

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

G. A. Gaisina, The order of growth of a series of exponentials near the boundary of the convergence domain, *Algebra i Analiz*, 2021, Volume 33, Issue 3, 31–50

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.169

March 15, 2025, 14:23:03



ПОРЯДОК РОСТА РЯДА ЭКСПОНЕНТ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ

© Г. А. ГАЙСИНА

Для класса аналитических в ограниченной выпуклой области G функций, представимых в ней рядом экспонент, в терминах порядка роста вблизи границы ∂G изучается поведение коэффициентов разложения в ряд экспонент. В случае, когда область G имеет гладкую границу, установлены наилучшие двусторонние оценки для порядка через характеристики, зависящие только от показателей ряда экспонент и опорной функции области G . Как следствие получена формула для вычисления порядка ряда экспонент через коэффициенты и опорную функцию области сходимости G .

Введение

Пусть D — ограниченная выпуклая область в \mathbb{C} , содержащая начало координат, $K(\varphi)$ — опорная функция \overline{D} , $h(\varphi) = K(-\varphi)$, $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа с индикатрисой роста $h(\varphi)$ и простыми нулями λ_k , $k = 1, 2, \dots$. Если предположить, что

$$|L(re^{i\varphi})| \leq \frac{A}{r^\mu} e^{h(\varphi)r}, \quad \mu > 1, \quad (0.1)$$

то аналитические продолжения функций

$$\psi_k(t) = \frac{1}{L'(\lambda_k)} \int_0^{\infty e^{i\varphi_0}} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} e^{-\lambda t} d\lambda \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \operatorname{Re}(te^{i\varphi_0}) > h(\varphi_0)$$

(они образуют систему, биортогональную к системе экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}$), как известно, регулярны вне \overline{D} , непрерывны вплоть до границы ∂D и $\psi_k(\infty) = 0$

Ключевые слова: ряд экспонент, область с гладкой границей, поведение вблизи границы, порядок роста.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, дополнительное соглашение №075-02-2020-1421/1 к соглашению №075-02-2020-1421.

(см. [1, глава IV, §1, п. 3]). Поэтому каждой функции f , аналитической в D и непрерывной в \overline{D} , ставится в соответствие ряд экспонент

$$f(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}, \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(t) \psi_k(t) dt, \quad k \geq 1. \quad (0.2)$$

Хорошо известно, что при условии (0.1) функции ψ_k на ∂D удовлетворяют оценкам (см. [1, глава IV, §1, п. 3])

$$|\psi_k(t)| \leq \frac{A}{|L'(\lambda_k)|}, \quad t \in \partial D, \quad k \geq 1,$$

где постоянная A не зависит от k . Так что коэффициенты ряда (0.2) имеют оценки

$$|a_k| \leq \frac{A}{|L'(\lambda_k)|} \max_{t \in \partial D} |f(t)|, \quad k \geq 1. \quad (0.3)$$

Пусть выполнено условие (0.1) и, кроме того:

- 1) $L(\lambda)$ — функция вполне регулярного роста;
- 2) для всякого $\varepsilon > 0$ при $k \geq k_0(\varepsilon)$

$$\ln |L'(\lambda_k)| \geq [h(\varphi_k) - \varepsilon] r_k, \quad \lambda_k = r_k e^{i\varphi_k}, \quad k \geq 1. \quad (0.4)$$

Тогда любая функция f , аналитическая в D и непрерывная в \overline{D} , представляется в области D рядом (0.2) (см. [1, глава IV, §6, теорема 4.6.4]), то есть

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}$$

(сходимость — равномерная внутри D), причем, как видно из (0.3), (0.4), для всякого $\varepsilon > 0$ при $k \geq k_0(\varepsilon)$

$$|a_k| \leq B e^{[-h(\varphi_k) + \varepsilon] r_k}. \quad (0.5)$$

Если же вместо (0.4) выполняется более сильное условие (см. [2])¹

$$|L'(\lambda_k)| \geq \frac{C}{r_k^p} e^{h(\varphi_k) r_k}, \quad k \geq 1, \quad (0.6)$$

то оценка (0.5), очевидно, допускает качественное улучшение.

Рассматривая самую общую ситуацию, когда функция f только аналитична в D , А. Ф. Леонтьев показал (см. [1, глава V, §2, теорема 5.2.1]), что существуют целая функция $M(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$ с ростом не выше первого

¹А. Ф. Леонтьев был вынужден лишь постулировать это требование, ибо в общей ситуации не было известно, выполняется ли оно хотя бы для какой-то функции $L(\lambda)$. Если, например, D — выпуклый многоугольник, то условие (0.6) будет выполнено при $p = 2$ (см. [2]).

порядка минимального типа и функция g , аналитическая в D и непрерывная в \overline{D} , такие, что

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k g^{(k)}(z), \quad z \in D.$$

Тогда, представляя функцию g рядом (0.2), получим представление

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{\lambda_k z}, \quad b_k = a_k M(\lambda_k), \quad z \in D. \quad (0.7)$$

Учитывая неравенства (0.3) для a_k , замечаем, что соответствующие оценки для коэффициентов b_k ряда (0.7) зависят от оценок снизу для $|L'(\lambda_k)|$ и оценок сверху для $|M(\lambda_k)|$. В случае (0.6), например, имеем:

$$|b_k| \leq Cr_k^p |M(\lambda_k)| e^{-h(\varphi)r_k}, \quad k \geq 1. \quad (0.8)$$

При этом данные оценки, как видно, никакой дополнительной информации о поведении $|M(\lambda_k)|$ при $k \rightarrow \infty$ не доставляют. Однако, если функция f вблизи ∂D имеет заданный рост, например, если для любого $\varepsilon > 0$ при $r < r_0(\varepsilon)$

$$|f(z)| \leq \exp \left[\left(\frac{1}{r} \right)^{q+\varepsilon} \right], \quad r = d(z),$$

где $d(z) = \rho(z, \partial D) = \inf_{\xi \in \partial D} |z - \xi|$, то, как показано в [2], функция $M(\lambda)$ имеет порядок не выше $q/(q+1)$, и тогда из (0.8) сразу следует, что

$$|b_k| \leq e^{r_k^{p+\varepsilon} - h(\varphi_k)r_k}, \quad k \geq k_0(\varepsilon), \quad p = \frac{q}{q+1}. \quad (0.9)$$

Таким образом, в этом случае любая аналитическая в D функция f порядка

$$\rho_f = \overline{\lim}_{z \rightarrow \partial D} \frac{\ln^+ \ln^+ |f(z)|}{-\ln d(z)}, \quad a^+ = \max(a, 0),$$

не превышающего q^1 , допускает разложение в ряд экспонент (0.7), причем при $r < r_0(\varepsilon)$ (см. в [2])

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k e^{\lambda_k z}| \leq \exp \left[\left(\frac{1}{r} \right)^{q+\varepsilon} \right], \quad r = d(z),$$

$\varepsilon > 0$ — любое.

¹Отметим также, что в статье [3] Р. С. Юлмухаметовым изучается пространство $H(q)$ аналитических в D функций порядка не выше q , где в терминах преобразования Лапласа получено описание пространства $H'(q)$, сопряженного с $H(q)$.

В настоящей работе речь будет идти о классе $H(G, \Lambda)$ аналитических в выпуклой ограниченной области G функций, имеющих конечный порядок и представимых в G рядами экспонент с множеством показателей $\Lambda = \{\lambda_k\}$. Будет показано, что для любой такой области G найдется последовательность Λ , имеющая нулевую плотность и нулевой индекс конденсации

$$\delta = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_k|} \ln \left| \frac{1}{Q'(\lambda_k)} \right|, \quad Q(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} \right), \quad \lambda_k^2 \neq \lambda_n^2 \text{ при } k \neq n,$$

такая, что $H(G, \Lambda) \neq \emptyset$.

Цель статьи — доказать следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть G — произвольная ограниченная выпуклая область с гладкой границей, а $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — последовательность, имеющая нулевую плотность и нулевой индекс конденсации, такая, что $H(G, \Lambda) \neq \emptyset$. Тогда порядок ρ_f любой функции $f \in H(G, \Lambda)$ удовлетворяет оценкам

$$\frac{\rho_f}{\rho_f + 1} \leq \beta \leq \max \left(\frac{\rho_f}{\rho_f + 1}, q_0 \right), \quad (0.10)$$

где

$$\beta = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ \ln^+ [|a_k| e^{K(-\varphi_k) |\lambda_k|}]}{\ln |\lambda_k|}, \quad q_0 = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ \ln \frac{1}{|Q'(\lambda_k)|}}{\ln |\lambda_k|},$$

$\lambda_k = |\lambda_k| e^{i\varphi_k}$, $K(\varphi)$ — опорная функция области G .

Будет показано, что оценки (0.10) неулучшаемы.

§1. Вспомогательные утверждения

Нам понадобятся некоторые вспомогательные факты.

Лемма 1. Пусть D — конечная выпуклая область, $K(\varphi)$ — опорная функция \overline{D} , $h(\varphi) = K(-\varphi)$, $\{\lambda_k\}$ — последовательность комплексных чисел с конечной верхней плотностью:

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|} = \tau < \infty.$$

Если для любого $\varepsilon > 0$ при $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$|a_k| \leq \exp [-h(\varphi_k) |\lambda_k| + |\lambda_k|^{p+\varepsilon}], \quad (1.1)$$

$\varphi_k = \arg \lambda_k$, $0 \leq p < 1$, то для любого $\nu > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k e^{\lambda_k z}| \leq \exp \left[\left(\frac{1}{r} \right)^{q+\nu} \right], \quad (1.2)$$

где $r = d(z)$, $q = p/(1 - p)$, $z \in D$, $r < r_0(\nu)$.

Лемма доказана в [2]. Отметим только следующее.

Если $z \in D$, $\arg \lambda = \varphi$, $\arg z = \psi$, то

$$|e^{\lambda z}| = \exp [|\lambda||z| \cos(\varphi + \psi)],$$

где выражение $|z| \cos(\varphi + \psi)$ есть проекция вектора z на луч $\{t : \arg t = -\varphi, t > 0\}$. Очевидно, что

$$|z| \cos(\varphi + \psi) < h(\varphi) - d(z), \quad z \in D. \quad (1.3)$$

Так что из (1.1), (1.3) получаем

$$|a_k e^{\lambda_k z}| \leq A(\varepsilon) \exp [|\lambda_k|^{p+\varepsilon} - r|\lambda_k|], \quad k \geq 1,$$

где $r = d(z)$, $0 \leq p < 1$. Отсюда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k e^{\lambda_k z}| \leq A(\varepsilon) \exp \left[\max_{k \geq 1} (2|\lambda_k|^{p+\varepsilon} - r|\lambda_k|) \right] \sum_{k=1}^{\infty} e^{-|\lambda_k|^{p+\varepsilon}}. \quad (1.4)$$

Максимум явно подсчитывается, а поскольку $\tau < \infty$, то последний ряд сходится. Как показано в [2], правая часть в (1.4) не превосходит величины

$$B(\nu) \exp \left[\left(\frac{1}{r} \right)^{q+\nu} \right], \quad r > 0,$$

$\nu > 0$ — любое.

Таким образом, оценка (1.2) имеет место для любой ограниченной выпуклой области D . При этом в лемме 1, как видно, никаких дополнительных условий на границу ∂D не требуется. Однако если вместо условия $\tau < \infty$ выполнено более слабое требование $\ln k = o(|\lambda_k|)$ при $k \rightarrow \infty$, то лемма 1 вообще неверна (см. [2]). В то же самое время, если показатели ряда экспонент

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}, \quad z \in D, \quad (1.5)$$

имеют конечную верхнюю плотность, а функция f — конечный порядок ρ_f , $\rho_f \leq q$, то в общей ситуации оценка (1.1) для коэффициентов a_k может также не иметь места. Дело в том, что сумма ряда экспонент (1.5) в области D может равняться нулю тождественно, а его коэффициенты не равны нулю и могут иметь гораздо больший рост, нежели правая часть в оценках (1.1).

Рассмотрим соответствующий пример. Пусть $\varphi(r)$ — любая положительная возрастающая на $[0, \infty)$ функция, такая, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \varphi(r)}{r} = 0.$$

Известно (см. [1, глава I, §3, п. 6, теорема 1.3.6]), что существует целая функция $L(\lambda)$ вполне регулярного роста с индикатрисой роста $h(\varphi) = K(-\varphi)$ (где $K(\varphi)$ — опорная функция \overline{D}), для которой выполняется условие (0.4) и

$$|L(re^{i\varphi})| \leq \frac{e^{h(\varphi)r}}{\varphi(r)}.$$

Тогда имеем (см. [1, Дополнение]):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)} = 0, \quad z \in D. \quad (1.6)$$

В [2] показано, что для коэффициентов $a_k = |L'(\lambda_k)|^{-1}$ ряда (1.6) имеют место оценки: при $k \geq k_0$

$$|a_k| \geq A^{-1} \varphi(|\lambda_k| - 1) e^{-h(\varphi_k)|\lambda_k|}, \quad A = \exp(\max_{t \in \overline{D}} |t|).$$

Видим, что сумма ряда (1.6) равна нулю в D , а коэффициенты a_k за счет выбора $\varphi(r)$ могут не иметь оценок типа (1.1). Действительно, можно, например, взять функцию

$$\varphi(r) = \exp\left[\frac{r}{\ln(r+e)}\right], \quad r \geq 0.$$

Таким образом, в подобной ситуации, когда λ_k ($k = 1, 2, \dots$) — простые нули некоторой целой функции экспоненциального типа $L(\lambda)$, для которой \overline{D} — сопряженная диаграмма, нельзя ставить вопрос о какой-либо формуле, выражающей зависимость порядка ρ_f произвольной аналитической в D функции f от коэффициентов ее разложения в ряд экспонент (1.5). Другое дело, если соответствующий ряд экспонент сходится в большей области G , $G \supset \overline{D}$. В этом случае система экспонент $\{e^{\lambda_k z}\}$ не полна в пространстве аналитических в G функций, и можно указать формулы для коэффициентов (см. [4], [5, глава II, §2, п. 7]). Но тогда при некоторых дополнительных условиях на показатели λ_k можно вести речь о какой-либо связи между порядком ρ_f суммы ряда (1.5) в области G и коэффициентами разложения a_k .

Итак, пусть ряд

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z} \quad (1.7)$$

сходится в области $G \supset \overline{D}$. Поскольку верхняя плотность $\tau < \infty$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{|\lambda_k|} = 0,$$

и потому область сходимости G совпадает с областью абсолютной сходимости ряда (1.7). Поэтому область G выпукла (см. [1, глава III, §1, п. 1]).

Для исследуемых здесь задач нам вполне подходит функция $Q(\lambda)$, определенная в конце введения. Поведение этой функции полностью определяется распределением точек λ_k , показателей ряда (1.7), и наоборот.

Известно (см. [5, глава II, §3, теорема 3.1]), что при выполнении условий

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_k|} \ln \left| \frac{1}{Q'(\lambda_k)} \right| = 0 \quad (1.8)$$

область сходимости G ряда (1.7) совпадает с областью H регулярности его суммы. Поэтому в дальнейшем будем считать, что выполнены условия (1.8).

Так как плотность $\tau = 0$, то $\overline{D} = \{0\}$, где \overline{D} — сопряженная диаграмма функции $Q(\lambda)$. Следовательно, имеем (см. [5, глава II, §2, п. 7])

$$a_k = e^{-\lambda_k z} \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\delta} \psi_k(t) f(t+z) dt, \quad k \geq 1, \quad (1.9)$$

причем для каждого $z \in G$ величина $\delta > 0$ выбирается так, чтобы $t+z \in G$ для всех $t, |t| = \delta$. Здесь

$$\psi_k(t) = \frac{1}{Q'(\lambda_k)} \int_0^{\infty e^{i\varphi_0}} \frac{Q(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} e^{-\lambda t} d\lambda, \quad t \in \Pi(\varphi_0),$$

где $\Pi(\varphi_0) = \{t: \operatorname{Re}(te^{i\varphi_0}) \geq \delta\}$. Отсюда следует, что для всех $\varphi_0, 0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi$, равномерно

$$\max_{t \in \Pi(\varphi_0)} |\psi_k(t)| \leq \frac{1}{|Q'(\lambda_k)|} \int_0^\infty \max_{|\lambda|=r} \left| \frac{Q(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \right| e^{-\delta r} dr, \quad r = |\lambda|. \quad (1.10)$$

Покажем, что для всякого $k \geq 1$

$$\max_{|\lambda|=r} \left| \frac{Q(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \right| \leq M(1)M(r), \quad M(r) = \prod_{k=1}^\infty \left(1 + \frac{r^2}{|\lambda_k|^2} \right). \quad (1.11)$$

Действительно, для всякого $k \geq 1$

$$\left| \frac{Q(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \right| = \frac{1}{|\lambda_k|} \left| 1 + \frac{\lambda}{\lambda_k} \prod_{k \neq n} \left| 1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} \right| \right|. \quad (1.12)$$

Поскольку еще

$$\frac{1}{|\lambda_k|} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{|\lambda_k|^2} \right),$$

а

$$1 + \frac{r}{|\lambda_k|} \leq 2 \left(1 + \frac{r^2}{|\lambda_k|^2} \right), \quad r = |\lambda|,$$

то оценка (1.11) легко следует из (1.12). Поскольку правая часть в (1.10) не зависит от φ_0 , то будем иметь

$$\max_{|t|=\delta} |\psi_k(t)| \leq \frac{M(1)}{|Q'(\lambda_k)|} \int_0^\infty M(r) e^{-\delta r} dr, \quad k \geq 1.$$

В итоге из (1.9) получим оценки: для всех $z \in G$, $k = 1, 2, \dots$

$$|a_k| \leq \frac{|e^{-\lambda_k z}|}{|Q'(\lambda_k)|} M(1) \delta H(\delta) \max_{|\xi-z| \leq \delta} |f(\xi)|,$$

где

$$H(\delta) = \int_0^\infty M(r) e^{-\delta r} dr, \quad \delta < \rho(z, \partial G) = \inf_{t \in \partial G} |z - t|.$$

Лемма 2. *Целая функция $Q(\lambda)$ имеет порядок не выше $q = \rho_f / (\rho_f + 1)$ тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ при $0 < \delta < \delta_0(\varepsilon)$*

$$H(\delta) \leq \exp \left[\left(\frac{1}{\delta} \right)^{\rho_f + \varepsilon} \right]. \quad (1.13)$$

Для функции

$$H_0(\delta) = \int_0^\infty M_0(r) e^{-\delta r} dr,$$

где

$$M_0(r) = \max_{|\lambda|=r} |Q(\lambda)|, \quad r = |\lambda|,$$

лемма доказана в [4]. Здесь вместо $H_0(\delta)$ рассматривается функция $H(\delta)$, определяемая через $M(r) = Q_1(ir)$, где

$$Q_1(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{|\lambda_k|^2} \right).$$

Но функции $Q(\lambda)$ и $Q_1(\lambda)$ имеют один и тот же порядок, равный (см. [5, глава I, §3, п. 5])

$$\inf \left\{ \mu : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|^\mu} < \infty \right\}.$$

Поэтому лемма 2 есть аналог леммы из [4]. Из нее следует, что

$$\overline{\lim}_{\delta \downarrow 0} \frac{\ln \ln H(\delta)}{-\ln \delta} \leq \rho_f$$

тогда и только тогда, когда целая функция $Q(\lambda)$ имеет порядок не выше $\rho_f/(\rho_f + 1)$.

Нам понадобится и следующее утверждение из [6].

Лемма 3. Пусть G — ограниченная выпуклая область с гладкой границей ∂G , $z_0 \in \partial G$, N_0 — нормаль в точке z_0 . Тогда при $z \in G \cap N_0$ и $z \rightarrow z_0$

$$|z - z_0| = d(z)(1 + o(1)),$$

где $d(z) = \rho(z, \partial G) = \min_{\xi \in \partial G} |z - \xi|$.

§2. Доказательство теоремы 1

Доказательство. Приступим к доказательству теоремы. Для этого воспользуемся оценками для коэффициентов a_k (они были установлены выше), переписав их в виде: для всех $z \in G$, $\delta < \rho(z, \partial G)$

$$|a_k| \leq M(1) \frac{1}{|Q'(\lambda_k)|} \delta H(\delta) |e^{-\lambda_k z}| \max_{|t|=\delta} |f(t+z)|, \quad z \in G, \quad k \geq 1. \quad (2.1)$$

Пусть $\lambda_k = |\lambda_k|e^{i\varphi_k}$, а z_k — точка границы ∂G , такая, что $\operatorname{Re}(z_k e^{i\varphi_k}) = K(-\varphi_k)$ (здесь $K(\varphi)$ — опорная функция компакта \overline{G}). Если N_k — нормаль в точке z_k , а $z \in G \cap N_k$, $z \rightarrow z_k$, то, по лемме 3,

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re}(\lambda_k z) &= -K(-\varphi_k)|\lambda_k| + \operatorname{Re}[\lambda_k z_k - \lambda_k z] \\ &\leq K(-\varphi_k)|\lambda_k| + |\lambda_k||z_k - z| \\ &= -K(-\varphi_k)|\lambda_k| + |\lambda_k|(1 + o(1))d(z), \end{aligned}$$

где $d(z) = \rho(z, \partial G)$. Учитывая это и лемму 2, из (1.13), (2.1) получаем: для всякого $\varepsilon > 0$ при $\delta < \delta_0(\varepsilon)$

$$|a_k| \leq \frac{e^{-K(-\varphi_k)|\lambda_k| + |\lambda_k|(1+o(1))d(z)}}{|Q'(\lambda_k)|} \exp \left[\left(\frac{1}{\delta} \right)^{\rho_f + \varepsilon} \right] \max_{|t|=\delta} |f(t+z)| \quad (2.2)$$

при $z \rightarrow z_k$, $z \in G \cap N_k$.

Положим $\delta = \gamma d(z)$, где γ — фиксированное число из интервала $(0, 1)$. Тогда $\delta < d(z)$. Так как функция $d(z) = \rho(z, \partial G)$ удовлетворяет условию Липшица в G (см. [7, глава II, §6]), то есть для всех z', z'' из G

$$|d(z') - d(z'')| \leq |z' - z''|,$$

то

$$d(t+z) \geq d(z) - \delta = (1 - \gamma)d(z), \quad 0 < \gamma < 1. \quad (2.3)$$

Функция f имеет порядок ρ_f . Значит, в силу (2.3),

$$\max_{|t|=\delta} |f(t+z)| \leq \exp \left[\left(\frac{1}{(1-\gamma)d(z)} \right)^{\rho_f+\varepsilon} \right],$$

если $d(z) < d_1(\varepsilon)$ (где $\varepsilon > 0$ — та же величина, что и в формуле (2.2)), значение γ (такое, что $0 < \gamma < 1$) фиксировано. Значит, для заданного $\varepsilon > 0$ при $d(z) < d_2(\varepsilon) < d_1(\varepsilon)$

$$|a_k| \leq \frac{e^{-K(-\varphi_k)|\lambda_k|}}{|Q'(\lambda_k)|} \exp \left[\left(\frac{1}{d(z)} \right)^{\rho_f+2\varepsilon} + 2|\lambda_k|d(z) \right].$$

Отсюда, переходя к независимой переменной d , имеем

$$|a_k| e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|} \leq \frac{1}{|Q'(\lambda_k)|} \exp \left\{ \inf_{0 < d < d_2} \left[\left(\frac{1}{d} \right)^{\rho_f+2\varepsilon} + 2d|\lambda_k| \right] \right\}. \quad (2.4)$$

Проверяется, что для любого $\varepsilon > 0$

$$I = \inf_{0 < d < d_2} \left[\left(\frac{1}{d} \right)^{\rho_f+2\varepsilon} + 2d|\lambda_k| \right] \leq N_{\rho_f}(\varepsilon) |\lambda_k|^{\rho_1/(\rho_1+1)},$$

где $\rho_1 = \rho_f + 2\varepsilon$. Значит, для любого $\nu > 0$

$$I \leq |\lambda_k|^{\rho_f/(\rho_f+1)+\nu}$$

при $k \geq k_0(\nu)$. Учитывая это, из (2.4) получаем: для любого $\nu > 0$ при $k \geq k_0(\nu)$

$$|a_k| e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|} \leq \frac{1}{|Q'(\lambda_k)|} e^{|\lambda_k|^{\rho_f/(\rho_f+1)+\nu}}.$$

Следовательно,

$$\ln^+ \left[|a_k| e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|} \right] \leq \ln \frac{1}{|Q'(\lambda_k)|} + |\lambda_k|^{\rho_f/(\rho_f+1)+\nu},$$

а отсюда

$$\ln^+ \left[|a_k| e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|} \right] \leq 2 \max \left(\ln \frac{1}{|Q'(\lambda_k)|}, |\lambda_k|^{\rho_f/(\rho_f+1)+\nu} \right), \quad k \geq k_0(\nu).$$

Таким образом,

$$\frac{\ln^+ \ln^+ \left[|a_k| e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|} \right]}{\ln |\lambda_k|} \leq \frac{\ln 2}{\ln |\lambda_k|} + \max \left(\frac{\ln^+ \ln \frac{1}{|Q'(\lambda_k)|}}{\ln |\lambda_k|}, \frac{\rho_f}{\rho_f+1} + \nu \right),$$

$k \geq k_0(\nu)$, $\nu > 0$ — любое. Значит,

$$\beta = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ \ln^+ \left[|a_k| e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|} \right]}{\ln |\lambda_k|} \leq \max \left(\frac{\rho_f}{\rho_f+1}, q_0 \right),$$

где

$$q_0 = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ \ln \frac{1}{|Q'(\lambda_k)|}}{\ln |\lambda_k|}.$$

Далее, если $\beta \geq 1$, то $\beta > \rho_f / (\rho_f + 1)$ (мы предположили, что $\rho_f < \infty$). Пусть теперь $\beta < 1$. Докажем, что $\beta \geq \rho_f / (\rho_f + 1)$. Действительно, из определения величины β имеем: для любого $\varepsilon > 0$ при $k \geq k_0(\varepsilon)$

$$\ln^+ \ln^+ \left[|a_k| e^{K(-\varphi_k)|\lambda_k|} \right] < (\beta + \varepsilon) \ln |\lambda_k|,$$

то есть

$$|a_k| < e^{-K(-\varphi_k)|\lambda_k| + |\lambda_k|^{\beta + \varepsilon}}, \quad \beta < 1.$$

Воспользуемся теперь леммой 1 (в ней следует положить $\tau = 0$, $h(\varphi_k) = K(-\varphi_k)$). Тогда для любого $\nu > 0$ при $d(z) < d_0(\nu)$

$$|f(z)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k e^{\lambda_k z}| \leq \exp \left[\left(\frac{1}{d(z)} \right)^{q+\nu} \right],$$

где $q = \beta / (1 - \beta)$, $z \in G$. Так что порядок ρ_f функции не превышает $q = \beta / (1 - \beta)$, то есть $\beta \geq \rho_f / (\rho_f + 1)$.

Таким образом, теорема полностью доказана. \square

Следствие 1. Если $q_0 \leq \rho_f / (\rho_f + 1)$, то $\rho_f / (\rho_f + 1) = \beta$.

Таким образом, левая оценка в (0.10) точна.

Отметим, что некоторые оценки типа (0.10) для порядка по Ритту

$$\rho_R = \overline{\lim}_{z \rightarrow \partial G} \frac{\ln^+ \ln^+ |f(z)|}{\frac{1}{d(z)}}$$

функции $f \in H(G, \Lambda)$ в области G ранее были получены в [6]. Ниже будет показано, что двусторонние оценки (0.10), как и соответствующие оценки для ρ_R , также неулучшаемы.

Замечание 1. При $q_0 = 0$ из оценок (0.10) формально вытекает известная формула для порядка в полуплоскости $\Pi_0 = \{s = \sigma + it: \sigma < 0\}$ (см. [8]), ибо $\tau = 0$, а для $\lambda_k > 0$ значения $K(-\varphi_k)$ равны $K(\pi) = 0$. Отметим также, что при $q_0 = 0$ индекс конденсации (см. выше, а также в [1, глава II, §6, п. 2]) равен нулю. Однако заметим, что в случае полуплоскости показатели $\lambda_k > 0$ вообще могут и не быть нулями целой функции экспоненциального типа. В [8] показано, что выполнение лишь условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln n}{\ln \lambda_n} = 0$$

необходимо и достаточно для того, чтобы для любой функции $f \in H(\Pi_0, \Lambda)$ имело место равенство

$$\frac{\rho_f}{\rho_f + 1} = \beta.$$

В этой ситуации, как видим, вообще не фигурируют ни q_0 , ни τ — они могут быть любыми (не исключается возможность $q_0 = \tau = \infty$). Дело в том, что в случае Π_0 были использованы не формулы (1.9), а неравенства Коши

$$|a_k| \leq M(f, \sigma) e^{\lambda_k \sigma}, \quad k \geq 1, \quad (2.5)$$

где

$$M(f, \sigma) = \sup_{|t| < \infty} |f(\sigma + it)|, \quad \sigma < 0.$$

Для справедливости неравенств (2.5), как известно, достаточно лишь выполнения условия

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{\lambda_k} = 0$$

(более подробно см. в [8]).

Теперь ставится вопрос о достижимости правой оценки в (0.10).

§3. Точность двусторонних оценок для порядка

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Существуют последовательность Λ , существует функция $f \in H(G, \Lambda)$, такие, что*

$$\frac{\rho_f}{\rho_f + 1} < \beta = q_0.$$

Для доказательства данного утверждения нам понадобятся некоторые вспомогательные сведения¹.

Уточненным порядком называется функция $\rho(r)$, $r > 0$, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \rho'(r) \ln r = 0.$$

Если для целой функции $\varphi(z)$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_\varphi(r)}{r \rho(r)} = \sigma \neq 0, \infty, \quad M_\varphi(r) = \max_{|z|=r} |\varphi(z)|,$$

то $\rho(r)$ называется уточненным порядком целой функции $\varphi(z)$, а σ — типом этой функции при уточненном порядке.

¹По поводу сведений, приводимых ниже, более подробно см. в [9].

Пусть $n(r)$ — число точек последовательности Λ , которые лежат в круге $\{z: |z| \leq r\}$, а $n(r, \theta_1, \theta_2)$ — число точек из этого множества, лежащих в секторе $\{z: |z| \leq r, \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2\}$. Если $\rho(r)$ — уточненный порядок и существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^{\rho(r)}} = \Delta,$$

то говорят, что множество Λ имеет плотность Δ при показателе $\rho(r)$. Если для всех θ_1, θ_2 , за исключением, быть может, счетного множества, существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \theta_1, \theta_2)}{r^{\rho(r)}} = \Delta(\theta_1, \theta_2),$$

то говорят, что множество Λ имеет *угловую плотность* $\Delta(\theta_1, \theta_2)$ при показателе $\rho(r)$.

Последовательность Λ , которая имеет угловую плотность при показателе $\rho(r)$, при ρ нецелом (нас будет интересовать только этот случай) называется *правильно распределенным множеством при показателе $\rho(r)$* , а последнее называется *регулярным*, если при некотором $d > 0$

$$|\lambda_{k+1}| - |\lambda_k| > d|\lambda_k|^{1-\rho(|\lambda_k|)}.$$

Индикатор (или *индикатриса*) роста целой функции $\varphi(z)$ уточненного порядка $\rho(r)$ определяется равенством

$$h_\varphi(\theta) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}}.$$

Как известно, индикатор — непрерывная функция с периодом 2π .

C_R -кружками множества Λ называются кружки

$$\{z: |z - \lambda_k| < d_0 |\lambda_k|^{1-\rho(|\lambda_k|)}\}, \quad d_0 > 0.$$

Верна следующая теорема (см., например, в [1, глава I, § 2, п. 6]), которую мы сформулируем, для удобства, применительно к $Q(\lambda)$, введенной выше.

Теорема А. *Если $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — регулярное множество при показателе $\rho(r)$, $\rho(r) \rightarrow \rho$, $r \rightarrow \infty$ (где ρ — нецелое), то вне исключительных C_R -кружков*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |Q(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} = H(\theta), \tag{3.1}$$

где

$$H(\theta) = \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \int_{\theta-2\pi}^{\theta} \cos \rho(\theta - \psi - \pi) d\Delta(\psi),$$

а функция $\Delta(\psi)$ (она определяется с точностью до аддитивного слагаемого) характеризует распределение нулей λ_k :

$$\Delta(\theta_2) - \Delta(\theta_1) = \Delta(\theta_2, \theta_1).$$

Если $\lambda_k = |\lambda_k|e^{i\varphi_k}$, то для всякого $\varepsilon > 0$

$$\ln \left| \frac{1}{Q'(\lambda_k)} \right| < -[H(\varphi_k) - \varepsilon] |\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}, \quad k \geq k_0(\varepsilon). \quad (3.2)$$

Замечание 2 (см. [1, глава I, §2, п. 6]). Если $\rho_k = d_0 |\lambda_k|^{1-\rho(|\lambda_k|)} \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, то равенство (3.1) имеет место вне кружков $\{z: |z - \lambda_k| < \gamma_0\}$, где $\gamma_0 > 0$ — любая фиксированная постоянная. Например, если $\rho(r) \equiv \rho$, $0 < \rho < 1$, то, очевидно, $\rho_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим кольца

$$K_n = \{z: P_n < |z| < P_{n+1}\},$$

где $P_n = n^{1/\gamma}$, $0 < \gamma < 1$ (γ выберем позже).

В каждом кольце K_n выберем точки λ_{nk} , расположенные по спирали, а именно положим (см. рис. 1):

$$\lambda_{nk} = [c_n + d_{nk}]e^{i\theta_{nk}}, \quad \theta_{nk} = \frac{2\pi}{n^2}k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n^2 - 1;$$

$$d_{nk} = kn^2, \quad c_n = P_n + n^2.$$

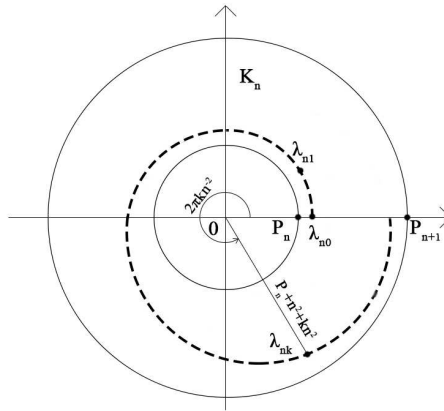


Рис. 1

Как видно, число точек λ_{nk} в кольце K_n равно n^2 . Перенумеруем, упорядочивая по возрастанию, точки множества $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{n^2-1} \{\lambda_{nk}\}$. Полученную последовательность обозначим $\Lambda_1 = \{\lambda_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$. Подберем γ ($0 < \gamma < 1/3$)

так, чтобы последовательность Λ_1 имела плотность (отличную от 0 и ∞) при некотором показателе $\rho < 1$, а это возможно. Действительно, если $\lambda_m^{(1)} \in K_n$, то, очевидно, имеем

$$\frac{n(\lambda_m^{(1)})}{|\lambda_m^{(1)}|^\rho} \sim \frac{1 + 2^2 + \dots + n^2}{P_n^\rho} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^{\frac{\rho}{\gamma}}} \sim \frac{1}{3} \frac{n^3}{n^{\frac{\rho}{\gamma}}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Значит, последовательность Λ_1 при показателе $\rho = 3\gamma$ имеет плотность, равную $1/3$. Далее, если $\lambda_m^{(1)}, \lambda_{m+1}^{(1)}$ принадлежат K_n , то

$$|\lambda_{m+1}^{(1)}| - |\lambda_m^{(1)}| \geq n^2. \tag{3.3}$$

Если $\lambda_m^{(1)} \in K_n$, а $\lambda_{m+1}^{(1)} \in K_{n+1}$, то оценка (3.3), как видно, тоже будет иметь место. Далее, если

$$n^2 \geq |\lambda_m^{(1)}|^{1-\rho} \sim n^{(1-\rho)/\gamma}, \quad n \rightarrow \infty, \tag{3.4}$$

то, учитывая (3.3), при некотором $d_0 > 0$ получим

$$|\lambda_{m+1}^{(1)}| - |\lambda_m^{(1)}| \geq d_0 |\lambda_m^{(1)}|^{1-\rho}. \tag{3.5}$$

А чтобы выполнялось (3.4), потребуем, чтобы

$$2 \geq \frac{1}{\gamma}(1-\rho) = \frac{1}{\gamma}(1-3\gamma),$$

то есть $\gamma \geq 1/5$. Таким образом, при выбранном γ ($1/5 \leq \gamma < 1/3$) последовательность Λ_1 имеет плотность $1/3$ при показателе $\rho = 3\gamma$ и справедливы оценки (3.5) (они будут иметь место для любых $m \geq 1$).

По теореме о среднем, имеем:

$$P_{n+1} - P_n = (n+1)^{1/\gamma} - (n)^{1/\gamma} = \frac{1}{\gamma} c^{1/\gamma-1}, \quad n \leq c \leq n-1.$$

Отсюда, если положить $\gamma = 1/5$,

$$P_{n+1} - P_n \geq \frac{1}{\gamma} n^{1/\gamma-1} = 5n^4.$$

И тогда имеем также:

$$|\lambda_{n1} - P_n| = n^2 \geq 1, \quad P_{n+1} - |\lambda_{nn^2-1}| = P_{n+1} - (P_n + n^4) \geq 4n^4 \geq 1.$$

Положим теперь

$$L_1(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{n^2-1} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{nk}^2}\right).$$

Поскольку $\gamma = 1/5$, то $\rho = 3\gamma = 3/5$. Так что последовательность Λ_1 при показателе $\rho = 3/5$ имеет плотность, равную $1/3$, а значит, показатель

сходимости $\tau_0 = 3/5$. Так что L_1 — целая функция порядка $\rho = 3/5$ (см., например, в [5, глава I, §3, п. 5]). Более того,

$$|\lambda_{n+1}^{(1)}| - |\lambda_n^{(1)}| \geq d_0 |\lambda_n^{(1)}|^{1-\rho} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Значит, имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n^{(1)}|} = 0, \quad |\lambda_{n+1}^{(1)}| - |\lambda_n^{(1)}| \geq h > 0, \quad n \geq 1.$$

Так что индекс конденсации последовательности Λ_1 равен нулю (см. в [5, глава II, §3, п. 1]):

$$\delta^{(1)} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_n^{(1)}|} \ln \left| \frac{1}{L_1'(\lambda_n^{(1)})} \right| = 0.$$

Далее, поскольку аргументы θ_{nk} точек λ_{nk} , таких, что $\theta_{nk} = 2\pi/(n^2k)$, равномерно распределены на отрезке $[0, 2\pi]$, а последовательность Λ_1 имеет плотность $1/3$, то существует угловая плотность

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \theta_1, \theta_2)}{r^\rho} = \Delta(\theta_1, \theta_2),$$

равная, очевидно,

$$\Delta(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{6\pi}(\theta_2 - \theta_1).$$

Таким образом, последовательность Λ_1 правильно распределена при показателе $\rho = 3/5$, а в силу (3.5), образует при этом показателе регулярное множество. Но $\rho_k = d_0 |\lambda_k^{(1)}|^{1-\rho} \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Значит, вне кружков $D_n = \{z: |z - \lambda_n| < 1\}$ для любого $\varepsilon > 0$ имеем (см. выше):

$$\text{а) } \ln |L_1(re^{i\theta})| > [H_1(\theta) - \varepsilon]r^\rho; \quad \text{б) } \ln |L_1(re^{i\theta})| < [H_1(\theta) + \varepsilon]r^\rho, \quad (3.6)$$

где $\rho = 3/5$, $H_1(\theta)$ — индикатор функции $L_1(\lambda)$.

Поскольку $\tau_0 = \rho = 3/5$, τ_0 — нецелое, а последовательность Λ_1 имеет плотность $1/3$ при данном показателе ρ , то функция $L_1(\lambda)$ имеет нормальный тип σ_1 при порядке ρ (см., например, в [1, глава I, §1, п. 3]).

Введем в рассмотрение еще одну целую функцию

$$L_2(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{n^2-1} \left(1 - \frac{\lambda^2}{(\lambda_{nk}^{(1)})^2} \right),$$

где $\lambda_{nk}^{(1)} = \lambda_{nk} + \varepsilon_{nk}$, $\varepsilon_{nk} \downarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ (ε_{nk} позже выберем специальным образом).

Положим $Q(\lambda) = L_1(\lambda)L_2(\lambda)$,

$$F(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_{nk})(\lambda - \lambda_{nk}^{(1)})}{Q(\lambda)}.$$

Если $\sum_{n,k} \varepsilon_{nk} < \infty$, то обычным образом показывается (см. [1, глава I, §2, п. 9]), что вне кружков постоянного радиуса $L_1(\lambda) \asymp L_2(\lambda)$, то есть при некоторых $0 < c_1 < c_2 < \infty$ верны оценки

$$c_1|L_1(\lambda)| \leq |L_2(\lambda)| \leq c_2|L_1(\lambda)|.$$

Следовательно, вне кружков D_n для функции $L(\lambda)$ также будут справедливы оценки типа (3.6), но с правыми частями $2[H_1(\theta) \pm \varepsilon]r^\rho$.

Далее, по принципу максимума и минимума модуля,

$$|F(\lambda_0)| = \min_{|\lambda - \lambda_{nk}|=1} |F(\lambda)| \leq \max_{|\lambda - \lambda_{nk}|=1} |F(\lambda)| = |F(\lambda_0^{(1)})|,$$

где $|\lambda_{nk} - \lambda_0| = |\lambda_{nk} - \lambda_0^{(1)}| = 1$. Но

$$F(\lambda_{nk}) = \frac{\varepsilon_{nk}}{Q'(\lambda_{nk})}, \quad F(\lambda_{nk}^{(1)}) = \frac{\varepsilon_{nk}}{Q'(\lambda_{nk}^{(1)})}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} \frac{1}{|Q(\lambda_0)|} \leq \left| \frac{\varepsilon_{nk}}{Q'(\lambda_m)} \right| \leq 2 \frac{1}{|Q(\lambda_0^{(1)})|},$$

где $\lambda_m = \lambda_{nk}$ или $\lambda_m = \lambda_{nk}^{(1)}$, $m \geq m_0$. Положим теперь

$$\varepsilon_{nk} = e^{-|\lambda_{nk}|^\rho}, \quad 0 < \rho < p < 1 \quad \rho = 3/5.$$

Тогда, учитывая оценки типа (3.6), будем иметь: для всех $m \geq m_0$

$$\begin{aligned} |\lambda_{nk}|^p - 2(H_1(\theta) + \varepsilon)|\lambda_m|^\rho &\leq \ln \left| \frac{1}{Q'(\lambda_m)} \right| \\ &\leq |\lambda_{nk}|^p - 2(H_1(\theta) - \varepsilon)|\lambda_m|^\rho, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где $\lambda_m = \lambda_{nk}$ или $\lambda_m = \lambda_{nk}^{(1)}$. Для построенной последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\} \cup \{\lambda_n^{(1)}\}$ плотность при порядке 1 равна нулю, а как видно из (3.7), индекс конденсации $\delta = 0$, $q_0 = p$.

Пусть Γ_n — контур, образованный отрезками лучей

$$\{z: \arg z = \pm(\theta_{n_0} + \theta_{n_1})/2\}$$

и дугами окружностей

$$\{z: |z| = P_n\} \text{ и } \{z: |z| = P_{n+1}\}$$

(см. рисунок 2).

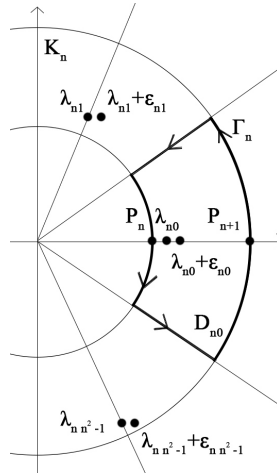


Рис. 2

Рассмотрим теперь ряд экспонент

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}, \quad (3.8)$$

коэффициенты которого определим следующим образом:

$$a_k = \begin{cases} \alpha_{nk} (Q'(\lambda_k))^{-1}, & \alpha_{nk} = e^{-h(0)|\lambda_{n0}|}, \text{ если } \lambda_k \in D_{n0}, \\ e^{-h(\varphi_k)|\lambda_k|}, & \text{если } \lambda_k = |\lambda_k| e^{i\varphi_k} \notin D_{n0}. \end{cases}$$

Здесь D_{n0} — область, ограниченная контуром Γ_n , $h(\varphi) = K(-\varphi)$, $K(\varphi)$ — опорная функция замыкания области G . Ясно, что G — область сходимости для ряда (3.8).

Подсчитаем, чему равна величина β . Достаточно найти β только по точкам $\lambda_n \in D_{n0}$.

Область D_{n0} содержит только две точки: λ_{n0} и $\lambda_{n0}^{(1)} = \lambda_{n0} + \varepsilon_{n0}$. Если $\lambda_k = \lambda_{n0}$, то

$$a_k = \frac{e^{-h(0)|\lambda_{n0}|}}{|Q'(\lambda_{n0})|},$$

и поскольку $\rho < p$, то из оценок (3.7) имеем также:

$$\beta = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ \ln^+ [|a_k| e^{K(0)|\lambda_{n0}|}]}{\ln |\lambda_{n0}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ \ln^+ \frac{1}{|Q'(\lambda_{n0})|}}{\ln |\lambda_{n0}|} = p.$$

Если $\lambda_k = \lambda_{n_0}^{(1)}$, то, аналогично,

$$\beta = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ \ln^+ \frac{1}{|Q'(\lambda_{n_0}^{(1)})|}}{\ln |\lambda_{n_0}^{(1)}|} = p.$$

Таким образом, $\beta = p = q_0$.

Убедимся, что для ряда экспонент (3.8) $\rho_f/(\rho_f + 1) < \beta = p$, где ρ_f — порядок суммы f этого ряда. Действительно, имеем

$$A_n = \sum_{\lambda_k \in D_{n_0}} a_n e^{\lambda_n z} = e^{-h(0)|\lambda_{n_0}|} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{e^{\xi z}}{Q(\xi)} d\xi.$$

Отсюда, учитывая первую оценку из (3.6), имеем:

$$|A_n| \leq e^{-h(0)|\lambda_{n_0}|} e^{b|\lambda_k|^\rho} |\Gamma_n| e^{|\xi_0|(h(\varphi) - d(z))}, \quad (3.9)$$

где $\xi_0 = |\xi_0|e^{i\varphi}$ — некоторая точка контура Γ_n , а $|\Gamma_n|$ — длина Γ_n . Мы воспользовались тем, что $\operatorname{Re}(\xi_0 z) \leq |\xi_0|[h(\varphi) - d(z)]$, где $d(z) = \inf_{t \in \partial G} |z - t|$ (см. в [6]).

Но, как известно, (см. [5, глава II, §2, п. 5])

$$|\xi_0| h(\varphi) - |\lambda_{n_0}| h(0) \leq |\xi_0 - \lambda_{n_0}| \max_{t \in \overline{G}} |t|. \quad (3.10)$$

Далее, так как $\theta_{n1} = 2\pi n^{-2} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\begin{aligned} |\xi_0 - \lambda_{n_0}| &\leq M(P_{n+1} - P_n) = M((n+1)^{1/\gamma} - n^{1/\gamma}) \\ &\leq M \frac{1}{\gamma} (n+1)^{1/\gamma-1} = M \frac{1}{\gamma} (n+1)^4 \leq NP_n^{4/5}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где M, N — некоторые постоянные, не зависящие от n , $0 < M < N < \infty$. Значит, принимая во внимание, что $\rho = 3/5$, и с учетом (3.10), (3.11), из (3.9) имеем:

$$|A_n| \leq e^{NP_n^{4/5} + KP_n^{3/5} - P_n d(z)}, \quad z \in G.$$

Так что

$$|f(z)| \leq B \sum_{n=1}^{\infty} e^{LP_n^{4/5} - P_n d(z)}, \quad z \in G, \quad (3.12)$$

где $L = \max(N, K)$, $0 < K < \infty$ (постоянная K не зависит от n). Теперь воспользуемся леммой 1, откуда будет следовать, что порядок ρ_f суммы ряда (3.8) удовлетворяет оценке:

$$\rho_f \leq q = \frac{\alpha}{1 - \alpha}, \quad \alpha = \frac{4}{5}.$$

Значит, $\rho_f \leq 4$. Но тогда из-за возрастания функции $\rho_f/(\rho_f + 1)$ получаем, что

$$\frac{\rho_f}{\rho_f + 1} \leq \frac{4}{5}.$$

До сих пор величина p была произвольной, но $p > 3/5$. Возьмем $p > 4/5$. Тогда $\beta = q_0 = p > 4/5$. Значит, окончательно, $\rho_f/(\rho_f + 1) < \beta$. Пример построен.

Таким образом, в оценках (0.10) достигается и правая граница. \square

Замечание 3. Из доказанной теоремы следует, что правая оценка для β , полученная в [4], не точна. Тем самым теорема 2 опровергает утверждение, приведенное без доказательства в [4].

Автор выражает признательность профессорам Р. С. Юлмухаметову и А. М. Гайсину за постоянное внимание к данной работе.

Список литературы

- [1] Леонтьев А. Ф., *Ряды экспонент*, Наука, М., 1976.
- [2] Леонтьев А. Ф., *Ряды экспонент для функций с определенным ростом вблизи границы*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **44** (1980), №6, 1308–1328.
- [3] Юлмухаметов Р. С., *Пространство аналитических функций, имеющих заданный рост вблизи границы*, Мат. заметки **32** (1982), №1, 41–57.
- [4] Гайсин А. М., Гайсина Г. А., *Поведение коэффициентов ряда экспонент конечного порядка роста вблизи границы*, Итоги науки и техники. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обзоры. **162** (2019), 15–24.
- [5] Леонтьев А. Ф., *Целые функции. Ряды экспонент*, Наука, М., 1983.
- [6] Гайсин А. М., *Поведение суммы ряда экспонент вблизи границы области регулярности*, Мат. заметки **48** (1990), №3, 45–53.
- [7] Шабат Б. В., *Введение в комплексный анализ*. I, Наука, М., 1976.
- [8] Гайсина Г. А., *Об одном обобщении формулы Н. В. Говорова–Мак-Лейна–М. Н. Шереметы для вычисления порядка*, Вестн. Башкир. ун-та **21** (2016), №3, 556–559.
- [9] Левин Б. Я., *Распределение корней целых функций*, ГИТТЛ, М., 1956.

Башкирский государственный
университет
ул. З. Валиди, 32, 450076, Уфа, Россия
E-mail: gaisinaga@mail.ru

Поступило 13 января 2020 г.