Математические заметки

том 71 выпуск 5 май 2002

УДК 517.983

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ В ДУАЛЬНЫХ СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ И ОПЕРАТОРЫ ШРЁДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛАМИ-РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Дж.-Г. Бак, А. А. Шкаликов

В работе получены достачные условия принадлежности функций-распределений пространству мультипликаторов из соболевского пространства $H_p^\alpha(\mathbb{R}^n)$ в дуальное пространство $H_{p'}^{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$. При $\alpha > n/p$ найден критерий, т.е. дано полное описание рассматриваемого пространства мультипикаторов. Полученные результаты применяются для определения операторов Шрёдингера с потенциалами-распределениями.

Библиография: 8 названий.

Целью этой статьи является изучение мультипликаторов из соболевского пространства $H_p^\alpha(\mathbb{R}^n)$ в дуальное пространство $H_{p'}^{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$, где $\alpha \geqslant 0, p \geqslant 1$ и p, p' – сопряженные по Гёльдеру числа, т.е. $1/p + 1/p' = 1$.

Мультипликаторам в соболевских пространствах с неотрицательными индексами посвящена обширная литература. Подробности можно найти в книге Мазьи и Шапошниковой [1]. В недавней работе Нейман-заде и Шкаликова [2] было показано, что мультипликаторы из пространства Соболева $H_2^\alpha(\mathbb{R}^n)$ в $H_2^{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$ играют важную роль в теории операторов Шрёдингера. Там же, в [2], были получены эффективные достаточные условия принадлежности функций таким пространствам мультипликаторов. В этой работе мы получим полное описание пространства мультипликаторов из $H_p^\alpha(\mathbb{R}^n)$ в $H_{p'}^{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$ (мы обозначаем его через M_p^α) при условии $\alpha > n/p$. В случае $\alpha \leqslant p/n$ мы получим теоремы вложения соболевских пространств с негативными индексами гладкости в пространства M_p^α (достаточные условия принадлежности к M_p^α).

Напомним, что пространства Соболева (или бесселевых потенциалов) $H_p^\alpha := H_p^\alpha(\mathbb{R}^n)$ определяются как замыкание пространства основных функций D по норме

$$\|u\|_{\alpha,p} := \|\Lambda^\alpha u\|_{L_p},$$

где $\Lambda^\alpha = F^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\alpha/2}F]$, а F – преобразование Фурье в $\mathbb{R}^n$.

Введем обозначение

$$H_{p,\mathrm{loc}}^\alpha(\mathbb{R}^n) = \{v \in D' : v(x)\varphi(x) \in H_p^\alpha \quad \forall \varphi \in D\},$$

Работа первого автора выполнена при поддержке фонда KOSEF (Korea Science and Engineering Foundation), грант № 1999-2-102-003-5. Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00691.

где D' – пространство распределений на D. Функцию $\mu(x) \in H^{-\alpha}_{p',\mathrm{loc}}$ назовем *мультипликатором* из H^α_p в $H^{-\alpha}_{p'}$, если

$$\|\mu(x)\varphi(x)\|_{-\alpha,p'} \leqslant C\|\varphi\|_{\alpha,p} \qquad \forall\varphi \in D, \tag{1}$$

где через C обозначается (здесь и в дальнейшем) константа, не зависящая от $\varphi \in D$.

В этом определении предполагается, что $\varphi \in D$ (вместо $\varphi \in H^\alpha_p$), поскольку при $\mu(x) \in H^{-\alpha}_{p',\mathrm{loc}}$ произведение $\mu(x)\varphi(x)$ определено в D' лишь для бесконечно гладких φ. Однако D плотно в H^α_p, поэтому из оценки (1) для $\varphi \in D$ следует, что оператор умножения на функцию $\mu(x)$ может быть продолжен на все H^α_p как ограниченный оператор из H^α_p в $H^{-\alpha}_{p'}$. Очевидно, функции $\mu(x)$, удовлетворяющие неравенству (1), образуют банахово пространство, которое мы обозначим через $M[H^\alpha_p \to H^{-\alpha}_{p'}]$, или более кратко M^α_p. Норма в этом пространстве определяется как

$$\|\mu\|_{M^\alpha_p} = \inf C,$$

где нижняя грань берется по всем константам C, для которых выполнено неравенство (1).

Вначале зададимся вопросом: для каких индексов $\gamma \leqslant \alpha$, $r \geqslant 1$ имеет место непрерывное вложение с оценкой нормы

$$H^{-\gamma}_r \in M[H^\alpha_p \to H^{-\alpha}_{p'}], \qquad \|\mu\|_{M^\alpha_p} \leqslant C\|\mu\|_{-\gamma,r}? \tag{2}$$

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1. *Вложение* (2) *с оценкой норм имеет место тогда и только тогда, когда выполняется мультипликативная оценка*

$$\|\varphi(x)\psi(x)\|_{\gamma,r'} \leqslant C\|\varphi\|_{\alpha,p}\|\psi\|_{\alpha,p} \qquad \forall\varphi,\psi \in D, \tag{3}$$

где число $1 \leqslant r' \leqslant \infty$ *определяется из условия сопряжения* $1/r + 1/r' = 1$.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть $\mu(x) \in H^{-\gamma}_r$ и выполнена оценка (3). Тогда для всех $\varphi,\psi \in D$ имеем

$$\begin{aligned}\|\mu\varphi\|_{-\alpha,p'} &= \sup_{0\ne\psi\in H^\alpha_p} \frac{|(\mu\varphi,\psi)|}{\|\psi\|_{\alpha,p}} = \sup_{0\ne\psi\in H^\alpha_p} \frac{|(\mu,\overline{\varphi}\psi)|}{\|\psi\|_{\alpha,p}} \\ &\leqslant \sup_{0\ne\psi\in H^\alpha_p} \frac{\|\mu\|_{-\gamma,r}\|\overline{\varphi}\psi\|_{\gamma,r'}}{\|\psi\|_{\alpha,p}} \leqslant C\|\mu\|_{-\gamma,r}\|\varphi\|_{\alpha,p},\end{aligned}$$

где константа C та же, что и в (3). По определению получаем $\mu \in M^\alpha_p$ и $\|\mu\|_{M^\alpha_p} \leqslant C\|\mu\|_{-\gamma,r}$.

Необходимость. Пусть справедливо вложение (2) с оценкой норм. Тогда для $\varphi,\psi \in D$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned}\|\varphi\psi\|_{\gamma,r'} &= \sup_{f\in H^{-\gamma}_r} \frac{|(f,\varphi\psi)|}{\|f\|_{-\gamma,r}} \leqslant \sup_{\mu\in M^\alpha_p} \frac{|(\mu\overline{\varphi},\psi)|}{C^{-1}\|\mu\|_{M^\alpha_p}} \\ &\leqslant \sup_{\mu\in M^\alpha_p} \frac{\|\mu\overline{\varphi}\|_{-\alpha,p'}\|\psi\|_{\alpha,p}}{C^{-1}\|\mu\|_{M^\alpha_p}} \leqslant C\|\varphi\|_{\alpha,p}\|\psi\|_{\alpha,p},\end{aligned}$$

причем для получения последнего неравенства мы использовали оценку (1) с $C = \|\mu\|_{M_p^\alpha}$. Следовательно, выполнена оценка (2), и доказательство завершено.

Выберем неотрицательную функцию $\eta(x) \in D$ такую, что $\eta(x) \equiv 1$ при $|x| \leqslant 1$. Введем пространство $H^\alpha_{p,\mathrm{unif}}$ (см. [1, п. 1.3.1]), состоящее из функций $u(x) \in H^\alpha_{p,\mathrm{loc}}$ таких, что

$$\|u\|_{\alpha,p,\mathrm{unif}} := \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \|\eta(x-z)u(x)\|_{\alpha,p} < \infty.$$

Норма в пространстве $H^\alpha_{p,\mathrm{unif}}$ зависит от выбора неотрицательной пробной функции $\eta(x)$, но для всех таких функций соответствующие нормы эквивалентны.

Если $\mu(x) \in M_p^\alpha$, то и $\eta(x)\mu(x) \in M_p^\alpha$. Введем новую норму в M_p^α:

$$|||\mu|||_{M_p^\alpha} = \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \|\eta(x-z)\mu(x)\|_{M_p^\alpha}.$$

Приведенная ниже теорема известна для мультипликаторов в соболевских пространствах с неотрицательными индексами (см. [1, п. 2.1.3]). Здесь мы предлагаем независимое доказательство применительно к нашему случаю.

Теорема 2. *Нормы* $|||\cdot|||$ *и* $\|\cdot\|$ *в* M_p^α *эквивалентны.*

Доказательство. Неравенство

$$|||\mu|||_{M_p^\alpha} \leqslant C\|\mu\|_{M_p^\alpha}$$

следует из определения. Для доказательства обратной оценки нам потребуется известная лемма о разбиении единицы (см., например, [3, §1.4]). Согласно этой лемме существует набор функций $\{\chi_j(x)\}_{j=1}^\infty$, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) $\chi_j(x) \in D$, $0 \leqslant \chi_j(x) \leqslant 1$ и $\sum_{j=1}^\infty \chi_j(x) \equiv 1$;

(ii) носители функций χ_j содержатся в шарах радиуса 1 (с различными центрами), при этом любая фиксированная точка $x \in \mathbb{R}^n$ покрывается носителями не более чем N функций (т.е. $\chi_j(x) \neq 0$ не более чем для N функций и N не зависит от x);

(iii) $|D^\ell\chi_j(x)| \leqslant C$, где C зависит лишь от мультииндекса $\ell = (\ell_1,\dots,\ell_n)$.

Пусть семейство $\{\chi_j\}_1^\infty$ обладает этими свойствами. Тогда

$$\sum_{j=1}^\infty \|\varphi\chi_j\|_{\alpha,p} \leqslant C\|\varphi\|_{\alpha,p}, \qquad \varphi \in D,$$

где C зависит только от α, p и от выбора $\{\chi_j\}_1^\infty$. Поскольку при всех j носитель χ_j содержится в шаре радиуса 1, а $\eta(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1$, то существуют $z_j \in \mathbb{R}^n$ такие, что $\chi_j(x) = \eta(x-z_j)\chi_j(x)$. Обозначая $\varphi_j(x) = \chi_j(x)\varphi(x)$ для $\varphi \in D$, получаем

$$\|\mu\varphi\|_{-\alpha,p'} = \left\|\sum_{j=1}^\infty \eta(x-z_j)\mu(x)\varphi_j(x)\right\|_{-\alpha,p'} \leqslant |||\mu|||_{M_p^\alpha} \sum_{j=1}^\infty \|\varphi_j\|_{\alpha,p} \leqslant C|||\mu|||_{M_p^\alpha}\|\varphi\|_{\alpha,p}.$$

Теперь из определения следует, что

$$\|\mu\|_{M_p^\alpha} \leqslant C|||\mu|||_{\alpha,p}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Верны следующие утверждения*:

1) *для всех* $\alpha \geqslant 0$ *и* $p \geqslant 1$ *справедливы вложения с оценками норм*

$$M_p^\alpha \subset H_{p',\mathrm{unif}}^{-\alpha}, \qquad \|\mu\|_{-\alpha,p',\mathrm{unif}} \leqslant C\|\mu\|_{M_p^\alpha}; \tag{4}$$

2) *вложение с оценкой норм*

$$H_{r,\mathrm{unif}}^{-\gamma} \subset M_p^\alpha, \qquad \|\mu\|_{M_p^\alpha} \leqslant C\|\mu\|_{-\gamma,r,\mathrm{unif}} \tag{5}$$

справедливо тогда и только тогда, когда выполняется неравенство (3).

Доказательство. Первое утверждение вытекает из определения. Действительно, если $\mu(x) \in M_p^\alpha$ и $\eta(x)$ – гладкая срезающая функция, то

$$\|\mu(x)\eta(x-z)\|_{-\alpha,p'} \leqslant \|\mu\|_{M_p^\alpha}\|\eta(x-z)\|_{\alpha,p} = \|\mu\|_{M_p^\alpha}\|\eta(x)\|_{\alpha,p} = C\|\mu\|_{M_p^\alpha},$$

где $C = \|\eta(x)\|_{\alpha,p}$ не зависит от z. Поэтому $\mu \in H_{p',\mathrm{unif}}^{-\alpha}$ и верна оценка (4).

Второе утверждение является следствием теорем 1 и 2. Очевидно, пространство $H_r^{-\gamma}$ непрерывно вложено в $H_{r,\mathrm{unif}}^{-\gamma}$. Поэтому согласно теореме 1 оценка (5) влечет (3). Обратно, если выполнена оценка (3) и $\mu \in H_{r,\mathrm{unif}}^{-\gamma}$, то $\mu(x)\eta(x-z) \in H_r^{-\gamma} \subset M_p^\alpha$ и

$$\|\mu(x)\eta(x-z)\|_{M_p^\alpha} \leqslant C\|\mu(x)\eta(x-z)\|_{-\gamma,r}.$$

Таким образом, $|||\mu|||_{M_p^\alpha} \leqslant C\|\mu\|_{-\gamma,r,\mathrm{unif}}$ и (5) вытекает из теоремы 2. Теорема доказана.

Согласно теореме Стрихардса (см. [4] или [1, п. 2.2.9]) пространство мультипликаторов $M[H_p^\alpha \to H_p^\alpha]$ совпадает с $H_{p,\mathrm{unif}}^\alpha$, если выполено условие $\alpha > n/p$. Полученное ниже утверждение можно считать аналогом этой теоремы для мультипликаторов в дуальных пространствах.

Теорема 4. *Пусть* $\alpha > n/p$. *Тогда пространства* $M[H_p^\alpha \to H_{p'}^{-\alpha}]$ *и* $H_{p',\mathrm{unif}}^{-\alpha}$ *совпадают и нормы в этих пространствах эквивалентны.*

Доказательство. Согласно первому утверждению теоремы 3 вложение $M_p^\alpha \subset H_{p',\mathrm{unif}}^{-\alpha}$ с оценкой норм верно для всех $\alpha \geqslant 0$ и $p \geqslant 1$. Чтобы доказать обратное включение, в соответствии со вторым утверждением теоремы 3 достаточно проверить неравенство (3) с $\gamma = \alpha$ и $r' = p$. Но для этих значений индексов оценка (3) следует из того факта, что H_p^α является алгеброй при $\alpha > n/p$ (см. [1, § 1.7]). Теорема доказана.

В случае $\alpha \leqslant n/p$ дать описание пространства M_p^α в терминах пространств Соболева уже невозможно. По аналогии с теорией мультипликаторов в соболевских пространствах с неотрицательными индексами гладкости такое описание можно провести в терминах емкости, хотя это требует дополнительной серьезной работы (см. результаты Вербицкого в [1]). Однако проверка условий в терминах емкостей трудно осуществима, поэтому полезно иметь эффективные достаточные условия принадлежности функций рассматриваемым пространствам мультипликаторов. Нам удалось найти точные условия на индексы γ и r, при которых справедливо вложение $H_{r,\mathrm{unif}}^{-\gamma} \subset M_p^\alpha$ вместе с оценкой норм. Здесь мы приведем две теоремы такого типа. Результат первой из них важен лишь при $\alpha = n/p$ поскольку при $\alpha < n/p$, более точное утверждение дает вторая из этих теорем.

Теорема 5. *Пусть* $p > 1$ *и* $\max\{0, (2-p)n/p\} < \alpha \leqslant n/p$. *Тогда справедливо вложение* $H^{-\gamma}_{r,\mathrm{unif}} \subset M^\alpha_p$ *вместе с оценкой норм, если числа* γ *и* r *подчинены условиям*

$$-2\left(\frac{n}{p} - \alpha\right) \leqslant \gamma \leqslant \alpha \qquad \text{и} \qquad r > \frac{pn}{p(n+2\alpha-\gamma)-2n}.$$

Доказательство. Достаточно доказать это утверждение при $\gamma = \alpha$. Действительно, предположим, что доказано вложение $H^\alpha_{r_1} \subset M^\alpha_p$ вместе с оценкой норм при $r_1 > pn/(p(n+\alpha)-2n)$. В силу теоремы Соболева $H^\gamma_r \subset H^\alpha_{r_1}$, если $1/r - 1/r_1 = \alpha - \gamma \geqslant 0$. Следовательно, $H^\gamma_r \subset M^\alpha_p$, если $r = r_1/(1+r_1(\alpha-\gamma))$, т.е. если $r > pn/(p(n+2\alpha-\gamma)-2n)$. Здесь число γ ($\gamma \leqslant \alpha$) можно выбрать любым, лишь бы выполнялось условие $r > 1$. Это приводит к условию $\gamma > -2(n/p - \alpha)$.

Итак, пусть $\gamma = \alpha$. Положим $\nu = n/p + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, и запишем следующие неравенства:

$$\|\varphi\psi\|_{\nu,p} \leqslant C\|\varphi\|_{\nu,p}\|\psi\|_{\nu,p}, \qquad \|\varphi\psi\|_{0,p/2} \leqslant \|\varphi\|_{0,p}\|\psi\|_{0,p}.$$

Первое из неравенств следует из того, что H^ν_p при $\nu > n/p$ есть алгебра (теорема Стрихардса), а второе есть обычное неравенство Гёльдера. Теперь используя полилинейную интероляционную теорему (см., например, [5, § 4.4]), мы приходим к неравенству

$$\|\varphi\psi\|_{\alpha,s} \leqslant C\|\varphi\|_{\alpha,p}\|\psi\|_{\alpha,p}$$

для

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \nu, \qquad s = \frac{p(n+\varepsilon)}{2n - \alpha p + 2p\varepsilon}, \qquad s' = \frac{p(n+\varepsilon)}{pn + p\alpha - 2n - p\varepsilon}.$$

Здесь мы обращаем внимание, что в случае $1 \leqslant p < 2$ в пространствах $H^0_{p/2} = L_{p/2}$ нет обычной нормы, их можно оснастить лишь квазинормой. Однако использованная нами интерполяционная теорема справедлива и для квазинормированных пространств (см. [5, § 3.10]). По условию теоремы $(2-p)n/p < \alpha \leqslant n/p$, что влечет $s, s' > 1$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Для завершения доказательства надо выбрать ε таким, чтобы $s' = r$, а затем воспользоваться теоремами 1 и 3.

В случае $\alpha = n/p$ результат нельзя улучшить, заменив неравенство для r на соответствующее равенство (т.е. положить $\varepsilon = 0$). Однако это можно сделать при $\alpha < n/p$. Доказательство этого факта требует более глубокого анализа. Отметим, что при целом α доказательство можно провести значительно проще (см. [2]).

Теорема 6. *Пусть* $p > 1$ *и* $\max\{0, (2-p)n/p\} < \alpha < n/p$. *Тогда справедливо вложение* $H^{-\gamma}_{r,\mathrm{unif}} \subset M^\alpha_p$ *вместе с оценкой норм, если числа* γ, r *подчинены условиям*

$$-2\left(\frac{n}{p} - \alpha\right) \leqslant \gamma \leqslant \alpha \qquad \text{и} \qquad r \geqslant \frac{pn}{p(n+2\alpha-\gamma)-2n}.$$

Доказательство. Как и в предыдущей теореме, можно ограничиться случаем $\gamma = \alpha$, причем утверждение нужно доказать только для $r = pn/(p(n+\alpha) - 2n)$. Согласно теореме 3 нужно доказать оценку

$$\|\varphi\psi\|_{\alpha,s} \leqslant C\|\varphi\|_{\alpha,p}\|\psi\|_{\alpha,p} \qquad \forall \varphi, \psi \in D, \tag{6}$$

где $s = pn/(2n - \alpha p) > 1$. Для доказательства этой оценки мы будем использовать методы, развитые в статье Полкинга [6].

Рассмотрим нелинейный оператор

$$D^\eta_{\rho,q} u(x) = \int_0^\infty \left(\int_{B_1} |u(x+\xi y) - u(x)|^\rho \, dy\right)^{q/\rho} \xi^{-1-\eta q} \, d\xi,$$

где $\eta > 0$, $\rho \geqslant 1$, $q \geqslant 2$. Нам потребуются следующие утверждения, доказанные в работах Полкинга [6] и Стрихардса [4].

Предложение A (см. [6]). *Пусть* $0 < \gamma < 1$, $1 \leqslant \rho \leqslant q$, $2 \leqslant q < \infty$, $r > \max\{1, n\rho/(n+\gamma\rho)\}$. *Тогда выполнено следующее неравенство*:

$$\|D^\eta_{\rho,q} u(x)\|_{0,r} \leqslant C\|u(x)\|_{\eta,r}, \qquad u \in H^\eta_r,$$

где константа C *зависит от* η, ρ, q, r, n, *но не зависит от* $u(x)$.

Предложение B (см. [6]). *Пусть* $1/\rho_1 + 1/\rho_2 = 1/\rho$, $1/q_1 + 1/q_2 = 1/q$ *и* $\eta_1 + \eta_2 = \eta$. *Тогда для всех* $u \in L_{\rho_1,\mathrm{loc}}$ *и* $v \in L_{\rho_2,\mathrm{loc}}$ *выполнено неравенство*

$$|D^\eta_{\rho,q}(uv)(x)| \leqslant |u(x) D^\eta_{\rho,q} v(x)| + |v(x) D^\eta_{\rho,q} u(x)| + |D^{\eta_1}_{\rho_1,q_1} u(x) D^{\eta_2}_{\rho_2,q_2} v(x)|.$$

Предложение C (см. [6], [4]). *Имеет место следующее соотношение*:

$$\|v\|_{\eta,p} \asymp \|D^\eta_{1,2} v\|_{0,p} + \|v\|_{0,p}, \qquad p \geqslant 1,\ \eta > 0, \qquad v(x) \in H^\eta_p,$$

где символ $\asymp$ *обозначает эквивалентность* (*т.е. отношение правой и левой частей ограничено с обеих сторон константами, не зависящими от* $v(x)$).

Используя эти утверждения, докажем оценку (6) для $s = pn/(2n - \alpha p)$. Положим $\alpha = [\alpha] + \eta$, где $[\alpha]$ обозначает целую часть α и $0 \leqslant \eta < 1$. Будем предполагать, что $\eta > 0$ (для $\eta = 0$ доказательство проще и может быть получено при помощи обычной формулы Лейбница). Хорошо известно следующее соотношение (см., например, [7]):

$$\|\varphi\psi\|_{\alpha,s} \asymp \sum_{|\ell| \leqslant [\alpha]} \|D^\ell(\varphi\psi)\|_{\eta,s}.$$

Согласно предложению C правая часть оценивается сверху величиной (в дальнейшем в оценках мы опускаем константы)

$$\sum_{|j|+|m| \leqslant [\alpha]} \bigl(\|D^\eta_{1,2}(D^j\varphi D^m\psi)\|_{0,s} + \|D^j\varphi D^m\psi\|_{0,s}\bigr).$$

Это выражение может быть оценено сверху с учетом предложения B следующей величиной (мы будем оценивать только первое слагаемое, второе оценивается существенно проще):

$$\sum_{|j|+|m|\leqslant[\alpha]} \big(\|D^m\psi D^{\eta}_{1,2}(D^j\varphi)\|_{0,s} + \|D^j\varphi D^{\eta}_{1,2}(D^m\psi)\|_{0,s} + \|(D^{\eta_1}_{\rho_1,q_1}D^j\varphi)(D^{\eta_2}_{\rho_2,q_2}D^m\psi)\|_{0,s}\big). \tag{7}$$

Теперь выберем подходящим образом числа η_1, ρ_1, q_1. Положим

$$0<\eta_1<\max\left\{\eta, \frac{n}{p}-\alpha\right\}, \qquad \eta_2=\eta-\eta_1, \tag{8}$$

$$\rho_1=\frac{n}{|j|+\eta_1}, \quad \rho_2=\frac{n}{n-|j|-\eta_1}, \qquad q_1=2\rho_1, \quad q_2=2\rho_2. \tag{9}$$

Так как $|j|+\eta_1<\alpha$, то $\rho_1,\rho_2>1$ и $1/\rho_1+1/\rho_2=1$.

Оценим третье слагаемое в (7). Положим

$$r=\frac{2n-\alpha p}{n+(|j|+\eta_1-\alpha)p}, \qquad r'=\frac{2n-\alpha p}{n-(|j|+\eta_1)p}.$$

Очевидно, $r,r'>0$, $1/r+1/r'=1$, поэтому $r,r'>1$. С помощью неравенства Гёльдера третье слагаемое в (7) оценивается выражением

$$\big(\|D^{\eta_1}_{\rho_1,2\rho_1}D^j\varphi\|_{0,rs}\big)\big(\|D^{\eta_2}_{\rho_2,2\rho_2}D^m\psi\|_{0,r's}\big).$$

Согласно предложению A последнее выражение можно оценить величиной

$$\|D^j\varphi\|_{\eta_1,rs}\|D^m\psi\|_{\eta_2,r's}, \tag{10}$$

если только выполненены условия

$$rs>1, \quad rs>\frac{n\rho_1}{n+\eta_1\rho_1}, \qquad r's>1, \quad r's>\frac{n\rho_2}{n+\eta_2\rho_2}.$$

Проверим справедливость этих условий. Используя (8) и (9), получаем

$$rs=\frac{pn}{n-p(\alpha-|j|-\eta_1)}>\frac{pn}{n}=p>1, \tag{11}$$

поскольку $\alpha>|j|+\eta_1$;

$$\begin{gathered} rs=\frac{n}{(n/p-\alpha)+|j|+\eta_1}>\frac{n}{|j|+2\eta_1}=\frac{n}{n/\rho_1+\eta_1}=\frac{n\rho_1}{n+\eta_1\rho_1};\\ r's=\frac{n\rho}{n-(|j|+\eta_1)p}>p>1;\\ r's=\frac{n}{n/\rho-|j|-\eta_1}>\frac{n}{r/\rho-|j|-\eta_1+(n-n/p)}=\frac{n}{n/\rho_2+\eta_2}=\frac{n\rho_2}{n+\eta_2\rho_2}. \end{gathered} \tag{12}$$

Далее, выражение (10) оценивается величиной

$$\|\varphi\|_{|j|+\eta_1,rs}\|\psi\|_{|m|+\eta_2,r's} \leqslant C\|\varphi\|_{\alpha,p}\|\psi\|_{\alpha,p}.$$

Последняя оценка получается из теоремы вложения Соболева с учетом неравенств

$$|j|+\eta_1-\frac{n}{p}\leqslant \alpha-\frac{n}{rs}, \qquad |m|+\eta_2-\frac{n}{p}\leqslant \alpha-\frac{n}{r's}.$$

Первое из этих неравенств следует из (11) и условия $|j|+\eta_1<\alpha$, а второе – из (12) и условия $|m|+\eta_2<\alpha$.

Оценки первого и второго слагаемого в (7) могут быть получены таким же образом, полагая $\eta_1=\eta$, $\eta_2=0$ для первого слагаемого и $\eta_1=0$, $\eta_2=\eta$ для второго. Теорема доказана.

Применение полученных результатов к эллипическим операторам общего вида мы оставляем за пределами этой работы. Здесь дадим лишь достаточное условие на потенциал-распределение $q(x)$, гарантирующее корректность определения соответствующего оператора Шрёдингера

$$\mathscr{L}u(x)=\big(-\Delta+q(x)\big)u(x) \tag{13}$$

в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$. Этот результат дополняет полученные ранее результаты [2] и [8].

Теорема 7. *Пусть $\eta(x)$ – гладкая, неотрицательная функция с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$, не обращающаяся тождественно в нуль. Пусть функция-распределение $q(x)$ удовлетворяет условию*:

$$\begin{aligned}
&\lim_{|z|\to\infty}\|q(x)\eta(x-z)\|_{-1,2}=0, && \text{если } n=1;\\
&\lim_{|z|\to\infty}\|q(x)\eta(x-z)\|_{-1,2+\varepsilon}=0 && \text{при некотором } \varepsilon>0, \text{ если } n=2;\\
&\lim_{|z|\to\infty}\|q(x)\eta(x-z)\|_{-1,n}=0, && \text{если } n\geqslant 3.
\end{aligned}$$

Тогда оператор (13) корректно определен как оператор в пространстве $H_2^{-1}(\mathbb{R}^n)$ с областью определения $H_2^1(\mathbb{R}^n)$, а его резольвентное множество непусто. Более того, спектр $\mathscr{L}$ лежит в произвольно малом секторе $|\arg(\lambda+\lambda_0)|<\varepsilon$, если $\lambda_0=\lambda_0(\varepsilon)$ достаточно большое число. Если функция $q(x)$ вещественна, то $\mathscr{L}$ является самосопряженным оператором в пространстве $H_2^{-1}(\mathbb{R}^n)$ с областью определения $\mathscr{D}(\mathscr{L})=H_2^{-1}(\mathbb{R}^n)$. Сужение оператора $\mathscr{L}$ на область

$$\mathscr{D}(\mathscr{L})=\big\{u(x)\in H_2^1 \mid -\Delta u(x)+q(x)u(x)\in L_2(\mathbb{R}^n)\big\}$$

является самосопряженным полуограниченным оператором в L_2, причем область определения квадратного корня $(\mathscr{L}+\mu)^{1/2}$ (при достаточно больших μ) совпадает с $H_2^1(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Рассмотрим, например, случай $n = 1$ (ср. [2], [8]). Условие теоремы влечет возможность представления $q(x) = q_0(x) + q_\varepsilon(x)$, где $q_0(x)$ – функция с финитным носителем в пространстве H_2^{-1}, а $\|q_\varepsilon(x)\|_{-1,2,\mathrm{unif}} < \varepsilon$. Тогда согласно теореме 3 норма функции $q_\varepsilon(x)$ в пространстве M_2^1 не превышает величины $C\varepsilon$. С учетом теоремы 4 легко заметить, что оператор умножения на $q_0(x)$ является компактным мультипликатором в M_2^1, а потому из указанного представления имеем оценку

$$\|q(x)u(x)\|_{-1,2} \leqslant \varepsilon_1\|u(x)\|_{1,2} + C\|u(x)\|_{0,2},$$

где число $\varepsilon_1 > 0$ можно выбрать произвольно малым, в частности, меньшим 1. Теперь оператор $\mathscr{L}$ можно корректно определить в $H_2^{-1}(\mathbb{R}^n)$ методом квадратичных форм, причем все другие утверждения теоремы получаются с помощью средств этого метода (см. подробности в [2]).

Результаты этой заметки сообщались авторами в Postech и Seoul National университетах (январь 2001 года), на семинарах в Московском университете (февраль 2001 года) и на конференции по теории операторов в Центре Банаха (Варшава, июль–август 2001 года).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Мазья В. Г., Шапошникова Т. О. Теория мультипликаторов в пространствах дифференцируемых функций: Изд-во Ленинградского ун-та, 1986.
[2] Нейман-заде М. И., Шкаликов А. А. Операторы Шрёдингера с сингулярынми потенциалами из пространств мультипликаторов // Матем. заметки. 1999. Т. 66. №4. С. 599–609.
[3] Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.1: Теория распределений и Фурье анализ.. М.: Мир, 1990.
[4] Strichartz R. S. Multipliers in fractional Sobolev spaces // J. Math. Mech. 1967. V. 16. P. 1031–1060.
[5] Bergh J., Löfström J. Interpolation Spaces // Grund. der math. Wiss. V. 223. Berlin: Springer Verlag, 1976.
[6] Polking J. C. A Leibniz formula for some differential operators of fractional order // Indiana Univ. Math. J. 1972. V. 27. P. 1019–1029.
[7] Stein E. M. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton: Princeton Univ. Press, 1970.
[8] Савчук А. М., Шкаликов А. А. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки. 1999. Т. 64. №6. С. 897–912.

(Дж.-Г. Бак) Postech University in South Korea
(А. А. Шкаликов) Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: bak@postech.ac.kr, shkal@mech.math.msu.su

Поступило
30.10.2001