А. Ф. Шадров, О некоторых классах функций, аналитических в кратных областях Гартогса, *Докл. АН СССР*, 1966, том 167, номер 4, 764–767

Доклады Академии наук СССР
1966. Том 167, № 4

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

А. Ф. ШАДРОВ

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРАТНЫХ ОБЛАСТЯХ ГАРТОГСА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 30 VI 1965)

В настоящей статье распространяются на некоторые классы функций, аналитических в неограниченных кратных областях Гартогса, некоторые результаты работ ([1], [2]), установленные для пространств функций, аналитических в ограниченных кратных областях Гартогса. Для сокращения записей будем пользоваться обозначениями $w = (z_1, \ldots, z_m)$, $z = (z_{m+1}, \ldots \ldots, z_n)$, $k = (k_1, \ldots, k_m)$, $\|k\| = k_1 + \ldots + k_m$, $w^k = z_1^{k_1} \ldots z_m^{k_m}$.

§ 1. Пусть $D\{|z_j| < R_j(z),\ j = 1, \ldots, m;\ z \in H_D\}$ полная m-кратная область Гартогса с плоскостями симметрии $z_1 = 0, \ldots, z_m = 0$ над пространством C^n (см. ([1], [2])), проекция H_D которой неограничена; $A(D)$ — пространство функций $f(w, z)$, аналитических в области D, с топологией, определяемой равномерной сходимостью функций из $A(D)$ в каждой области, лежащей строго внутри D. Рассмотрим класс $A_1(D) \subset A(D)$ функций $f(w, z) \in A(D)$ и ограниченных в D.

Известно ([1], [2]), что каждая функция $f(w, z) \in A(D)$ представима в области D m-кратным рядом Гартогса

$$f(w, z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) w^k. \tag{1}$$

Теорема 1. *Если функция $f(w, z) \in A_1(D)$ и удовлетворяет в D условию $|f(w, z)| \leqslant M$, то*

$$|f_k(z)| \leqslant \frac{M}{d_k(D)}, \quad d_k(D) = \sup_{(w, z) \in D} |w^k|.$$

Теорема 2. *Если ряд* (1) *сходится в области D и $f(w, z) \in A_1(D)$, то для всякой ее подобласти D_0, $\bar{D}_0 \subset D$, сходится ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sup\limits_{D_0} |f_k(z)|\, d_k(D_0)$.

Следствие. *Если ряд* (1) *сходится в области D и $f(w, z) \in A_1(D)$, то во всякой ее подобласти D_0, $\bar{D}_0 \subset D$, ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(z)\, d_k(D_0)$ *сходится равномерно.*

Теорема 3. *Для сходимости ряда* (1) *к функции $f(w, z) \in A_1(D)$ в области D необходимо и достаточно, чтобы ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sup\limits_{D} |f_k(z)|\, d_k(D)\, w^k$ *сходился в области* $D^{(1)}\{|z_j| < 1,\ j = 1, \ldots, m;\ z \in H_D\}$.

Теорема 4. *Для сходимости ряда* (1) *к функции $f(w, z) \in A_1(D)$ в области D необходимо и достаточно, чтобы ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(z)\, d_k(D) w^k$ *сходился в области* $D^{(1)}$.

Теоремы 1 — 4 доказываются аналогично соответственно теоремам 1 — 4 ([1]).

Аналогично ([1]) введем в рассмотрение счетно-нормированное пространство $B_1(D)$ последовательностей функций $a = \{f_k(z)\}$, являющихся коэффициентами Гартогса функций $f(w, z) \in A_1(D)$, с системой норм

$$\|a\|_r = \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{z \in H_D} |f_k(z)| d_k(D) r^{\|k\|}, \quad 0 < r < 1.$$

Также рассмотрим класс $A_1(\bar{D}) \subset A(\bar{D})$ ограниченных функций, аналитических в замкнутой области $\bar{D}$, и счетно-нормированное пространство $B_1(\bar{D})$ последовательностей их коэффициентов Гартогса $a = \{f_k(z)\}$ с системой норм, взятой аналогично ([1]).

Теорема 5. *Пространства $A_1(D)$ и $B_1(D)$ изоморфны, пространства $A_1(\bar{D})$ и $B_1(\bar{D})$ также изоморфны.*

Теорема 6. *Если $D\{|z_j| < R_j(z),\ j = 1, \ldots, m;\ z \in H_D\}$ и $D_1\{|z_j| < R_j^{(1)}(z),\ j = 1, \ldots, m;\ z \in H_{D_1}\}$ — произвольные полные m-кратные области Гартогса с неограниченными проекциями, имеющие одинаковые проекции $H_D = H_{D_1}$, то пространства $A_1(D)$ и $A_1(D_1)$ изоморфны. Пространства $A_1(\bar{D})$ и $A_1(\bar{D}_1)$ также изоморфны.*

Теоремы 5 и 6 доказываются аналогично теоремам 5 и 6 ([1]).

§ 2. Пусть $D\{|z_j| < R_j(z),\ j=1, \ldots, m;\ z \in H_D\}$ — произвольная полная m-кратная область Гартогса с плоскостями симметрии $z_1 = 0, \ldots, z_m = 0$ над пространством C^n такая, что область $\{\log|z_j|,\ j = 1, \ldots, m\}$ выпукла ([2]). Рассмотрим класс $A'(D) \subset A(D)$ функций $f(w, z)$, удовлетворяющих условию $\|f(w, z)\|_r = \sup_{(w,z) \in D_r} |f(w, z)| < \infty$, $D_r\{(w, z) : (w/r, z) \in D\}$ $(0 < r < 1)$. Класс $A'(D)$ с топологией, определяемой системой норм $\|a\|_r$, является линейным топологическим пространством. В случае, когда область D ограничена, $A'(D)$ совпадает с $A(D)$. Аналогично рассмотрим класс $A'(\bar{D}) \subset A(\bar{D})$ функций $f(w, z)$, удовлетворяющих условию

$$\|f(w, z)\|_r = \sup_{D_r} |f(w, z)| < \infty, \quad D_r\{(w, z)\colon (w/r, z) \in D\} \ (r > 1).$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\alpha_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, m$; $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = \|\alpha\| = 1$; $|w|^\alpha = |z_1|^{\alpha_1} \ldots |z_m|^{\alpha_m}$; $G_D(\alpha) = \sup_{(w, z) \in D} (|w|^\alpha)$, $S_D\{\alpha\colon G_D(\alpha) < \infty\}$ (см. ([3])).

Аналогично лемме 1([3]) можно доказать, что множество S_D выпукло.

Теорема 7. *Если $f(w, z) \in A'(D) \subset A(D)$, то для любого k справедливо неравенство*

$$|f_k(z)| \leqslant \|f(w, z)\|_r / r^{\|k\|} [G_D(k/\|k\|)]^{\|k\|} \quad (0 < r < 1). \tag{2}$$

В частности, если $k/\|k\| \bar{\in} S_D$, то $f_k(z) \equiv 0$.

Доказательство. Возьмем число r, $0 < r < 1$, и рассмотрим область D_r. Пусть $E_\rho \subset D_r$ — произвольный полицилиндр, $E_\rho\{|z_j| < \rho_j,\ j = 1, \ldots, m;\ z = z_0 \in H_D\}$. Для E_ρ справедливы неравенства Коши

$$|f_k(z_0)| \leqslant \max_{(w, z) \in \bar{E}_\rho} |f(w, z)| / \rho_1^{k_1} \ldots \rho_m^{k_m} \leqslant \|f(w, z)\|_r / \rho_1^{k_1} \ldots \rho_m^{k_m}.$$

Переходя в правой части к нижней грани по всем полицилиндрам $E_\rho \subset D_r$, получим (2).

Теорема 8. *Если ряд (1) сходится в области D и $f(w, z) \in A'(D)$, то для всякой ее подобласти D_0, $\bar{D}_0 \subset D$, сходится ряд*

$$\sum_{k/\|k\| \in S_D} \sup_{D_0} |f_k(z)| \left[G_D\left(\frac{k}{\|k\|}\right)\right]^{\|k\|}.$$

Доказательство. Возьмем числа r_1 и r_2, $0 < r_1 < r_2 < 1$, так, чтобы $\bar{D}_0 \subset D_{r_1} \subset D_{r_2} \subset D$. Так как $G_{D_r}(\alpha) = rG_D(\alpha)$, то на основании теоремы 7 имеем

$$\sum_{k/\|k\| \in S_D} \sup_{D_0} |f_k(z)| \left[G_{D_0}\left(\frac{k}{\|k\|}\right)\right]^{\|k\|} \leqslant \sum_{k/\|k\| \in S_D} \sup_{D_{r_1}} |f_k(z)| \left[G_{D_{r_1}}\left(\frac{k}{\|k\|}\right)\right]^{\|k\|} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k/\|k\| \in S_D} r_1^{\|k\|}\left[G_D\left(\frac{k}{\|k\|}\right)\right]^{\|k\|} \frac{\|f(w, z)\|_{r_2}}{[G_{D_{r_2}}(k/\|k\|)]^{\|k\|}} = \|f(w, z)\|_{r_2} \sum_{k/\|k\| \in S_D} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\|k\|} < \infty.$$

Следствие. *Если ряд* (1) *сходится в области* D *и* $f(w, z) \in A'(D)$, *то во всякой ее подобласти* D_0, $\bar{D}_0 \subset D$, *ряд* $\sum_{k/\|k\| \in S_D} f_k(z)\left[G_D\left(\frac{k}{\|k\|}\right)\right]^{\|k\|}$ *сходится равномерно.*

Теорема 9. *Для сходимости ряда* (1) *в области* D *к функции* $f(w, z) \in A'(D)$ *необходимо и достаточно, чтобы ряд*

$$\sum_{k/\|k\| \in S_D} \sup_{z \in H_D} |f_k(z)| \left[G_D\left(\frac{k}{\|k\|}\right)\right]^{\|k\|} w^k \qquad (3)$$

сходился в области $D^{(1)}\{|z_j| < 1, j = 1, \ldots, m; z \in H_D\}$.

Доказательство. Рассмотрим область D_r, $0 < r < 1$. Пусть ряд (3) сходится в области $D^{(1)}$. Это значит, что при любом $r < 1$ сходится ряд

$$\sum_{k/\|k\| \in S_D} \sup_{D_r} |f_k(z)| \left[G_D\left(\frac{k}{\|k\|}\right)\right]^{\|k\|} r^{\|k\|} \qquad (4)$$

или сходится ряд

$$\sum_{k/\|k\| \in S_D} \sup_{D_r} |f_k(z)| \left[G_{D_r}\left(\frac{k}{\|k\|}\right)\right]^{\|k\|}. \qquad (5)$$

Так как

$$|f_k(z) w^k| \leqslant \sup_{D_r} |f_k(z)| \left[G_{D_r}\left(\frac{k}{\|k\|}\right)\right]^{\|k\|},$$

то ряд (1) сходится в области D_r при любом $r < 1$, а следовательно, он сходится и в области D.

Обратно, если ряд (1) сходится в области D, то по теореме 8 для всякой области $D_r (r < 1)$ сходится ряд (5), т. е. при любом $r < 1$ сходится ряд (4). Следовательно, ряд (3) сходится в области $D^{(1)}$.

Аналогично теореме 9 доказывается.

Теорема 10. *Для сходимости ряда* (1) *в области* D *к функции* $f(w, z) \in A'(D)$ *необходимо и достаточно, чтобы ряд* $\sum_{k/\|k\| \in S_D} f_k(z)\left[G_D\left(\frac{k}{\|k\|}\right)\right]^{\|k\|} w^k$ *сходился в области* $D^{(1)}$.

Введем в рассмотрение счетно-нормированное пространство $B'(D)$ m-кратных последовательностей функций $a = \{f_k(z)\}$ $\left(f_k(z) \equiv 0, \text{ если } \frac{k}{\|k\|} \bar{\in} S_D\right)$ с системой норм $\|a\|_r = \sum_{k/\|k\| \in S_D} \sup_{z \in H_D} |f_k(z)| r^{\|k\|}\left[G_D\left(\frac{k}{\|k\|}\right)\right]^{\|k\|}$ $(0 < r < 1)$.

Так же рассмотрим счетно-нормированное пространство $B'(\bar{D})$ последовательностей функций $a = \{f_k(z)\}$ таких, что при некотором $r > 1$, зависящем, вообще говоря, от последовательности,

$$\|a\|_r = \sum_{k/\|k\| \in S_D} \sup_{z \in H_D} |f_k(z)| r^{\|k\|}\left[G_D\left(\frac{k}{\|k\|}\right)\right]^{\|k\|} < \infty,$$

с топологией индуктивного предела банаховых пространств B_r' с нормами $\|a\|_r$.

Теорема 11. *Пространства $A'(D)$ и $B'(D)$ изоморфны, пространства $A'(\bar{D})$ и $B'(\bar{D})$ также изоморфны.*

Доказательство. Теорема 10 устанавливает соответствие между функциями $f(w, z) \in A'(D)$ и последовательностями их коэффициентов Гартогса $a \in B'(D)$. Это соответствие непрерывно в обе стороны по топологии пространств $A'(D)$ и $B'(D)$, так как для любых чисел r и r_1, $0 < r < r_1 < 1$, имеем

$$\|f(w, z)\|_r = \sup_{D_r} \left| \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) w^k \right| \leqslant \sum_{k/\|k\| \in S_D} \sup_{D_r} |f_k(z)| \, r^{\|k\|} \left[G_D\left(\frac{k}{\|k\|}\right) \right]^{\|k\|} = \|a\|_r,$$

$$\|a\|_r \leqslant \|f(w, z)\|_{r_1} \sum_{k/\|k\| \in S_D} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\|k\|}, \quad \sum_{k/\|k\| \in S_D} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\|k\|} < \infty.$$

Аналогично доказывается изоморфизм пространств $A'(\bar{D})$ и $B'(\bar{D})$.

Теорема 12. *Если $D\{|z_j| < R_j(z), j = 1, \ldots, m; z \in H_D\}$ и $D_1\{|z_j| < R_j^{(1)}(z), j = 1, \ldots, m; z \in H_{D_1}\}$ — произвольные полные m-кратные области Гартогса, имеющие одинаковые проекции $H_D = H_{D_1}$, то пространства $A'(D)$ и $A'(D_1)$ изоморфны. Пространства $A'(\bar{D})$ и $A'(\bar{D}_1)$ также изоморфны.*

Теорема доказывается с помощью теорем 10 и 11 аналогично теореме 6 [1].

Следствие. *Если области D и D_1 ограничены, то пространства $A(D)$ и $A(D_1)$ изоморфны; пространства $A(\bar{D})$ и $A(\bar{D}_1)$ также изоморфны.*

Поступило
26 VI 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Ф. Шадров, ДАН, 158, № 2 (1964). [2] А. Ф. Шадров, Волжский матем. сборн., в. 2 (1964). [3] М. М. Драгилев, УМН, 19, в. 1 (115) (1964).