E. G. Emel'yanov, On quadratic differentials in multiply connected domains that are perfect squares. II, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2007, Volume 350, 40–51

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 350, 2007 г.

Е. Г. Емельянов

О КВАДРАТИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ПОЛНЫМИ КВАДРАТАМИ. II

Данная работа продолжает исследования в [1]. Квадратичные дифференциалы, указанные в заглавии, рассматриваются в связи с двумя задачами об экстремальном разбиении области G: о разбиении на круговые и кольцевые области и о разбиении на двуугольники с заданными вершинами и углами в них. Показано, что значение функционала для разбиения, порожденного таким квадратичным дифференциалом, является наибольшим в некотором классе подобных задач. Эти результаты проясняют связь между подходами к получению неравенств в теории функций, основанными на методе экстремальной метрики и на теории плоских конденсаторов и их обобщений.

§1. Разбиения на круговые и кольцевые области

1.1. Всюду в дальнейшем $G \subset \mathbb{C}$ – $(m+1)$-связная область, $\partial G = \bigcup_{k \le m} \gamma_k$, где γ_k – аналитическая жорданова кривая, γ_0 – внешняя компонента границы. Для $\varepsilon > 0$ обозначим $\Delta_\varepsilon(a) = (z : |z-a| < \varepsilon)$, Δ – единичный круг, $L_\epsilon = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\varepsilon}$. Для вещественных векторов $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$ обозначим $\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$, $\|X\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

1.2. Приведем основные факты о разбиениях области G на круговые и кольцевые области, которые понадобятся в дальнейшем (см. также [1, теоремы A и B].)

Пусть $Z = (z_j)_{j=1}^n$, – фиксированное множество точек области G и пусть

$$G' = G \setminus Z, \quad G_\varepsilon = G \setminus \bigcup_j \overline{\Delta}_\varepsilon(z_j).$$

Пусть Qdz^2 – положительный квадратичный дифференциал на G

с полюсами второго порядка в точках z_j,

$$Q(z) = -\frac{\alpha_j^2}{4\pi^2}\frac{1}{(z-z_j)^2} + \dots$$

в окрестности точки z_j, $\alpha_j \in \mathbb{R}$. Пусть множество критических траекторий Qdz^2 разбивает G на систему $D = \{\mathcal{D}_j\}_{j=1}^n$ неналегающих областей на G, где $\mathcal{D}_j$ – круговая область при $j \le n, z_j \in \mathcal{D}_j$, $\mathcal{D}_{n+k}, k \le s$ – кольцевая область. Тогда:

1. Имеет место равенство

$$\mathcal{M} = \lim_{\epsilon \to 0}\left\{\int\limits_{G_\epsilon}|Q|d\sigma - \|\alpha\|^2 L_\epsilon\right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^n {\alpha_j}^2 M(\mathcal{D}_j, z_j) + \sum_{k\le s} {l_k}^2 M(\mathcal{D}_{n+k}), \quad (1)$$

где $M(\mathcal{D}, z)$ – приведенный модуль области $\mathcal{D}$ относительно точки $z \in \mathcal{D}$, $M(\mathcal{D})$ – модуль семейства кривых в двусвязной области $\mathcal{D}$, разделяющих ее граничные компоненты.

2. Если $\rho(z)|dz|$ – метрика на G' такая, что ρ – длина замкнутой кривой, гомотопной на G' замкнутой траектории в $\mathcal{D}_j$, $j \le n$, не меньше $|\alpha|$, ρ – длина замкнутой кривой, гомотопной на G' замкнутой траектории в $\mathcal{D}_{n+k}$, $k \le s$, не меньше l_k, то

$$\mathcal{M} \le \lim_{\epsilon \to 0}\left\{\int\limits_{G_\epsilon}\rho^2 d\sigma - \|\alpha\|^2 L_\epsilon\right\} \quad (2)$$

1.3. Мы будем рассматривать случай, когда $Qdz^2 = -(qdz)^2$, где функция

$$q(z) - \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{2\pi}\frac{1}{z-z_j}$$

регулярна в G, $\alpha_j \in \mathbb{R}$ для $1 \le j \le n$.

Пусть F – аналитическая в G функция, $F' = q$, $h = \operatorname{Re} F$. Тогда $q = 2h'_z$. Из условия положительности к.д. Qdz^2 на G следует (см. [1]), что h постоянна на γ_k, $0 \le k \le m$. Можем считать, что $h|_{\gamma_0} = 0$. Отсюда видно, что h – гармоническая в G_ϵ функция,

$$h(z) = \sum_{j\le n}\alpha_j g(z, z_j) + \sum_{k=1}^m x_k H_k, \quad (3)$$

где
$$g(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|z-\zeta|}+\omega(z,\zeta)$$

– функция Грина области G с полюсом в точке ζ, H_k – гармоническая мера компоненты γ_k относительно области G, $x_k = h\Big|_{\gamma_k}$. Пусть $D=(\mathcal{D})_{j=1}^{m+r}$ – система областей разбиения, порожденного к.д. $-(qdz)^2$. Тогда верно равенство (1). Кроме того, как показано в [1], мы имеем
$$\mathcal{M}=\langle\Omega\alpha,\alpha\rangle+\langle AX,X\rangle, \tag{4}$$

где $\Omega - (n \ltimes n)$-симметричная матрица $\Omega_{i,j}$, $\Omega_{j,j}=\omega(z_j,z_j)$, $\Omega_{i,j}=g(z_i,z_j)$, A – $(n\times n)$-симметричная матрица емкостных коэффициентов области G.

1.4. Свойства метрики $|q||dz|$ позволяют оценить снизу длину любой замкнутой жордановой кривой (простой петли) σ на G'. Именно, справедлива

Лемма 1. *Пусть σ – простая петля на G'. Тогда*
$$\int_\sigma |q||dz|\geq L_{X,\alpha}(\sigma),$$

где
$$L_{X,\alpha}(\sigma)=$$
$$=\left|\sum_{j:z_j\prec\sigma}\alpha_j\,H_{\rm ext}(z_j)-\sum_{j:z_j\prec\sigma}\alpha_j\,H_{\rm int}(z_j)+\sum_{k:\gamma_k\prec\sigma}A_kX\right|, \tag{5}$$

где $z_j\prec\sigma$, $\gamma_k\prec\sigma$ означает, что точка z_j (соответственно, компонента γ_k) лежит внутри σ,
$$H_{\rm ext}(z)=\sum_{k:\gamma_k\prec\sigma}H_k(z),\quad H_{\rm int}(z)=\sum_{k:\gamma_k\prec\sigma}H_k(z),$$

A_k – k-я строка матрицы емкостных коэффициентов A, X – столбец $(x_1,\dots,x_m)$.

Доказательство следует из цепочки соотношений

$$\int_\sigma |q||dz| \geq \left|\operatorname{Re}\int_\sigma q\,dz\right| = \left|\int_\sigma \frac{\partial}{\partial n}h\right| =$$

$$= \left| - \sum_{k:\gamma_k \prec \sigma} \int_{\gamma_k} \frac{\partial}{\partial n}h - \sum_{j:z_j\prec\sigma} \int_{|z-z_j|=\epsilon} \frac{\partial}{\partial n}h \right|,$$

где n – внутренняя нормаль, и из (3). Равенство в (5) достигается в том и только в том случае, когда σ – замкнутая траектория к.д.

1.5. Из леммы 1 немедленно следует

Теорема 1. *Пусть $\widehat{Q}dz^2$ – положительный на G квадратичный дифференциал с полюсами второго порядка в точках z_j, $j \leq n$,*

$$\widehat{Q}(z) = -\frac{{\alpha_j}^2}{4\pi^2}\frac{1}{(z-z_j)^2} + \cdots,$$

множество критических траекторий которого разбивает G на систему $\widehat{D} = (\widehat{\mathcal{D}_j})_{j=1}^{n+t}$ круговых и кольцевых областей,

$$\widehat{\mathcal{M}} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 M(\widehat{\mathcal{D}}_j, z_j) + \sum_{k=1}^{t} \widehat{l}_k^2 M(\widehat{\mathcal{D}}_{n+k})$$

где $\widehat{l}_k$ – $\widehat{Q}$-длина замкнутой траектории $\sigma_k \subset \widehat{D}_k$. Тогда, если

$$\widehat{l}_k \leq L_{X,\alpha}(\sigma_k),$$

то

$$\widehat{\mathcal{M}} \leq \langle \Omega\alpha, \alpha\rangle + \langle AX, X\rangle.$$

Доказательство следует из неравенства (2) при $\rho = |q|$.

1.6. В простейшем случае $G = \Delta$ получаем

Следствие. *Пусть функция f регулярна и однолистна в Δ, $|f(z)| < 1$. Тогда для любых вещественных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ имеем:*

$$\sum_{i,j\leq n} \alpha_i\,\alpha_j\,\log\left|\frac{f(z_i)-f(z_j)}{1-f(z_i)\overline{f(z_j)}}\right| \leq \sum_{i,j\leq n} \alpha_i\,\alpha_j\,\log\left|\frac{z_i-z_j}{1-z_i\overline{z_j}}\right|. \qquad (6)$$

Неравенство (6) получено в [2], как следствие неравенства для емкостей обобщенных конденсаторов. Положим

$$h(z)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\,\log\left|\frac{1-z\overline{z_j}}{z-z_j}\right|,\quad q=2h_z{}',$$

$$\mathcal{M}^z=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2M(\mathcal{D}_j,z_j)+\sum_{k\le s}l_k^2M(\mathcal{D}_k),$$

где $D=(\mathcal{D}_j)_{j=1}^{n+s}$ – система областей разбиения, порожденного к.д. $-(qdz)^2$. Имеем в силу (5):

$$l_k=L_\alpha(\sigma_k)=\left|\sum_{j:z_j\prec\sigma}\alpha_j\right|.$$

Рассмотрим задачу экстремального разбиения круга Δ для множества точек $w_j=f(z_j)$, простых петель $f(\sigma_1),\dots,f(\sigma_s)$ и весовых множителей $|\alpha_1|,\dots,|\alpha_n|$, $l_1,\dots,l_s$. Пусть $\widehat{\mathcal{M}}^w$ – экстремальное значение функционала разбиения для этой задачи. Тогда, очевидно,

$$\mathcal{M}^z+\sum_{j=1}^{n}\frac{{\alpha_j}^2}{2\pi}\log|f'(z_j)|\le\widehat{\mathcal{M}}^w.\tag{7}$$

Квадратичный дифференциал, ассоциированный с этой задачей, не обязан быть полным квадратом. Положим

$$\widehat{h}(w)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{2\pi}\log\left|\frac{1-w\overline{w_j}}{w-w_j}\right|,\quad \widehat{q}=2\widehat{h}'_w.$$

Длина петли $f(\sigma_k)$ в метрике $|\widehat{q}||dz|$ по лемме 1 не меньше, чем $L_\alpha(f(\sigma_k))$. Очевидно, что $L_\alpha(f(\sigma_k))=L_\alpha(\sigma_k)$, откуда по теореме 1 следует $\widehat{\mathcal{M}}^w\le\mathcal{M}^w$, что вместе с (7) дает (6).

§2. Разбиения на двуугольники

2.1. Приведем нужные нам факты о задачах об экстремальном разбиении области G на двуугольники. Пусть $Z=(z_j)_{j=1}^{n+r}$, $z_j\in G$ при $j\le n$, $z_j\in\partial G$ при $n<j\le n+r$, – заданные множества точек, $\Gamma=(\Gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ – набор жордановых кривых в G с концами в точках z_i,z_j, $i=i(\lambda)$, $j=j(\lambda)$, удовлетворяющий условиям:

1. Кривые Γ_λ и $\Gamma_{\lambda'}$ при $\lambda \neq \lambda'$ не имеют общих точек кроме, возможно, концевых.

2. Если $i(\lambda) = i(\lambda')$, $j(\lambda) = j(\lambda')$, $\lambda \neq \lambda'$, то Γ_λ и $\Gamma_{\lambda'}$ не гомотопны на G'.

Двуугольник $\widehat{\mathcal{D}} \subset G'$ с вершинами в точках $z_{i(\lambda)}$, $z_{j(\lambda)}$ называется ассоциированным с кривой Γ_λ, если найдется жорданова кривая в $\widehat{\mathcal{D}}$ с концами в $z_{i(\lambda)}$, $z_{j(\lambda)}$, гомотопная на G' кривой Γ_λ. Мы будем считать границу области $\widehat{\mathcal{D}}$ в окрестности вершин z_i, z_j настолько хорошей, чтобы существовал приведенный модуль

$$M(\widehat{\mathcal{D}}, z_i, z_j) = \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ M\big(\widehat{\mathcal{D}}(\epsilon)\big) - \Big(\frac{1}{\phi_i} + \frac{1}{\phi_j}\Big) \log \frac{1}{\epsilon} \right\},$$

где $\widehat{\mathcal{D}}(\epsilon) = \widehat{\mathcal{D}} \setminus (\overline{\Delta_\epsilon}(z_i) \bigcup \overline{\Delta_\epsilon}(z_j))$, ϕ_i, ϕ_j – внутренние углы области $\widehat{\mathcal{D}}$ в вершинах z_i, z_j соответственно.

Пусть также задан набор положительных чисел $h = (h_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Система двуугольников $\widehat{D} = (\widehat{\mathcal{D}}_\lambda)$ называется допустимой (относительно Γ, h), если двуугольник $\widehat{\mathcal{D}}_\lambda$ ассоциирован с Γ_λ и выполнено условие согласования углов: если z_i – вершина $\widehat{\mathcal{D}}_\lambda$, то

$$\begin{aligned} \phi_i(\lambda) &= 2\pi h_\lambda / \sum_{\lambda' \sim i} h_{\lambda'}, \qquad && i \leq n, \\ \phi_i(\lambda) &= \quad \pi h_\lambda / \sum_{\lambda' \sim i}, && n < i \leq n + r, \end{aligned}$$

где $\lambda' \sim i$ означает, что точка z_i является одним из концов кривой $\Gamma_{\lambda'}$. При этих условиях справедлива

Теорема D. *Для заданного множества точек Z, системы жордановых кривых Γ и набора весов h существует единственный положительный на G квадратичный дифференциал Qdz^2, множество критических траекторий которого разбивает область G на систему полосообразных областей (двуугольников) $D = (\mathcal{D}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, доставляющую максимум $\mathcal{M} = \mathcal{M}(h, \Gamma, Z)$ функционала*

$$\sum_{h,\Gamma,Z} (\widehat{D}) = - \sum_{\lambda \in \Lambda} h_\lambda^2 M(\widehat{\mathcal{D}}_\lambda, z_i, z_j)$$

по множеству всех допустимых систем областей. При этом

$$-\mathcal{M} = \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \int\limits_{G_\epsilon} |Q| d\sigma - \Big(\sum_{j \leq n} \alpha_j^2 + 2 \sum_{k \leq r} \alpha_{n+k}^2 \Big) L_\epsilon \right\}. \tag{8}$$

В точках $z_j \in Z$ $Q(z)$ имеет место разложение

$$Q(z) = \frac{{\alpha_j}^2}{4\pi^2}\frac{1}{(z-z_j)^2} + \cdots, \quad j \le n,$$

$$Q(z) = \frac{{\alpha_j}^2}{\pi^2}\frac{1}{(z-z_j)^2} + \cdots, \quad n < j \le n+r,$$

где

$$|\alpha_j| = \sum_{\lambda \sim i} h_\lambda. \tag{9}$$

2.2. Мы рассмотрим случай, когда дифференциал из теоремы D является полным квадратом. Чтобы доказать существование нужных нам дифференциалов понадобятся две леммы.

Лемма 2. 1) *Пусть $a, b \in G$. Существует функция*

$$N_{a,b}(z) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|z-a|} - \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|z-b|} + \omega_{a,b}(z), \tag{10}$$

где $\omega_{a,b}(z)$ – гармоническая в G и непрерывна на $\overline{G}$ функция такая, что

$$\frac{\partial}{\partial n}N_{a,b}\Big|_{\gamma_k} = 0, \quad 0 \le k \le m. \tag{11}$$

2) *Пусть $a \in G$, $b \in \partial G$. Существует функция*

$$N_{a,b}(z) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|z-a|} - \frac{1}{\pi}\log\frac{1}{|z-b|} + \omega_{a,b}(z), \tag{12}$$

где $\omega_{a,b}(z)$ – гармоническая в G функция, удовлетворяющая условию (11) *для $z \ne b$.*

Доказательство. 1) Существует конформное однолистное отображение $f_{a,b}(z)$ области G на сферу $\overline{\mathbb{C}}$ с радиальными разрезами, $f_{a,b}(a) = 0$, $f_{a,b}(b) = \infty, f'_{a,b}(a) = 1$. Положим

$$N_{a,b}(z) = -\frac{1}{2\pi}\log|f_{a,b}(z)|. \tag{13}$$

2) Пусть $b' \in G$, $b' \to b$. Тогда, как легко видеть, $f_{a,b'}(z) \to f_{a,b}(z)$. Если $b \in \gamma_k$, то $f_{a,b}$ отображает γ_k на радиальный отрезок с одним концом в ∞. Определим снова $N_{a,b}(z)$ посредством равенства (13). Поскольку

$$\frac{1}{f_{a,b}(z)} = \mathrm{const}(z-b)^2$$

в окрестности точки b, то получаем (12).

Лемма 3. *Для заданного множества точек Z и набора вещественных чисел $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+r}$, удовлетворяющих условию*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n+r} = 0, \tag{14}$$

существует единственная с точностью до аддитивной константы функция

$$l(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \le n} \alpha_j \log \frac{1}{|z - z_j|} + \frac{1}{\pi} \sum_{k \le r} \alpha_{n+k} \log \frac{1}{|z - z_{n+k}|} + \omega(z) \tag{15}$$

такая, что $\omega(z)$ – гармоническая в G и непрерывная в $\overline{G}$, $\frac{\partial}{\partial n} l|_{\partial G} = 0$ при $0 \le k \le m$, $z \ne z_{n+1}, \ldots, z_{n+r}$.

Доказательство. Положим $J^+ = \{j : j \le n + r, \alpha_j > 0\}$, $J^- = \{j : j \le n+r, \alpha_j < 0\}$ и пусть J^+ содержит p индексов, а J^- q-индексов, $p + q = n + r$. Система уравнений

$$\sum_{j \in J^-} x_{i,j} = \alpha_i, \quad i \in J^+, \qquad \sum_{i \in J^+} x_{i,j} = -\alpha_j, \quad j \in J^-, \tag{16}$$

с дополнительным условием $x_{i,j} \ge 0$ имеет благодаря условию (14) бесконечно много решений. Пусть $\{x_{i,j}\}$ – какое-нибудь решение системы (16). Положим

$$l(z) = \sum_{i \in J^+, j \in J^-} x_{i,j} N_{z_i, z_j}(z) \tag{17}$$

Легко видеть, что все условия на функцию l выполнены благодаря условиям (11), (12) и (16). Если l_1 – другая функция, удовлетворяющая тем же условиям, то $l - l_1$ – гармоническая в G и $\frac{\partial}{\partial n}(l - l_1)|_{\partial G} = 0$, откуда следует, что $l_1 = l + \mathrm{const}$. Для $|z - z_j| = \epsilon$ имеем:

$$\begin{aligned} l(z) &= \alpha_j L_\epsilon + c_j + O(\epsilon) \quad \text{при} \quad j \le n, \\ l(z) &= 2\alpha_j L_\epsilon + c_j + O(\epsilon) \quad \text{при} \quad n < j \le n + r, \end{aligned} \tag{18}$$

2.3. Квадратичный дифференциал $Qdz^2 = (2l'_z dz)^2$ – положительный на G. Он не имеет замкнутых траекторий, так как вдоль любой траектории функция l монотонна. Следовательно, множество его критических траекторий разбивает G на систему полосообразных областей (двуугольников) $D = \{\mathcal{D}_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$, которая по теореме D является экстремальной для соответствующей задачи о разбиении. При этом в нашем случае

$$\int\limits_{G_\epsilon} |Q| d\sigma = \int\limits_{G_\epsilon} |\nabla l|^2 d\sigma =$$

$$= -\sum_{j\leq n} \int\limits_{|z-z_j|=\epsilon} l \cdot \frac{\partial}{\partial n} l \quad - \sum_{k\leq r} \int\limits_{(|z-z_{n+k}|=\epsilon)\bigcap G} l \cdot \frac{\partial}{\partial n} l. \qquad (19)$$

Из (19) при помощи (18) получаем

$$\int\limits_{g_\epsilon} |Q| d\sigma = \left\{ \sum_{j\leq n} {\alpha_j}^2 + 2\sum_{k\leq r} \alpha_{n+k}^2 \right\} L_\epsilon + \sum_{j=1}^{n+k} c_j \alpha_j + O(\epsilon), \qquad (20)$$

откуда по теореме D следует

$$\mathcal{M} = -\sum_{j=1}^{n+k} \alpha_j c_j. \qquad (21)$$

2.4. Метрика $|q||dz|$ имеет очевидное свойство: длина всякой кривой в G_ϵ, соединяющей точку u на окружности $|z-z_i| = \epsilon$, $i \in J^+$, с точкой v на окружности $|z-z_j| = \epsilon$, $j \in J^-$, не меньше чем

$$L_{i,j}(\epsilon) = l(u) - l(v) = (\alpha_i - \alpha_j) L_\epsilon + c_i - c_j + O(\epsilon). \qquad (22)$$

Это свойство служит основанием для следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть $D' = \{\mathcal{D}'_\lambda\}$ – экстремальная система двуугольников в задаче разбиения области G для множества точек Z, набора весов $h' = \{h'_\lambda\}$ и системы кривых $\Gamma' = \{\gamma'_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda'$. Двуугольник $\mathcal{D}'_\lambda$ имеет вершины в точках z_i, $z_j \in Z : i = i'(\lambda)$, $j = j'(\lambda)$. Пусть*

$$\widehat{\mathcal{M}} = \sum_{h',\Gamma',Z} (D')$$

– значение функционала рабиения для этой системы областей. Пусть функция l определена равенством (15), где значения $|\alpha_j|$, $1 \leq j \leq n+r$, удовлетворяют условию (9), $J^+ = \{j : \alpha_j > 0\}$, $J^- = \{j : \alpha_j < 0\}$. Пусть $q = 2l'_z$, $Qdz^2 = (qdz)^2$, $D = \{\mathcal{D}_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$ – система областей разбиения, порожденного квадратичным дифференциалом Qdz^2, величина $\mathcal{M}$ определена посредством равенства

(8). *Тогда, если для всех* $\lambda \in \Lambda'$ *выполняется условие:* $i'(\lambda) \in J^+$, $j'(\lambda) \in J^-$, *то* $\widehat{\mathcal{M}} \le \mathcal{M}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}_\lambda(\epsilon) = \mathcal{D}_\lambda \setminus (\overline{\Delta}_\epsilon(z_i) \bigcup \overline{\Delta}_\epsilon(z_j))$, $M(\mathcal{D}'_\lambda(\epsilon)) = {l'}_\lambda(\epsilon)/h'_\lambda$.

Тогда, как следует из теоремы D,

$$-\widehat{\mathcal{M}} = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda'} {h'}_\lambda {l'}_\lambda(\epsilon) - \left(\sum_{j \le n} {\alpha^2}_j + 2 \sum_{k \le r} {\alpha^2}_{n+k} \right) L_\epsilon \right). \qquad (23)$$

Имеем :

$$\sum_{\lambda \in \Lambda'} {h'}_\lambda {l'}_\lambda(\epsilon) \ge 2 \sum_{\lambda \in \Lambda'} {h'}_\lambda l_\lambda(\epsilon) - \sum_{\lambda \in \Lambda'} {l_\lambda}^2(\epsilon) \frac{{h'}_\lambda}{{l'}_\lambda(\epsilon)}. \qquad (24)$$

Для первой суммы в (24) имеем в силу (18)

$$\sum_{\lambda \in \Lambda'} {h'}_\lambda l_\lambda(\epsilon) = \left\{ \sum_{j \le n} {\alpha_j}^2 + 2 \sum_{k \le r} {\alpha_{n+k}}^2 \right\} L_\epsilon - \mathcal{M} + O(\epsilon). \qquad (25)$$

Во второй сумме отношение ${h'}_\lambda/{l'}_\lambda(\epsilon)$ есть модуль семейства кривых в ${\mathcal{D}'}_\lambda$, соединяющих дуги окружностей $|z - z_i| = \epsilon$, $|z - z_j| = \epsilon$. Благодаря свойству метрики $|q||dz|$ имеем:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda'} {l_\lambda}^2 \frac{{h'}_\lambda}{{l'}_\lambda(\epsilon)} \le \int\limits_{G_\epsilon} |q|^2 d\sigma =$$

$$= \left\{ \sum_{j \le n} {\alpha_j}^2 + 2 \sum_{k \le r} {\alpha_{n+k}}^2 \right\} L_\epsilon - \mathcal{M} + O(\epsilon). \qquad (26)$$

Условия (23)–(25) дают утверждение теоремы.

В случае $G = \Delta$ в качестве следствия получаем теорему из [2]:

Следствие. *Пусть функция* f *регулярна и однолистна в* Δ, $|f(z)| < 1$. *Пусть* f *и* f' *определены также в точках* z_{n+k}, $|z_{n+k}| = 1$, $k \le r$. *Тогда для любых вещественных чисел* α_j, $1 \le j \le n + r$, *удовлетворяющих условию* $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n+r} = 0$, *и любых точек* z_j, $|z_j| < 1$, $j \le n$, *справедливо неравенство:*

$$\sum_{i,j \le n+r} \alpha_i \alpha_j \log \left| \frac{f(z_i) - f(z_j)}{z_i - z_j} \right| + \sum_{k \le r} {\alpha_{n+k}}^2 \log |f'(z_k)| \ge$$

$$\ge \sum_{j \le n} {\alpha_j}^2 \log \frac{1 - |z_j|^2}{1 - |f(z_j)|^2}. \qquad (27)$$

Доказательство. Положим

$$l(z) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j \le n+r} \alpha_j \log |(z - z_j)(1 - z\overline{z_j})|,$$

$$\widehat{l}(w) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j \le n+r} \alpha_j \log |(w - w_j)(1 - w\widehat{w_j})|,$$

где $w_j = f(z_j)$, $j \le n + r$. Тогда по (21) имеем

$$\mathcal{M}^z = \frac{1}{2\pi}\Big\{ \sum_{j \le n} \alpha_j{}^2 \log(1 - |z_j|^2) + \sum_{i,j \le n+r} \alpha_i\alpha_j \log |(1 - z_i\overline{z_j})(z_i - z_j)|\Big\},$$

$$\mathcal{M}^w = \frac{1}{2\pi}\Big\{ \sum_{j \le n} \alpha_j{}^2 \log(1-|w_j|^2) + \sum_{i,j \le n+r} \alpha_i\alpha_j \log |(1 - w_i\overline{w_j})(w_i - w_j)|\Big\}.$$

При этом

$$\mathcal{M}^z = -\sum_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda{}^2 M(\mathcal{D}_\lambda, z_i, z_j),$$

$$\mathcal{M}^z - \frac{1}{2\pi}\Big\{ \big(\sum_{j \le n} \alpha_j{}^2 \log |f'(z_j)| + +2 \sum_{k \le r} \alpha_{n+k}{}^2 \log |f'(z_{n+k})|\big)\Big\} =$$

$$= -\sum_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda{}^2 M(f(\mathcal{D}_\lambda), w_i, w_j). \tag{28}$$

Последняя сумма в (28) не превосходит максимума $\widehat{\mathcal{M}}^w$ по всем допустимым системам двуугольников $\widehat{\mathcal{D}}_\lambda$ в Δ с вершинами в точках w_i, w_j, $i = i(\lambda)$, $j = j(\lambda)$. Условия теоремы 2 выполнены, и мы имеем неравенство $\widehat{\mathcal{M}}^w \le \mathcal{M}^w$, что и доказывает следствие.

Замечание. Теоремы 1 и 2 показывают, что неравенства, полученные в [2] при помощи техники обобщенных конденсаторов, являются естественными следствиями результатов, получаемых при помощи метода экстремальной метрики.

Литература

1. Е. Г. Емельянов, *О квадратичных дифференциалах в многосвязных областях, являющихся полными квадратами,* Зап. научн. семин. ПОМИ **337** (2006), 113–132.

2. В. Н. Дубинин, Н. В. Эйрих, *Некоторые применения обобщенных конденсаторов в теории аналитических функций,* Зап. научн. семин. ПОМИ **314** (2004), 52–75.

С.-Петербургский университет
экономики и финансов

Поступило 16 октября 2007 г.