{Z}_n \psi_n e_z)_{L_2(V)}.$$

Тогда $\overline{Z}_{2n} = -Z''_{2n} + \lambda_{2n} Z_{2n}$. При этом $Z_{1n} \in L_2$, $Z'_{1n} \in L_2$, $Z_{2n} \in L_2$, $Z_{2n} \in L_2$, $Z'_{2n} \in L_2$, $Z''_{2n} - \lambda_{2n} Z_{2n} \in L_2$. Отсюда вытекает, что если вектор H удовлетворяет условиям (7), (8), то вектор $\mathrm{rot}\, H$ удовлетворяет условиям (9), (10).

Умножая уравнение (1) на произвольный достаточно гладкий вектор $\widetilde{H}$, удовлетворяющий граничным условиям (2) и условиям сопряжения (3), и интегрируя по частям с учетом парциальных условий излучения (7)–(10), получаем

$$(\varepsilon^{-1}\, \mathrm{rot}\, H, \mathrm{rot}\, \widetilde{H})_{L_2(V)} - k^2 (H, \widetilde{H})_{L_2(V)} - \sum_{i=1}^{2} \sum_{n=1}^{N_1} i\gamma_{1n} \frac{1}{\lambda_{1n}} (H_\perp, \mathrm{rot}\, \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_i)} (\widetilde{H}_\perp, \mathrm{rot}\, \chi_n e_z)^*_{L_2(\Omega_i)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \sum_{n=N_1}^{\infty} \gamma_{1n} \frac{1}{\lambda_{1n}} (H_\perp, \mathrm{rot}\, \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_i)} (\widetilde{H}_\perp, \mathrm{rot}\, \chi_n e_z)^*_{L_2(\Omega_i)} -$$

$$- \sum_{i=1}^{2} \sum_{n=1}^{N_2} \frac{ik^2}{\lambda_{2n}\gamma_{2n}} (H_\perp, \mathrm{grad}_\perp \psi_n)_{L_2(\Omega)} (\widetilde{H}_\perp, \mathrm{grad}_\perp \psi_n)^*_{L_2(\Omega)} -$$

$$- \sum_{i=1}^{2} \sum_{n=N_2+1}^{\infty} \frac{k^2}{\lambda_{2n}\gamma_{2n}} (H_\perp, \mathrm{grad}_\perp \psi_n)_{L_2(\Omega)} (\widetilde{H}_\perp, \mathrm{grad}_\perp \psi_n)^*_{L_2(\Omega)} =$$

$$= 2i\gamma_{1m} A e^{i\gamma_{1m} z} (\mathrm{rot}\, \chi_m e_z, \widetilde{H})_{L_2(\Omega)}. \tag{14}$$

Вводя полуторалинейные формы

$$a(H, \widetilde{H}) = (\varepsilon^{-1}\, \mathrm{rot}\, H, \mathrm{rot}\, \widetilde{H})_{L_2(V)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \sum_{n=N_1+1}^{\infty} \gamma_{1n} \frac{1}{\lambda_{1n}} (H_\perp, \mathrm{rot}\, \chi_n e_z)_{L_2(\Omega)} (\widetilde{H}_\perp, \mathrm{rot}\, \chi_n e_z)^*_{L_2(\Omega)}, \tag{15}$$

$$b(H, \widetilde{H}) = -k^2 (H, \widetilde{H})_{L_2(V)} - \sum_{i=1}^{2} \sum_{n=1}^{N_1} i\gamma_{1n} \frac{1}{\lambda_{1n}} (H_\perp, \mathrm{rot}\, \chi_n e_z)_{L_2(\Omega)} (\widetilde{H}_\perp, \mathrm{rot}\, \chi_n e_z)^*_{L_2(\Omega)} -$$

$$- \sum_{n=1}^{N_2} \frac{ik^2}{\lambda_{2n}\gamma_{2n}} (H_\perp, \mathrm{grad}_\perp \psi_n)_{L_2(\Omega)} (\widetilde{H}_\perp, \mathrm{grad}_\perp \psi_n)^*_{L_2(\Omega)} -$$

$$- \sum_{n=N_2+1}^{\infty} \frac{k^2}{\lambda_{2n}\gamma_{2n}} (H_\perp, \mathrm{grad}_\perp \psi_n)_{L_2(\Omega)} (\widetilde{H}_\perp, \mathrm{grad}_\perp \psi_n)^*_{L_2(\Omega)} \tag{16}$$

и линейную форму

$$l(\widetilde{H}) = 2i\gamma_{1m} A (\mathrm{rot}\, \chi_m e_z, \widetilde{H})_{L_2(\Omega)}, \tag{17}$$

уравнение (14) записываем в виде

$$a(H, \widetilde{E}) + b(H, \widetilde{E}) = l(\widetilde{H}). \tag{18}$$

Для слабой постановки задачи (1)–(10) необходимо ввести векторное функциональное пространство, в котором будем рассматривать задачу. Будем определять функциональное пространство аналогично случаю скалярной постановки задачи [3]. В областях $z \leq z_1 + \tau$, $z \geq z_2 - \tau$ компоненты магнитного поля H, представимого в виде рядов (7), (8), связаны соотношениями

$$\begin{gathered}(H_\perp, \operatorname{grad}_\perp \psi_n)_{L_2(\Omega_l)} = (-1)^l i\gamma_{2n}(H_z, \psi_n)_{L_2(\Omega_l)}, \quad n = \overline{1, N_2}, \\ (H_\perp, \operatorname{grad}_\perp \psi_n)_{L_2(\Omega_l)} = (-1)^{l-1}\gamma_{2n}(H_z, \psi_n)_{L_2(\Omega_l)}, \quad n > N_2, \quad l = 1, 2.\end{gathered} \tag{19}$$

Введем функциональное пространство, на элементы которого наложим условие (19):

$$\mathcal{V} = \Bigg\{ H \in H(\operatorname{rot}, V), \quad \operatorname{div} H = 0, \quad Hn|_{\partial Q} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{n=N_1+1} \frac{1}{\lambda_{1n}} (H_\perp, \operatorname{rot} \chi_n e_z)^2_{L_2(\Omega_i)} < \infty \quad \text{и выполнены условия (19)} \Bigg\}.$$

Будем называть вектор $H \in \mathcal{V}$ слабым решением задачи (1)–(10), если он удовлетворяет уравнению (18) для любого $\widetilde{H} \in \mathcal{V}$.

Докажем вначале существование слабого решения задачи (18). Это решение является и классическим решением задачи (1)–(8).

Полуторалинейная форма $a(H, \widetilde{H})$ задает скалярное произведение в пространстве $\mathcal{V}$. Пространство $\mathcal{V}$ является гильбертовым с нормой, порождаемой скалярным произведением $a(H, \widetilde{H})$. Проверки требует, очевидно, только полнота пространства $\mathcal{V}$, доказательство которой осуществляется аналогично приведенному в работе [3].

Таким образом, в силу теоремы Рисса [2] существуют ограниченный в пространстве $\mathcal{V}$ оператор T и вектор F такие, что $a(TH, \widetilde{H}) = b(H, \widetilde{E})$, $a(F, \widetilde{H}) = l(\widetilde{H})$. Уравнение (18) сводится к уравнению

$$H + TH = F. \tag{20}$$

Докажем, что оператор T компактный в пространстве $\mathcal{V}$, откуда будет следовать существование решения задачи (1)–(10). Действительно, если при некотором k, по условию являющимся вещественным, существует нетривиальное решение однородного уравнения (20), то ядро сопряженного уравнения ортогонально правой части уравнения (18), поскольку оно, очевидно, удовлетворяет условиям

$$(H_\perp, \operatorname{rot} \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_i)} = 0, \quad n = \overline{1, N_2}, \quad i = 1, 2.$$

Действительно, если существует решение H однородного сопряженного уравнения

$$H + T^* H = 0,$$

то оно удовлетворяет уравнению $\overline{b(H, H)} = 0$, что приводит к равенству

$$-\sum_{i=1}^{2} \sum_{n=1}^{N_1} i \frac{1}{\lambda_{1n}} \gamma_{1n} |(H_\perp, \operatorname{rot} \chi_n e_z)_{L_2(\Omega_2)}|^2 = 0.$$

Учитывая, что $a(F, H) = l(H)$, убеждаемся в ортогональности относительно скалярного произведения $a(H, \widetilde{H})$ правой части уравнения (18) ядру сопряженной задачи.

Докажем, что из любой ограниченной в норме пространства $\mathcal{V}$ последовательности можно выделить фундаментальную подпоследовательность по норме

$$\|H\|^2_W = \|H\|^2_{L_2(V)} + \sum_{i=1}^{2} \sum_{n=N_2+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2n}\gamma_{2n}} |(H_\perp, \operatorname{grad}_\perp \psi_n)_{L_2(\Omega_i)}|^2.$$

Утверждение разобьем на две теоремы.

Теорема 1. *Пространство* $\mathcal{V}$ *вложено в* $(L_2(V))^3$ *компактно.*

Доказательство. Рассмотрим ограниченную в пространстве $\mathcal{V}$ последовательность векторов $H_k:\ \|H_k\|^2_{\mathcal{V}} < C$. Представим векторы H_k и $\operatorname{rot} H_k$ в виде

$$H_k = \sum_{n=1}^{\infty} Z'_{2k_n} \operatorname{grad}_\perp \psi_n + \sum_{n=1}^{\infty} Z_{1k_n} \operatorname{rot} \chi_n e_z + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n} Z_{2k_n} \psi_n e_z,$$

$$\operatorname{rot} H_k = -\sum_{n=1}^{\infty} (Z''_{2k_n} - \lambda_{2n} Z_{2k_n}) \operatorname{rot} \psi_n e_z + \sum_{n=1}^{\infty} (Z'_{1k_n} \operatorname{grad}_\perp \chi_n + \lambda_{1n} Z_{1k_n} \chi_n e_z),$$

где $Z_{lk_n}, Z'_{lk_n} \in L_2$, $l = 1, 2$, $Z''_{2k_n} - \lambda_n Z_{2k_n} \in L_2$.

Согласно теоремам Фубини и Б. Леви, имеют место следующие неравенства:

$$\|H_k\|^2_{L_2(V)} = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{2n} \|Z'_{2k_n}\|^2 + \lambda^2_{2n} \|Z_{2k_n}\|^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n} \|Z'_{1k_n}\|^2,$$

$$\|\operatorname{rot} H_k\|^2_{L_2(V)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n} \|Z''_{2k_n} - \lambda_{2n} Z_{2k_n}\|^2 + \sum_{n=1} (\lambda_{1n} \|Z'_{1k_n}\|^2 + \lambda^2_{1n} \|Z_{1k_n}\|^2).$$

Так как $Z'_{1k_n}, Z''_{2k_n} \in L_2$, то определены $Z_{1k_n}(z_i)$, $Z'_{2k_n}(z_i)$, $i = 1, 2$.

В силу условий

$$(H_{\perp_k}, \operatorname{grad}_\perp \psi_n)_{L_2(\Omega_l)} = (-1)^l i \gamma_{2n} (H_{z_k}, \psi_n)_{L_2(\Omega_l)}, \quad n = \overline{1, N_2},$$

$$(H_{\perp_k}, \operatorname{grad}_\perp \psi_n)_{L_2(\Omega_l)} = (-1)^{l-1} \gamma_{2n} (H_{z_k}, \psi_n)_{L_2(\Omega_l)}, \quad n > N_2, \quad l = 1, 2,$$

справедливы условия

$$Z'_{2k_n}(z_l) = (-1)^l i \gamma_{2n} Z_{2k_n}(z_l), \quad n = \overline{1, N_2}, \quad Z'_{2k_n}(z_l) = (-1)^{l-1} \gamma_{2n} Z_{2k_n}(z_l), \quad n > N_2, \quad l = 1, 2,$$

Тогда имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n} \|Z''_{2k_n} - \lambda_{2n} Z_{2k_n}\|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{2n} \|Z''_{2k_n}\|^2 + 2\lambda^2_{2n} \|Z'_{2k_n}\|^2 + \lambda^3_{2n} \|Z_{2k_n}\|^2) + \sum_{i=1}^{2} \sum_{n=N_1+1}^{\infty} \lambda^2_{1n} \gamma_{1n} |Z_{2k_n}(z_i)|^2,$$

с учетом которого в результате получаем

$$\|\operatorname{rot} H_k\|^2_{L_2(V)} = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{2n} \|Z''_{2k_n}\|^2 + 2\lambda^2_{2n} \|Z'_{2k_n}\|^2 + \lambda^3_{2n} \|Z_{2k_n}\|^2) + \sum_{i=1}^{2} \sum_{n=N_2+1}^{\infty} \lambda^2_{2n} \gamma_{2n} |Z_{2k_n}(z_i)|^2 +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{1n} \|Z'_{1k_n}\|^2 + \lambda^2_{1n} \|Z_{1k_n}\|^2).$$

Легко видеть, что из любой последовательности, ограниченной по норме

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{1n} \|Z'_{1k_n}\|^2 + \lambda^2_{1n} \|Z_{1k_n}\|^2),$$

можно выделить подпоследовательность, фундаментальную по норме $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n} \|Z_{1k_n}\|^2$. Действительно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n}^2 \|Z_{1k_n}\|^2 < C,$$

то имеет место неравенство

$$\sum_{n=N}^{\infty} \lambda_{1n} \|Z_{1k_n}\|^2 < \lambda_{1N} \sum_{n=N}^{\infty} \lambda_{1n} \|Z_{1k_n}\|^2 < \sum_{n=N}^{\infty} \lambda_{1n} \|Z_{1k_n}\|^2 < C.$$

Так как

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_{1n} \|Z_{1k_n}\|^2 < \frac{C}{\lambda_{1N}}$$

и $\lambda_{1N+1} = O(N+1)$ при $N \to \infty$, то сумма $\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_{1n} \|Z_{1k_n}\|^2$ сколь угодно мала при больших N и N, не зависящем от k. Применяя к конечной сумме $\sum_{n=1}^{N} \lambda_{1n} \|Z_{1k_n}\|^2$ теорему Релиха, в результате убеждаемся в справедливости утверждения о возможности выделить фундаментальную подпоследовательность по норме $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n} \|Z_{1k_n}\|^2$.

Аналогично доказывается, что из любой последовательности, ограниченной по норме

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{2n} \|Z''_{2k_n}\|^2 + 2\lambda_{2n}^2 \|Z'_{2k_n}\|^2 + \lambda_{2n}^3 \|Z_{2k_n}\|^2) + \sum_{i=1}^{2} \sum_{n=N_2+1} \lambda_{2n}^2 \gamma_{2n} |Z_{2k_n}(z_i)|^2,$$

можно выделить сходящуюся подпоследовательность по норме

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{2n} \|Z'_{2k_n}\|^2 + \lambda_{2n}^2 \|Z_{2k_n}\|^2).$$

Таким образом, пространство $\mathcal{V}$ вложено в $(L_2(V))^3$ компактно.

Теорема 2. *Из любой ограниченной по норме $\mathcal{V}$ последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность по полунорме*

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{n=N_2+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2n}\gamma_{2n}} |(H_\perp, \mathrm{grad}_\perp \psi_n)_{L_2(\Omega)}|^2.$$

Доказательство сводится к равенству

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{n=N_2+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2n}\gamma_{2n}} |(H_{\perp_k}, \mathrm{grad}_\perp \psi_n)_{L_2(\Omega)}|^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{n=N_2+1}^{\infty} \lambda_{2n}\gamma_{2n} |Z_{2k_n}(z_2)|^2$$

и вытекающей из доказательства предыдущей теоремы ограниченности суммы

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{n=N_2+1}^{\infty} \lambda_{2n}^2 \gamma_{2n} |Z_{2k_n}(z_i)|^2.$$

Отсюда следует, что из любой ограниченной последовательности по норме пространства $\mathcal{V}$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность по указанной полунорме.

Из ограниченности в L_2 норм $\|Z'_{2k_n}\|$, $\|Z''_{2k_n}\|$, $n = \overline{1, N_2}$, $\|Z_{1k_n}\|$, $\|Z'_{1k_n}\|$, $n = \overline{1, N_1}$, следует, что из последовательности функций, ограниченных по норме пространства $\mathcal{V}$, можно выделить фундаментальную подпоследовательность по полунорме

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{n=1}^{N_2} |Z'_{2k_n}(z_i)|^2 + \sum_{i=1}^{2'} \sum_{n=1}^{N_1} |Z_{1k_n}(z_i)|^2,$$

а значит, можно выделить фундаментальную последовательность по полунорме

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{n=1}^{N_1}\frac{1}{\lambda_{2n}\gamma_{2n}}(H_\perp, \operatorname{grad}_\perp \psi_n)^2_{L_2(\Omega_i)} + \sum_{i=1}^{2}\sum_{n=1}^{N_2}\frac{1}{\lambda_{1n}}\gamma_{1n}(H_\perp, \operatorname{rot}\chi_n e_z)^2_{L_2(\Omega_i)}.$$

Теорема доказана.

Таким образом, мы доказали, что оператор T компактный в $\mathcal{V}$. Следовательно, задача (18) разрешима.

Докажем, что обобщенное решение задачи (18) является классическим решением. То, что это решение является классическим в областях, в которых диэлектрическая проницаемость – гладкая функция, а также то, что решение удовлетворяет в классическом смысле условиям сопряжения на гладких участках поверхностей разрыва, доказывается стандартно. Остается рассмотреть вопрос о поведении решения вблизи сечений Ω_i. Докажем, что решение задачи (18) имеет вид (7), (8) при $z > z_2 - \tau$. Аналогичным образом задача рассматривается в области $z < z_1 + \tau$.

Действительно, вектор H удовлетворяет уравнению (18). Выберем в качестве вектора $\widetilde{H}$ вектор $\widetilde{Z}_n \operatorname{rot}\chi_n e_z$. Считаем для определенности, что $n > N_1$. Выберем $\widetilde{Z}_n \in C^\infty$, $Z_n \equiv 0$, $z < z_2 - \tau$. Тогда для Z_{1n} получим уравнение

$$(Z'_{1n}, \widetilde{Z}_n)_{L_2} - (\lambda_n - k^2)(Z_{1n}, \widetilde{Z}_n) + \frac{1}{\lambda_n}\gamma_n Z_{1n}(z_2)\widetilde{Z}_n(z_2) = 0.$$

В результате Z_{1n} удовлетворяет уравнению и граничному условию

$$Z''_{1n} - (\lambda_{1n} - k^2)Z_{1n} = 0, \quad Z'_{1n}(z_2) = -\gamma_{1n}Z_{1n}(z_2).$$

Отсюда следует, что $Z_{1n}(z)$ представимо в области $(z_2 - \tau, z_2)$ в виде $Z_{1n} = a_n e^{-\gamma_{1n} z}$.

Рассматривая в качестве вектора $\widetilde{H}$ вектор $\widetilde{Z}'_n \operatorname{grad}_\perp \psi_n + \lambda_n \widetilde{Z}_n \psi_n e_z$, $n > N_2$, и учитывая, что $\widetilde{Z}'_n(z_2) = -\gamma_n \widetilde{Z}_n(z_2)$, аналогично получаем уравнение

$$(Z''_{2n} - \lambda_n Z_{2n}, \widetilde{Z}''_n - \lambda_{2n}\widetilde{Z}_n) - k^2((Z'_{2n}, \widetilde{Z}'_n) + \lambda_{2n}(Z_{2n}, \widetilde{Z}_n)) - k^2\lambda_{2n}\gamma_{2n}Z_{2n}(z_2)\widetilde{Z}_n(z_2) = 0$$

или

$$(Z''_{2n} - \lambda_{2n}Z_{2n})'' - (\lambda_{2n} - k^2)(Z''_{2n} - \lambda_{2n}Z_{2n}) = 0, \quad Z'_{2n}(z_2) = -\gamma_{2n}Z_{2n}(z_2), \quad Z'''_{2n}(z_2) = -\gamma_{2n}Z''_{2n}(z_2).$$

Тогда, как и выше, заключаем, что Z_{2n} имеет вид $Z_{2n} = c_n e^{-\gamma_{2n} z}$. Таким образом, доказано существование решения задачи (1)–(10).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 00-01-00111, 02-01-00271) и программы "Университеты России" (проект УР 02.03.010).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Свешников А.Г.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1963. Т. 3. № 2. С. 314–326.
2. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М., 1979.
3. *Делицын А.Л.* // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 2. С. 198–207.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
22.05.2003 г.