В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис, Полулинейные уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой, *Матем. заметки*, 1988, том 44, выпуск 4, 457–468

https://www.mathnet.ru/mzm4235

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 44, № 4 (1988)

ПОЛУЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФОРМОЙ

В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис

В этой статье изучаются свойства решений уравнения вида

$$Lu = f(x, u),$$

где L — линейный оператор второго порядка. Уравнениям такого типа с эллиптическим оператором L посвящено большое число работ (см. [1—4] и др.). Наиболее подробно исследован случай, когда L — оператор Лапласа.

В настоящей статье будет рассмотрен случай, когда L — оператор второго порядка с неотрицательной характеристической формой. Краткое изложение части результатов этой статьи опубликовано в [5].

Рассматривается уравнение

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f(x, u), \qquad x \in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geqslant 0, \tag{2}$$

$a_{ij}(x)$ — измеримые и ограниченные функции, функция $f(x, u)$ ограничена на каждом компакте в $\mathbf{R}^{n+1}$

$$f(x, 0) = 0, \quad uf(x, u) \geqslant a_0 \mid u \mid^{2+q}, \\ q > 0, \quad a_0 > 0. \tag{3}$$

Для определения обобщенного решения надо ввести специальное функциональное пространство, связанное с оператором L.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченная область. Через $W^L(\Omega)$ обозначим пополнение пространства $C^\infty(\Omega)$ по норме

$$\| F \|_{W^L} = \left(\int_\Omega \sum_{i,\,j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} + \| F \|_{L^{2+q}}. \qquad (4)$$

Через $W^L(\Omega, E)$ обозначим пополнение по норме (4) пространства принадлежащих $C^\infty(\Omega)$ функций, равных нулю в окрестности E.

Под решением уравнения (1) в некотором открытом множестве $G \subset \mathbf{R}^n$ понимается функция $u(x) \in W^L_{\mathrm{loc}}(G) \cap L^\infty_{\mathrm{loc}}(G)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$-\int_G \sum_{i,\,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x = \int_G f(x, u(x))\, \varphi(x) \, \mathrm{d}x \quad (\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 \cdot \ldots \cdot \mathrm{d}x_n)$$

$$\forall \varphi \in W^L(G, \partial G). \qquad (5)$$

Здесь левая часть (5) может быть определена следующим образом (см. также [6]). Для каждой пары функций u, $\varphi \in W^L$ рассматриваются соответствующие им фундаментальные последовательности $\{u^{(k)}\}$, $\{\varphi^{(k)}\}$, $u^{(k)}$, $\varphi^{(k)} \in C^\infty$ и в интеграле

$$\int_G \sum_{i,\,j=1}^n a_{ij} u^{(k)}_{x_i} \varphi^{(k)}_{x_j} \, \mathrm{d}x$$

осуществляется предельный переход при $k \to \infty$, что всегда возможно.

В дальнейшем будут встречаться выражения такого же вида, которым придается смысл аналогичным образом без специального пояснения.

Ниже через $B(x, R)$ будет обозначаться открытый шар в $\mathbf{R}^n$ радиуса R с центром в точке x. Пусть $G \subset \mathbf{R}^n$ — некоторая область. Будем говорить, что $u(x)$ обращается в нуль на множестве $E \subset \partial G$, если $\forall R > 0$ $u \in W^L(G \cap B(0, R), E \cap B(0, R))$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $u(x)$ — решение уравнения* (1) *в области $G \subset B(0, 2)$ из пространства $W^L(G, \partial G \cap B(0, 2))$. Существует константа $C > 0$, зависящая от q, a_0 неравенства* (3) *и от константы, ограничивающей модули коэффициентов a_{ij}, такая, что $\forall p > 1$*

$$\| u \|_{L^p(G \cap B(0,\,1))} \leqslant C \cdot p^{1/q}. \qquad (6)$$

Доказательство. Пусть $\theta(\tau)$ — некоторая фиксированная функция, определенная и непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0, 2]$, удовлетворяющая условиям: $\theta(\tau) \equiv 1$ при $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, $\theta(2) = 0$, $\theta(\tau) \geqslant 0$ при $0 \leqslant \tau \leqslant 2$. Пусть $\zeta(x) = \theta(|x|)$, $|x| \leqslant 2$. Положим в тождестве (4)

$$\varphi(x) = |u|^t \cdot \operatorname{sgn} u \cdot (\zeta(x))^s,$$

где $t > 1$ произвольно, а число $s > 1$ будет выбрано ниже. Получаем

$$-t \int_G \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} |u|^{t-1} \zeta^s \, dx - s \int_G \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} |u|^t \operatorname{sgn} u \zeta^{s-1} \, dx = \int_G f(x, u) |u|^t \operatorname{sgn} u \zeta^s \, dx.$$

Откуда, используя неравенство (2), находим

$$-t \int_G \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} |u|^{t-1} \zeta^s \, dx + s \int_G \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}} \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j}} \zeta^{s-1} \cdot |u|^t \, dx \geqslant a_0 \int_G |u|^{1+q} \zeta^s |u|^t \, dx.$$

Далее, в силу неравенства $2ab \leqslant \varepsilon a^2 + b^2/\varepsilon$, ограниченности коэффициентов a_{ij} и условия (3), получаем

$$C_1 \frac{s^2}{t} \int_G |\nabla \zeta|^2 \zeta^{s-2} |u|^{t+1} \, dx \geqslant a_0 \int_G |u|^{1+q+t} \zeta^s \, dx$$

и поскольку $|\nabla \zeta| < \text{const}$, то

$$C_2 \frac{s^2}{t} \int_G \zeta^{s-2} |u|^{1+t} \, dx \geqslant \int_G |u|^{1+q+t} \zeta^s \, dx,$$

где C_2 не зависит от u.

По неравенству Гёльдера

$$C_3 \frac{s^2}{t} \left(\int_G \zeta^{(s-2)(1+t+q)/(1+t)} |u|^{1+t-q} \, dx \right)^{(1+t)/(1+t+q)} \geqslant \int_G |u|^{1+t+q} \zeta^s \, dx.$$

Выберем s из условия $(s-2)(1+t+q)/(1+t) = s$, т. е.

$$s = \frac{2(1+t+q)}{q}.$$

Тогда

$$C_3 \frac{s^2}{t}\left(\int_G |u|^{1+t+q}\zeta^s\, dx\right)^{(1+t)/(1+t+q)} \geqslant \int_G |u|^{1+t+q}\zeta^s\, dx.$$

Откуда

$$\left(\int_G |u|^{1+t+q}\zeta^s\, dx\right)^{q/(1+t+q)} \leqslant C_3 \frac{s^2}{t},$$

или, полагая $p = 1 + t + q$, получаем

$$\| u \|_{L^p(G \cap B(0,\, 1))} \leqslant C p^{1/q}$$

для произвольно большого p.

Теорема доказана.

Пусть $k > 1$, $l > 0$ — натуральные числа. Рассмотрим два шара $B(0, l)$ и $B(0, l - 1)$.

ЛЕММА 1. *Если $G \subset B(0, l)$ — открытое множество, $u(x)$ — решение уравнения* (1) *в G, обращающееся в нуль на $\partial G \cap B(0, l)$, то*

$$\int_{G\cap B(0,\, l-1)} |u|^{(1+k)q+1}\, dx \leqslant \frac{C_1}{kq} \int_{G \cap B(0,\, l)} |u|^{kq+1}\, dx, \tag{7}$$

где $C_1 > 0$ зависит от q, a_0, n и константы, ограничивающей коэффициенты a_{ij}.

Доказательство. Пусть $\theta(\tau)$ — фиксированная неотрицательная непрерывно дифференцируемая на $[0, l]$ функция, такая что $\theta(\tau) \equiv 1$ при $0 \leqslant \tau \leqslant l - 1$ и $\theta(l) = 0$. Положим $\eta(x) = \theta(|x|)$, $|x| \leqslant l$ и пусть

$$\varphi(x) = |u(x)|^{kq}\, \mathrm{sgn}\, u \cdot \eta(x).$$

Из (5) следует, что

$$-kq \int_G \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} |u|^{kq-1}\eta\, dx -$$
$$- \int_G \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} |u|^{kq}\, \mathrm{sgn}\, u\, dx \geqslant a_0 \int_G |u|^{kq+q+1}\eta\, dx$$

или

$$-kq \int_G \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} |u|^{kq-1}\eta\, dx +$$
$$+ \int_G \sqrt{\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}} \sqrt{\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_j}}\, |u|^{kq} \cdot$$
$$\cdot\, dx \geqslant a_0 \int_G |u|^{(k+1)q+1}\, dx$$

или

$$\frac{1}{kq}\int_G \sum_{i,\,j=1}^{n}{}' a_{ij}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\frac{\partial\eta}{\partial x_j}|u|^{kq+1}\,\mathrm{d}x \geqslant a_0\int_G |u|^{(k+1)q+1}\eta\,\mathrm{d}x$$

и так как $\sum_{i,\,j=1}^{n}{}' a_{ij}\eta_{x_i}\eta_{x_j} < C$, то

$$\int_{G\cap B(0,\,l-1)} |u|^{(k+1)q+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{C_1}{kq}\int_{G\cap B(0,\,l)} |u|^{kq+1}\,\mathrm{d}x.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Фиксируем некоторое произвольное натуральное число* $m > 1/q + 1$. *Пусть* $G \subset B(0, m)$ — *открытое множество и в* G *определено решение* u *уравнения* (1), *обращающееся в нуль на* $\partial G \cap B(0, m)$. *Тогда*

$$\int_{G\cap B(0,\,m-1)} |u|^{1+q}\,\mathrm{d}x \leqslant C_2 m^{nq(q+1)/(q+2)^2} \tag{8}$$

(C_2 *зависит от* q, a_0, n *и от константы, ограничивающей коэффициенты* a_{ij}).

Доказательство. Пусть $\eta(x)$ — та же функция, что и выше (с $l = m$) и $\varphi = \eta^s u$. Получаем

$$-\int_G \sum_{i,\,j=1}^{n}{}' a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\eta^s\,\mathrm{d}x + s\left|\int_G \sum_{i,\,j=1}^{n}{}' a_{ij}u_{x_i}\eta_{x_j}u\,\mathrm{d}x\right| \geqslant$$

$$\geqslant a_0\int_G |u|^{2+q}\eta^s\,\mathrm{d}x$$

или

$$s^2\int_G \sum_{i,\,j=1}^{n}{}' a_{ij}\eta_{x_i}\eta_{x_j}\eta^{s-2}u^2\,\mathrm{d}x \geqslant a_0\int_G |u|^{2+q}\eta^s\,\mathrm{d}x$$

или

$$\int_G |u|^{2+q}\eta^s\,\mathrm{d}x \leqslant C's^2\int_G |u|^2\eta^{s-2}\,\mathrm{d}x.$$

Выбирая s из условия $(s-2)(2+q)/2 = s$, т. е. $s = 2(2+q)/q$, находим, применяя неравенство Гёльдера,

$$C's^2\left(\int_G |u|^{2+q}\eta^s\,\mathrm{d}x\right)^{2/(2+q)}(\mathrm{mes}\,G)^{q/(2+q)} \geqslant \int_G |u|^{2+q}\eta^s\,\mathrm{d}x$$

или

$$\int_{G\cap B(0,\,m-1)} |u|^{2+q}\,\mathrm{d}x \leqslant C''m^{nq/(2+q)}$$

(C'' зависит от тех же величин, что и C'). Отсюда

$$\left(\int_{G\cap B(0,\,m-1)} |u|^{1+q}\,\mathrm{d}x\right)^{1/(1+q)} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{G\cap B(0,\,m-1)} |u|^{2+q}\,\mathrm{d}x\right)^{1/(2+q)} \leqslant (m^{nq/(2+q)})^{1/(2+q)}$$

или

$$\int_{G\cap B(0,\,m-1)} |u|^{1+q}\,\mathrm{d}x \leqslant C_2 m^{nq(1+q)/(2+q)^2}.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть G — открытое множество в шаре $B(0, m)$, где $m > 1 + 1/q$, $u(x)$ — решение уравнения (1) в G, обращающееся в нуль на $\partial G \cap B(0, m)$. Тогда*

$$\|u\|_{L^{mq}(G\cap B(0,1))} \leqslant C\frac{1}{m^{1/q}},$$

где $C > 0$ зависит от q, a_0, n и от константы, ограничивающей a_{ij}.

Доказательство. Докажем по индукции, что

$$\int_{G\cap B(0,\,m-k)} |u|^{1+kq}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{C_1^{k-1}}{k!\,q^{k-1}}\, m^{nq(q+1)/(q+2)^2} \tag{9}$$

$$(k = 1, \ldots, m-1).$$

Действительно, при $k = 1$ по лемме 2 справедливо неравенство (9). Пусть

$$\int_{G\cap B(0,\,m-(k-1))} |u|^{1+(k-1)q}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{C_1^{(k-1)-1}}{(k-1)!\;q^{(k-1)-1}}\, m^{nq(q+1)/(q+2)^2}.$$

Тогда по лемме 1

$$\int_{G\cap B(0,\,m-k)} |u|^{1+kq}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{C_1^{k-1}}{k!\,q^{k-1}}\, m^{nq(q+1)/(q+2)^2}.$$

Итак, неравенство (9) доказано при $k = m - 1$. Отсюда

$$\|u\|_{L^{mq}(G\cap B(0,1))} \leqslant \|u\|_{L^{mq+1}(G\cap B(0,1))} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{C_1^{m-1}}{m!\,q^{m-1}}\, C_2 m^{nq(q+1)/(q+2)^2}\right)^{1/(mq-1)} \leqslant C\frac{1}{m^{1/q}}.$$

Теорема доказана.

В качестве следствия этой теоремы мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Если $G \subset \mathbf{R}^n$ — неограниченная область и $u(x)$ — решение уравнения (1) в G, обращающееся в нуль на ∂G, то $u \equiv 0$. В частности, если $u(x)$ — решение уравнения (1) в $\mathbf{R}^n$, то $u \equiv 0$.*

Другим следствием теоремы 2 является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $K \subset \mathbf{R}^n$ — *компакт,* $G \subset \mathbf{R}^n$ — *неограниченная область,* $G \cap K \neq \varnothing$ *и в* $G \setminus K$ *определено решение* $u(x)$ *уравнения* (1), *обращающееся в нуль на* $\partial G \setminus K$. *Тогда для любого* $p > 1$ *найдется* $R_0 > 0$ *такое, что для любого* $x \in G$ *такого, что* $\operatorname{dist}(x, K) > R_0$, *вытекает*

$$\| u \|_{L^p(B(x,1))} \leqslant \frac{C}{(\operatorname{dist}(x, K))^{1/q}},$$

где константа $C > 0$ *зависит от* q, a_0, n *и от константы, ограничивающей* a_{ij}.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* $0 < \alpha < n - 2$, $K \subset B(\mathbf{0}, 1)$ — *компакт.*

$$\mu_\alpha K < M < \infty, \tag{10}$$

где μ_α — *мера Хаусдорфа порядка* α.

Пусть

$$q > \frac{2}{n-2-\alpha}, \tag{11}$$

$G = B(\mathbf{0}, 2) \setminus K$ *и в* G *определено решение* $u(x)$ *уравнения* (1). *Тогда*

$$\| u \|_{L^{1+q}(B(\mathbf{0},1))} < C, \tag{12}$$

где C *зависит от* α, q, a_0 *и от константы, ограничивающей* a_{ij}.

Доказательство. Покроем K конечным числом шаров $B(x_i, r_i)$ $(i = 1, \ldots, s)$ так, чтобы выполнялось

$$B(x_i, 2r_i) \subset B(\mathbf{0}, 1),$$

$$\sum_{i=1}^{s} (2r_i)^\alpha < M, \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{s} (2r_i)^n < \varepsilon. \tag{14}$$

Число $\varepsilon > 0$ в дальнейшем мы будем стремить к нулю.

Положим

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x - x_i| \geqslant 2r_i, \\ 0 & \text{при } |x - x_i| \leqslant r_i, \\ \dfrac{|x - x_i| - r_i}{r_i} & \text{при } r_i < |x - x_i| < 2r_i. \end{cases}$$

Пусть $\zeta(x)$, $|x| \leqslant 2$ — неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция, $0 \leqslant \zeta(x)$, $\zeta(x) \equiv 1$ при $|x| \leqslant 1$ и $\zeta(x) = 0$ при $|x| = 2$.

Положим

$$\eta(x) = \min(\zeta(x), \mu_1(x), \ldots, \mu_s(x)).$$

Пусть

$$2\varepsilon_1 = \min\left(1, q - \frac{2}{n-2-\alpha}\right) \text{ и } q_1 = q - \varepsilon_1. \qquad (15)$$

Зададим некоторое $\delta > 0$ и положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} |u|^{\varepsilon_1} \operatorname{sgn} u \cdot \eta^s & \text{при } |u| > \delta, \\ \frac{1}{\delta^{1-\varepsilon_1}} u \cdot \eta^s & \text{при } 0 < |u| \leqslant \delta, \\ 0 & \text{при } u = 0. \end{cases}$$

Число s будет указано ниже. Из (5) следует тогда

$$-\varepsilon_1 \int_{x\in G\ |u(x)|>\delta} \sum a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} |u|^{\varepsilon_1 - 1} \eta^s \, dx +$$
$$+ s \left| \int_{x\in G\ |u(x)|>\delta} \sum a_{ij} u_{x_i} \eta_{x_j} |u|^{\varepsilon_1} \eta^{s-1} \, dx \right| -$$
$$- \frac{1}{\delta^{1-\varepsilon_1}} \int_{x\in G\ 0<|u(x)|\leqslant\delta} \sum a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} \eta^s \, dx +$$
$$+ \frac{s}{\delta^{1+\varepsilon_1}} \left| \int_{x\in G\ 0<|u(x)|\leqslant\delta} \sum a_{ij} u_{x_i} \eta_{x_j} \eta^{s-1} |u| \, dx \right| \geqslant$$
$$\geqslant a_0 \int_G |u|^{1+q} \varphi \, dx.$$

Откуда

$$\frac{s^2}{\varepsilon_1} \int_{x\in G\ |u(x)|>\delta} \sum a_{ij} \eta_{x_i} \eta_{x_j} |u|^{1+\varepsilon} \eta^{s-2} \, dx +$$
$$+ \frac{s^2}{\delta^{1-\varepsilon_1}} \int_{0<|u(x)|\leqslant\delta} \sum a_{ij} \eta_{x_i} \eta_{x_j} |u|^2 \eta^{s-2} \, dx \geqslant a_0 \int_G |u|^{1+q} \varphi \, dx,$$

или (учитывая (15))

$$\frac{s^2}{\varepsilon_1} \int_{x\in G\ |u(x)|>\delta} |\nabla\eta|^2 |u|^{1+\varepsilon_1} \eta^{s-2} \, dx +$$
$$+ \delta^{1-\varepsilon_1} \int_{x\in G\ 0<|u(x)|\leqslant\delta} \sum a_{ij} \eta_{x_i} \eta_{x_j} \eta^{s-2} \, dx \geqslant a_0 \int_G |u|^{1+q_1+\varepsilon_1} \eta^s \, dx.$$

Поскольку это неравенство справедливо при всех $\delta > 0$, то устремляя δ к нулю, получаем

$$C \int_G |\nabla u|^2 |u|^{1+\varepsilon_1} \eta^{s-2} \, dx \geqslant \int_G |u|^{1+q_1+\varepsilon_1} \, dx. \qquad (16)$$

Константа $C > 0$ зависит от ε_1 и s (а также от q, a_0 и константы, ограничивающей a_{ij}).

Найдем s из условия

$$(s-2)\frac{1+q_1+\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}=s. \tag{17}$$

Применяя к левой части (16) неравенство Гёльдера, получаем, используя (17),

$$C_1\left(\int_G |\nabla\eta|^{2(1+q_1+\varepsilon_1)/q_1}\eta^s\,\mathrm{d}x\right)^{q_1/(1+q_1+\varepsilon_1)}\cdot$$
$$\cdot\left(\int_G |u|^{1+q_1+\varepsilon_1}\eta^s\,\mathrm{d}x\right)^{(1+\varepsilon_1)/(1+q_1+\varepsilon_1)}\geqslant\int_G |u|^{1+q_1+\varepsilon_1}\eta^s\,\mathrm{d}x$$

или

$$\left(\int_G |u|^{1+q_1+\varepsilon_1}\eta^s\,\mathrm{d}x\right)^{q_1/(1+q_1+\varepsilon_1)}\leqslant C_1\left(\int_G |\nabla\eta|^{2(1+q_1+\varepsilon_1)/q_1}\,\mathrm{d}x\right)^{q_1/(1+q_1+\varepsilon_1)}. \tag{18}$$

Так как

$$\int_{G\cap B(0,1)}|\nabla\eta|^{2(1+q_1+\varepsilon_1)/q_1}\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{1}{r_i}\right)^{2(1+q_1+\varepsilon_1)/q_1}2^n r_i^n\leqslant$$
$$\leqslant C_2\sum_{i=1}^{s} r_i^{n-2(1+\varepsilon_1+q_1)/q_1}\leqslant C_2\sum_{i=1}^{s} r_i^{n-2(1+q)/q}=C_2\sum_{i=1}^{s} r_i^{\alpha}\leqslant C_2M$$

(мы учли здесь (15)), то из (18) получаем (также учитывая (15))

$$\int_{G\cap B(0,1)}|u|^{1+q}\eta^s\,\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\leqslant C_1C_2M+\int_{G\cap(B(0,2)\setminus B(0,1))}|\nabla\eta|^{2(1+q_1+\varepsilon_1)/q_1}\leqslant C_1C_2M+C_3=C_4.$$

Константа C_4 не зависит от ε в неравенстве (15). Устремляя ε к нулю и используя (14), мы получаем окончательно:

$$\|u\|_{L^{1+q}(B(0,1))}\leqslant C.$$

Теорема доказана.

ЛЕММА 3. *Предположим дополнительно, что в уравнении* (1) *функция* $|f(x, u)|$ *выпукла книзу по* u. *Пусть* $0<\alpha<n-2$, $K\subset B(0, 1)$ — *компакт,*

$$\mu_\alpha K = 0. \tag{19}$$

Пусть $q > \dfrac{2}{n-2-\alpha}$. *Положим* $\Omega = B(0, 2)\setminus K$ *и пусть в* Ω *определены решения* u *и* v *уравнения* (1) *такие, что* $u - v\in W^L(\Omega, \partial\Omega\setminus K)$. *Тогда* $u\equiv v$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in W^L(\Omega, \partial\Omega \setminus K)$. Имеем

$$-\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \varphi_{x_j}\, dx = \int_\Omega f(x, u)\, \varphi\, dx,$$

$$-\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_{x_i} \varphi_{x_j} = \int_\Omega f(x, v)\, \varphi\, dx$$

и

$$-\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} (u - v)_{x_i} \varphi_{x_j}\, dx = \int_\Omega (f(x, u) - f(x, v))\, \varphi\, dx.$$

Предположим теперь, что

$$\operatorname{sgn} \varphi = \operatorname{sgn}(u - v). \tag{20}$$

Тогда

$$(f(x, u) - f(x, v))\, \varphi(x) = |f(x, u) - f(x, v)|\, \varphi(x)| \geqslant$$
$$\geqslant |f(x, u - v)|\, \varphi(x)| = f(x, u - v)\, \varphi(x).$$

Поэтому, если выполнено условие (20) и $u - v = w$, то

$$-\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_{x_i} \varphi_{x_j}\, dx \geqslant \int_\Omega f(x, w)\, \varphi\, dx, \tag{21}$$

а потому

$$-\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_{x_i} \varphi_{x_j}\, dx \geqslant a_0 \int_\Omega |w|^{1+q} |\varphi|\, dx. \tag{22}$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и фиксируем его. Покроем K конечным числом открытых шаров $B(x_i, r_i)$, $i = 1, \ldots, s$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{s} r_i^\alpha < \varepsilon.$$

Положим, как и при доказательстве теоремы 5,

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x - x_i| \geqslant 2r_i, \\ 0 & \text{при } |x - x_i| \leqslant r_i, \\ \dfrac{|x - x_i| - r_i}{r_i} & \text{при } \eta < |x - x_i| < 2r_i \end{cases}$$

и пусть

$$\zeta(x) = \min(\mu_1, \ldots, \mu_s).$$

Пусть

$$2\varepsilon_1 = \min\left(q - \frac{2}{n - 2 - \alpha}, 1\right) \text{ и } q_1 = q - \varepsilon_1. \tag{23}$$

Зададим положительное δ и положим

$$\varphi(x)=\begin{cases} |w|^{\varepsilon_1}\operatorname{sgn} w\,\zeta^s & \text{при } |w|>\delta, \\ \dfrac{1}{\delta^{1-\varepsilon_1}}\,w\cdot\zeta^s & \text{при } 0<|w|\leqslant\delta, \\ 0 & \text{при } w=0 \end{cases}$$

(так что условие (20) выполняется). Число s подчиним неравенству (17). Так как выполнено (20), то из (22) получаем

$$\begin{aligned} &-\varepsilon_1\int_{x\in\Omega\ |w(x)|>\delta}\sum a_{ij}w_{x_i}w_{x_j}|w|^{\varepsilon_1-1}\zeta^s\,dx+\\ &\quad+s\left|\int_{x\in\Omega\ |w(x)|>\delta}\sum a_{ij}w_{x_i}\zeta_{x_j}\zeta^{s-1}|w|^{\varepsilon_1}\,dx\right|-\\ &\quad-\frac{1}{\delta^{1-\varepsilon_1}}\int_{x\in\Omega\ 0<|w(x)|\leqslant\delta}\sum a_{ij}w_{x_i}w_{x_j}\zeta^s\,dx+\\ &\quad+\frac{s}{\delta^{1-\varepsilon_1}}\left|\int_{x\in\Omega\ 0<|w(x)|\leqslant\delta}\sum a_{ij}w_{x_i}\zeta_{x_j}\zeta^{s-1}|w|\,dx\right|\geqslant\\ &\qquad\geqslant a_0\int_\Omega|w|^{1+q_1+\varepsilon}\zeta^s\,dx. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} &\frac{s^2}{\varepsilon_1}\int_{x\in\Omega\ |w(x)|>\delta}|\nabla\eta|^2|w|^{1+\varepsilon_1}\zeta^{s-2}\,dx+\\ &\quad+\delta^{1+\varepsilon_1}\int_{x\in\Omega}\sum a_{ij}\zeta_{x_i}\zeta_{x_j}\zeta^{s-2}\,dx\geqslant a_0\int_\Omega|w|^{1+q_1+\varepsilon_1}\zeta^s\,dx. \end{aligned}$$

Так как это неравенство справедливо при всех δ, то, устремляя δ к нулю, получаем

$$C\int_\Omega|\nabla\zeta|^2 w^{1+\varepsilon_1}\zeta^{s-2}\,dx\geqslant\int_\Omega|w|^{1+q_1+\varepsilon_1}\zeta^s\,dx.$$

Применяя к левой части неравенство Гёльдера, и учитывая (17), находим

$$\begin{aligned} &\left(\int_\Omega|w|^{1+q_1+\varepsilon_1}\zeta^s\,dx\right)^{q_1/(1+q_1+\varepsilon_1)}\leqslant\\ &\qquad\leqslant C\left(\int_\Omega|\nabla\zeta|^{2(1+q_1+\varepsilon_1)/q_1}\,dx\right)^{q_1/(1+q_1+\varepsilon_1)} \end{aligned}$$

или

$$\int_\Omega|w|^{1+q}\zeta^s\,dx<C_1\sum_{i=1}^{s}r_i^\alpha<\varepsilon C_1$$

и так как ε произвольно, то $w\equiv 0$.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть функция* $f(x, u)$ *удовлетворяет условиям* (3) *и* $|f(x, u)|$ *выпукла книзу по* u, $K \subset B(0, 1)$ — *компакт*, $0 < \alpha < n - 2$, $\mu_\alpha K = 0$ *и* $q > 2/(n - 2 - \alpha)$. *Пусть* u — *решение уравнения* (1) *в* $B(0, 2) \setminus K = \Omega$. *Тогда* u *является решением уравнения* (1) *в* $B(0, 2)$.

Доказательство. Допустим, что v — решение уравнения (1) в $B(0, 2)$ такое, что $u - v \in W^L(\Omega, \partial B(0, 2))$. Тогда по лемме 3 $u \equiv v$.

Будем строить функцию v как решение вариационной задачи: функция z допустима, если $z \in W^L(\Omega)$ и $z - u \in W^L(\Omega, \partial B(0, 2))$. Найдем v как функцию, дающую минимум неотрицательному функционалу

$$\int_{B(0,2)} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z_{x_i} z_{x_j} \, dx + 2 \int_0^z F(x, z) \, dz$$

в классе допустимых функций. Доказательство существования решения этой экстремальной задачи стандартно.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
21.03.88

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Brezis H., Veron L. Removable singularities for some nonlinear elliptic equations // Arch. for Rat. Mech. and Anal.— 1980. V. 75, № 1. P. 1—6.

[2] Veron L. Comportement asymptotiques des solutions d'equations elliptiques semi-lineaires dans $\mathbf{R}^N$ // Ann. Mat. Pure Appl. 1981. T. 127, Ser. 4. P. 25—50.

[3] Veron L. Singular solution of some nonlinear elliptic equation // Nonlinear anal. 1981. V. 5, № 3. P. 225—249.

[4] Кондратьев В. А., Ландис Е. М. О некоторых качественных свойствах решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка // Мат. сб. 1983. Т. 135, вып. 3. С. 346—358.

[5] Кондратьев В. А., Ландис Е. М. Полулинейные уравнения // УМН. 1987. Т. 42, вып. 5. С. 233—234.

[6] Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Итоги науки, сер. математика. Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1971. С. 7. С. 251.