А. Л. Лисок, А. Ю. Трифонов, А. В. Шаповалов, Функция Грина уравнения типа уравнения Хартри с квадратичным потенциалом,
ТМФ, 2004, том 141, номер 2, 228–242

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 141, № 2
ноябрь, 2004

© 2004 г. А. Л. Лисок*, А. Ю. Трифонов*, А. В. Шаповалов†

ФУНКЦИЯ ГРИНА УРАВНЕНИЯ ТИПА УРАВНЕНИЯ ХАРТРИ С КВАДРАТИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

На основе комплексного метода ВКБ–Маслова рассмотрено решение задачи Коши для уравнения типа уравнения Хартри с квадратичным потенциалом в классе квазиклассически сосредоточенных функций. В явном виде получен оператор эволюции в этом классе. Найдены параметрические семейства операторов симметрии уравнения типа уравнения Хартри. С помощью операторов симметрии построены семейства точных решений данного уравнения.

Ключевые слова: метод комплексного ростка Маслова, уравнение типа уравнения Хартри, операторы симметрии.

1. ВВЕДЕНИЕ

Интегрирование нелинейных уравнений математической физики, как известно, является фундаментальной проблемой. Для отдельных классов нелинейных уравнений семейства частных решений могут быть построены методами симметрийного анализа [1]. Особый интерес представляют уравнения в многомерных пространствах с переменными коэффициентами. Методов точного интегрирования такого класса уравнений чрезвычайно мало. Более того, известны лишь отдельные частные случаи таких уравнений, что, тем не менее, представляет значительный интерес ввиду сложности задачи. Например, для уравнения типа уравнения Хартри специального вида методы построения частных решений обсуждались в работе [2]. Изучение классов таких уравнений оказывается эффективным при использовании приближенных (асимптотических) методов.

В работах [3], [4] на основе теории комплексного ростка [5] развит метод построения квазиклассических асимптотик уравнения типа уравнения Хартри с гладкими коэффициентами и кубичной нелокальной нелинейностью. Ключевым моментом метода является интегрирование вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений – системы Гамильтона–Эренфеста [6]. Решения этой системы позволяют построить линейное ассоциированное уравнение Шредингера. В свою очередь, решения уравнения Шредингера позволяют с заданной точностью найти решения исходного уравнения типа уравнения Хартри.

*Томский политехнический университет, Томск, Россия. E-mail: lisok@mph.phtd.tpu.edu.ru; trifonov@mph.phtd.tpu.edu.ru
†Томский государственный университет, Томск, Россия. E-mail: shpv@phys.tsu.ru

Помимо общеизвестных приложений в квантовой механике (см., например, [7]) уравнение типа уравнения Хартри является базовым при построении моделей, описывающих бозе-эйнштейновский конденсат (см., например, обзор [8]), где это уравнение принято называть уравнением Гросса–Питаевского.

В данной работе рассматривается задача Коши для одномерного уравнения типа уравнения Хартри с квадратичным потенциалом в классе квазиклассически сосредоточенных функций. Помимо вышесказанного, оно имеет также и самостоятельную ценность для приложений. Так, например, внешнее поле, задаваемое квадратичным потенциалом, используется для описания магнитных ловушек в моделях бозе-эйнштейновского конденсата. На этом простом примере удается подробно проиллюстрировать основные положения метода, развитого в работах [3], [4]. Подчеркнем, что в рассматриваемом случае этот метод дает *точное* решение задачи Коши для уравнения типа уравнения Хартри в классе квазиклассически сосредоточенных функций. В результате для нелинейного уравнения типа уравнения Хартри удается найти в явном виде не только оператор эволюции, но и операторы симметрии в рассматриваемом функциональном пространстве. Подобная задача для определенного класса нелинейных эволюционных дифференциальных уравнений рассматривалась в работе [9], где применялся метод L-преобразований (переход к переменным Лагранжа) и были построены соответствующие операторы симметрии.

Отметим, что все основные утверждения и построения данной работы остаются с заданной точностью по $\hbar$, $\hbar\to 0$, справедливыми и для уравнения типа уравнения Хартри общего вида. Особенностью рассматриваемого случая является то, что все основные утверждения можно проверить непосредственной подстановкой.

2. СИСТЕМА ГАМИЛЬТОНА-ЭРЕНФЕСТА

Запишем одномерное уравнение типа уравнения Хартри с квадратичным потенциалом в следующем виде:

$$\begin{gathered}\bigl(-i\hbar\partial_t+\widehat{\mathcal{H}}_\varkappa(t)\bigr)\Psi=0,\qquad \widehat{\mathcal{H}}_\varkappa(t)\Psi=\widehat{\mathcal{H}}(t)\Psi+\varkappa\widehat{V}(t,\Psi)\Psi,\\ \widehat{\mathcal{H}}(t)=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{kx^2}{2},\quad \widehat{V}(t,\Psi)\Psi=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\,[ax^2+2bxy+cy^2]\bigl|\Psi(y,t)\bigr|^2\Psi(x,t).\end{gathered}\tag{2.1}$$

Здесь $k>0$, m, a, b и c – параметры потенциала, $\varkappa$ – параметр нелинейности.

Решение уравнения (2.1) будем искать в виде

$$\Psi(x,t,\hbar)=\varphi\biggl(\frac{\Delta x}{\sqrt{\hbar}},t,\sqrt{\hbar}\biggr)\exp\biggl[\frac{i}{\hbar}\bigl(S(t,\hbar)+P(t)\Delta x\bigr)\biggr].\tag{2.2}$$

Здесь функция $\varphi\bigl(\xi,t,\sqrt{\hbar}\bigr)\in\mathbb{S}$ ($\mathbb{S}$ – пространство Шварца) по переменной $\xi=\Delta x/\sqrt{\hbar}$ и регулярно зависит от $\sqrt{\hbar}$, а $\Delta x=x-X(t)$. Вещественные функции $S(t,\hbar)$, $Z(t)=\bigl(P(t),X(t)\bigr)$, характеризующие решение, подлежат определению. Класс функций (2.2) будем обозначать символом $\mathcal{P}_\hbar^t$ и называть *классом квазиклассически сосредоточенных функций* [3].

Для уравнения (2.1) поставим задачу Коши:

$$\Psi(x,t,\hbar)\big|_{t=s} = \psi(x,\hbar), \qquad \psi(x,\hbar)\in\mathcal{P}^0_\hbar. \tag{2.3}$$

Для линейного оператора $\hat{A}$ определим среднее значение $\langle\hat{A}\rangle$ в состоянии $\Psi(x,t,\hbar)$:

$$\langle\hat{A}\rangle = \frac{1}{\big\|\Psi(t)\big\|^2}\big\langle\Psi(t)|\hat{A}|\Psi(t)\big\rangle = A_\Psi(t,\hbar). \tag{2.4}$$

На решениях $\Psi(t)$ уравнения (2.1) для средних значений оператора $\hat{A}$ выполняется соотношение

$$\frac{d\big\langle\hat{A}(t)\big\rangle}{dt} = \Big\langle\frac{\partial\hat{A}(t)}{\partial t}\Big\rangle + \frac{i}{\hbar}\big\langle\big[\widehat{\mathcal{H}}_\varkappa(t,\Psi(t)),\hat{A}(t)\big]\big\rangle, \tag{2.5}$$

где $[\hat{A},\widehat{B}]$ – коммутатор линейных операторов $\hat{A}$, $\widehat{B}$.

По аналогии с линейным квантово-механическим уравнением Шредингера соотношение (2.5) будем называть уравнением Эренфеста [10]. Из уравнения Эренфеста, в частности, при $\hat{A}=1$ следует, что норма решения уравнения (2.1) не зависит от времени, т.е. $\big\|\Psi(t)\big\|^2 = \big\|\Psi(0)\big\|^2 = \|\Psi\|^2$. В результате в уравнении (2.1) без ограничения общности можно перейти от постоянной $\varkappa$ к постоянной $\widetilde{\varkappa} = \varkappa\|\Psi\|^2$.

Обозначим

$$\alpha_\Psi^{(l,j)}(t,\hbar) = \frac{1}{\|\Psi\|^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*(x,t)\big\{(\Delta\hat{p}_x)^l(\Delta x)^j\big\}\Psi(x,t)\,dx, \qquad j,l=\overline{0,\infty}, \tag{2.6}$$

центрированные относительно $x_\Psi(t,\hbar)$, $p_\Psi(t,\hbar)$ моменты функции $\Psi(x,t)$ порядка $j+l$. Здесь $\Delta\hat{p}_x = -i\hbar\partial_x - p_\Psi(t,\hbar)$, $\Delta x = x - x_\Psi(t,\hbar)$, а $\big\{(\Delta\hat{p}_x)^l(\Delta x)^j\big\}$ – упорядоченный по Вейлю оператор с символом $(\Delta p_x)^l(\Delta x)^j$. Наряду с обозначениями (2.6) для дисперсии координат, импульсов и функции корреляции координат и импульсов будем использовать обозначения

$$\sigma_{xx}(t,\hbar) = \alpha_\Psi^{(0,2)}(t,\hbar), \qquad \sigma_{pp}(t,\hbar) = \alpha_\Psi^{(2,0)}(t,\hbar), \qquad \sigma_{xp}(t,\hbar) = \alpha_\Psi^{(1,1)}(t,\hbar).$$

Запишем уравнения Эренфеста для средних значений операторов $\hat{p}$, x и $\big\{(\Delta x)^k(\Delta\hat{p})^l\big\}$, $k+l=\overline{2,M}$. В результате для моментов первого и второго порядков получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{p} &= -m\big(\omega_0^2 + \zeta(a+b)\omega_{\rm nl}^2(a+b)\big)x, \\ \dot{x} &= \frac{p}{m}, \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{xx} &= \frac{2}{m}\sigma_{xp}, \\ \dot{\sigma}_{xp} &= \frac{1}{m}\sigma_{pp} - m\big(\omega_0^2 + \zeta(a)\omega_{\rm nl}^2(a)\big)\sigma_{xx}, \\ \dot{\sigma}_{pp} &= -2m\big(\omega_0^2 + \zeta(a)\omega_{\rm nl}^2(a)\big)\sigma_{xp}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Аналогично для моментов высших порядков найдем

$$\dot{\alpha}^{(j,l)} = \frac{l}{m}\alpha^{(j+1,l-1)} - jm\big(\omega_0^2 + \zeta(a)\omega_{\rm nl}^2(a)\big)\alpha^{(j-1,l+1)} + \frac{lp}{m}\alpha^{(j,l-1)} -$$
$$- jmx\big(\omega_0^2 + \zeta(a+b)\omega_{\rm nl}^2(a+b)\big)\alpha^{(j-1,l)}, \qquad j,l,M\in\mathbb{N}, \quad j+l=\overline{3,M}. \tag{2.9}$$

Здесь обозначено $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $\omega_{\rm nl}(u) = \sqrt{|\widetilde{\varkappa} u|/m}$, $\zeta(u) = \mathrm{sign}(\widetilde{\varkappa} u)$.

Систему уравнений (2.7)–(2.9) будем называть *системой Гамильтона–Эренфеста* порядка M (M – порядок наибольшего учитываемого момента), отвечающей уравнению типа уравнения Хартри (2.1).

Будем рассматривать систему Гамильтона–Эренфеста (2.7)–(2.9) как абстрактную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с произвольными начальными условиями. Очевидно, что не все решения системы Гамильтона–Эренфеста (2.7)–(2.9) можно получить в результате усреднения соответствующих операторов по решениям уравнения (2.1). Например, средние значения должны удовлетворять соотношению неопределенностей Шредингера

$$\sigma_{pp}\sigma_{xx} - \sigma_{xp}^2 \geqslant \frac{\hbar^2}{4} \tag{2.10}$$

для моментов второго порядка (соотношения неопределенностей для моментов высших порядков см. в работе [11]). Нетрудно заметить, что система Гамильтона–Эренфеста допускает тривиальные решения $p = 0$, $x = 0$, $\alpha^{(j,l)} = 0$, $j + l = \overline{2, M}$. Величина, стоящая в левой части соотношения (2.10), является интегралом движения системы Гамильтона–Эренфеста (2.8) [12]. Следовательно, достаточно, чтобы соотношение неопределенностей выполнялось лишь в начальный момент времени.

Соотношения неопределенностей будут выполнены автоматически, если в качестве начальных условий для системы Гамильтона–Эренфеста (2.7), (2.8) выбрать

$$\begin{gathered} p|_{t=s} = p_0 = p_\psi(\hbar), \qquad x|_{t=s} = x_0 = x_\psi(\hbar), \\ \sigma_{pp}|_{t=s} = \alpha_\psi^{(2,0)}(\hbar), \qquad \sigma_{xp}|_{t=s} = \alpha_\psi^{(1,1)}(\hbar), \qquad \sigma_{xx}|_{t=s} = \alpha_\psi^{(0,2)}(\hbar), \\ \alpha^{(j,l)}|_{t=s} = \alpha_\psi^{(j,l)}, \qquad j, l, M \in \mathbb{N}, \qquad j + l = \overline{3, M}, \end{gathered} \tag{2.11}$$

где $\psi(x, \hbar)$ – начальное условие (2.3) для уравнения (2.1).

Система Гамильтона–Эренфеста (2.7)–(2.9) распадается на M рекуррентных систем уравнений – систему для первых нецентрированных (начальных) моментов $p_\Psi(t)$, $x_\Psi(t)$ и систему для центрированных моментов $\alpha^{(j,l)}$ порядка n, $n = j + l$, $n = \overline{1, M}$. Причем система порядка n не зависит от моментов порядка выше n. Обозначим

$$\widetilde{\Omega} = \sqrt{\left|\omega_0^2 + \zeta(a+b)\omega_{\rm nl}^2(a+b)\right|}, \qquad \Omega = \sqrt{\left|\omega_0^2 + \zeta(a)\omega_{\rm nl}^2(a)\right|}. \tag{2.12}$$

Общее решение систем (2.7) и (2.8) зависит от знака выражения, стоящего в (2.12) под знаком модуля. Здесь мы ограничимся случаем, когда одновременно выполняются неравенства $\widetilde{\Omega}^2 = \omega_0^2 + \zeta(a+b)\omega_{\rm nl}^2(a+b) > 0$ и $\Omega^2 = \omega_0^2 + \zeta(a)\omega_{\rm nl}^2(a) > 0$. В этом случае общее решение систем (2.7) и (2.8) имеет вид

$$X(t) = C_1 \sin\widetilde{\Omega}t + C_2 \cos\widetilde{\Omega}t, \qquad P(t) = m\widetilde{\Omega}C_1 \cos\widetilde{\Omega}t - m\widetilde{\Omega}C_2 \sin\widetilde{\Omega}t, \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(t) &= C_3 \sin 2\Omega t + C_4 \cos 2\Omega t + C_5, \\ \sigma_{xp}(t) &= m\Omega C_3 \cos 2\Omega t - m\Omega C_4 \sin 2\Omega t, \\ \sigma_{pp}(t) &= -m^2\Omega^2 C_3 \sin 2\Omega t - m^2\Omega^2 C_4 \cos 2\Omega t + m^2\Omega^2 C_5. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Здесь C_l, $l = \overline{1,5}$, – произвольные постоянные. Моменты $\alpha^{(j,l)}(t,\hbar)$, где $j + l > 2$, не используются для построения решений уравнения типа уравнения Хартри с квадратичным гамильтонианом (2.1) и здесь не приводятся.

Обозначим через $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}) \in \mathbb{R}^5$ траекторию в расширенном фазовом пространстве, где

$$\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}) = \big(P(t,\mathfrak{C}), X(t,\mathfrak{C}), \sigma_{pp}(t,\mathfrak{C}), \sigma_{px}(t,\mathfrak{C}), \sigma_{xx}(t,\mathfrak{C})\big)^{\mathsf{T}}, \qquad \mathfrak{C} = (C_1, C_2, C_3, C_4, C_5)^{\mathsf{T}}, \tag{2.15}$$

есть общее решение системы Гамильтона–Эренфеста (2.7), (2.8), а через $\hat{\mathfrak{g}}$ – столбец операторов

$$\hat{\mathfrak{g}} = \left(\hat{p}, \hat{x}, (\Delta\hat{p})^2, \frac{1}{2}(\Delta\hat{p}\Delta x - \Delta x\Delta\hat{p}), (\Delta x)^2\right)^{\mathsf{T}}. \tag{2.16}$$

Здесь B^{T} – матрица, транспонированная к матрице B. Систему уравнений (2.7), (2.8) можно записать в виде

$$\dot{\mathfrak{g}} = \mathfrak{A}\mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{g}|_{t=s} = \mathfrak{g}_0, \tag{2.17}$$

где

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & -m\widetilde{\Omega}^2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2m\Omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & -m\Omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{m} & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2.1. *Пусть $\Psi(x,t)$ – частное решение уравнения типа уравнения Хартри (2.1) с начальным условием $\Psi(x,t)\big|_{t=0} = \psi(x)$. Определим постоянные $\mathfrak{C}\big(\Psi(t)\big)$ из условия*

$$\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}) = \big\langle\Psi(t)|\hat{\mathfrak{g}}|\Psi(t)\big\rangle, \tag{2.18}$$

а постоянные $\mathfrak{C}(\psi)$ – из условия

$$\mathfrak{g}(0,\mathfrak{C}) = \langle\psi|\hat{\mathfrak{g}}|\psi\rangle. \tag{2.19}$$

Тогда $\mathfrak{C}\big(\Psi(t)\big) = \mathfrak{C}(\psi)$.

Доказательство. По построению вектор

$$\mathfrak{g}(t) = \big\langle\Psi(t)|\hat{\mathfrak{g}}|\Psi(t)\big\rangle = \mathfrak{g}\big(t, \mathfrak{C}\big(\Psi(t)\big)\big) \tag{2.20}$$

является частным решением системы уравнений (2.7), (2.8) и в момент времени $t = 0$ совпадает с $\mathfrak{g}\big(t,\mathfrak{C}(\psi)\big)$. В силу единственности решения задачи Коши для системы (2.7), (2.8) выполняется соотношение

$$\mathfrak{g}\big(t,\mathfrak{C}(\psi)\big) = \mathfrak{g}\big(t,\mathfrak{C}\big(\Psi(t)\big)\big), \tag{2.21}$$

что и доказывает теорему.

Из уравнений (2.11), (2.19) следует, что

$$\mathfrak{C}(\psi) = \left(\frac{p_0}{m\widetilde{\Omega}}, x_0, \frac{\alpha_\psi^{(1,1)}(\hbar)}{m\Omega}, \frac{1}{2}\left(\alpha_\psi^{(0,2)}(\hbar) - \frac{\alpha_\psi^{(2,0)}(\hbar)}{m^2\Omega^2}\right), \frac{1}{2}\left(\alpha_\psi^{(0,2)}(\hbar) + \frac{\alpha_\psi^{(2,0)}(\hbar)}{m^2\Omega^2}\right)\right)^{\mathsf{T}}. \tag{2.22}$$

3. АССОЦИИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Разложим входящие в уравнение (2.1) операторы в ряд Тейлора по $\Delta x = x - x_\Psi(t,\hbar)$, $\Delta y = y - x_\Psi(t,\hbar)$ и $\Delta\hat{p} = \hat{p} - p_\Psi(t,\hbar)$. Тогда уравнение (2.1) примет вид

$$\Big[-i\hbar\partial_t + \mathfrak{H}\big(t,\Psi(t)\big) + \big\langle \mathfrak{H}_z\big(t,\Psi(t)\big),\Delta\hat{z}\big\rangle + \frac{1}{2}\big\langle\Delta\hat{z},\mathfrak{H}_{zz}\big(t,\Psi(t)\big)\Delta\hat{z}\big\rangle\Big]\Psi = 0, \qquad (3.1)$$

где

$$\mathfrak{H}\big(t,\Psi(t)\big) = \frac{p_\Psi^2(t,\hbar)}{2m} + \frac{1}{2}\Big[k + \frac{\widetilde{\varkappa}}{2}(a+2b+c)\Big]x_\Psi^2(t,\hbar) + \frac{\widetilde{\varkappa}}{2}c\alpha_\Psi^{(0,2)}(t,\hbar),$$
$$\mathfrak{H}_z\big(t,\Psi(t)\big) = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}p_\Psi(t,\hbar) \\ m\widetilde{\Omega}^2 x_\Psi(t,\hbar)\end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{H}_{zz}\big(t,\Psi(t)\big) = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & m\Omega^2\end{pmatrix}.$$

Сопоставим нелинейному уравнению (3.1) линейное уравнение, которое получается из (3.1) подстановкой соответствующих решений системы Гамильтона–Эренфеста (2.7), (2.8) вместо средних значений операторов координат, импульсов и центрированных моментов второго порядка. В результате получим следующее уравнение:

$$\Big[-i\hbar\partial_t + \mathfrak{H}\big(t,\hbar,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})\big) + \frac{1}{2}\big\langle \mathfrak{H}_z\big(t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})\big),\Delta\hat{z}\big\rangle + \big\langle\Delta\hat{z},\mathfrak{H}_{zz}\big(t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})\big)\Delta\hat{z}\big\rangle\Big]\Phi = 0, \quad (3.2)$$

где

$$\mathfrak{H}\big(t,\hbar,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})\big) = \frac{1}{2m}P^2(t,\mathfrak{C}) + \frac{1}{2}\big[k + \widetilde{\varkappa}(a+2b+c)\big]X^2(t,\mathfrak{C}) + \frac{\widetilde{\varkappa}}{2}c\sigma_{xx}(t,\hbar,\mathfrak{C}),$$
$$\mathfrak{H}_z\big(t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})\big) = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}P(t,\mathfrak{C}) \\ m\widetilde{\Omega}^2 X(t,\mathfrak{C})\end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{H}_{zz}\big(t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})\big) = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & m\Omega^2\end{pmatrix}.$$

Уравнение (3.2) будем называть *ассоциированным линейным уравнением Шредингера.*

Уравнение (3.2) является уравнением Шредингера с квадратичным гамильтонианом. Хорошо известно, что это уравнение (см., например, [13]) допускает решения в виде гауссовых волновых пакетов. Построим фоковский базис решений уравнения (3.2) в форме, принятой в теории комплексного ростка [5]. Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция

$$\Phi_0^{(0)}\big(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})\big) = N_\hbar\Big(\frac{1}{C(t)}\Big)^{1/2}\exp\Big[\frac{i}{\hbar}\Big(S\big(t,\hbar,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})\big) + P(t,\mathfrak{C})\Delta x + \frac{1}{2}\frac{B(t)}{C(t)}\Delta x^2\Big)\Big] \qquad (3.3)$$

является решением уравнения (3.2), где

$$
\begin{aligned}
S\big(t,\hbar,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})\big) &= \int_0^t \big[P(t,\mathfrak{C})\dot{X}(t,\mathfrak{C}) - \mathfrak{H}\big(t,\hbar,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})\big)\big]\,dt = \\
&= \left[\frac{m\widetilde{\Omega}^2(C_1^2+C_2^2)}{4} - \frac{m}{4}\big(\omega_0^2+\zeta(a+2b+c)\omega_{\rm nl}^2(a+2b+c)\big)(C_1^2+C_2^2)\right]t + \\
&\quad + \left[\frac{m\widetilde{\Omega}(C_1^2+C_2^2)}{8} - \frac{m}{8\widetilde{\Omega}}\big(\omega_0^2+\zeta(a+2b+c)\omega_{\rm nl}^2(a+2b+c)\big)(C_1^2+C_2^2)\right]\sin 2\widetilde{\Omega}t + \\
&\quad + \left[\frac{mC_1C_2}{4\widetilde{\Omega}}\big(\omega_0^2+\zeta(a+2b+c)\omega_{\rm nl}^2(a+2b+c)\big) + \frac{m\widetilde{\Omega}C_1C_2}{4}(C_1^2+C_2^2)\right]\cos 2\widetilde{\Omega}t - \\
&\quad - \left[\frac{mC_1C_2}{4\widetilde{\Omega}}\big(\omega_0^2+\zeta(a+2b+c)\omega_{\rm nl}^2(a+2b+c)\big) + \frac{m\widetilde{\Omega}C_1C_2}{4}(C_1^2+C_2^2)\right] - \\
&\quad - \frac{\widetilde{\varkappa}c}{2\Omega}\big[C_4\sin 2\Omega t - C_3\cos 2\Omega t + \Omega C_5 t\big],
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

а через $B(t)$ и $C(t)$ обозначены “импульсная” и “координатная” части решения системы в вариациях

$$
\dot{a} = J\mathfrak{H}_{zz}\big(t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})\big)a, \qquad a(t) = \big(B(t),C(t)\big)^{\intercal}, \tag{3.5}
$$

отвечающей уравнению (3.2).

Для системы (3.5) поставим задачу Флоке

$$
a(t+T) = e^{i\Omega T}a(t). \tag{3.6}
$$

Решение задачи Флоке (3.5), (3.6), нормированное условием

$$
\big\{a(t),a^*(t)\big\} = 2i, \qquad \{a_1,a_2\} = \langle a_1, J^{\intercal}a_2\rangle, \tag{3.7}
$$

где J – единичная симплектическая матрица, имеет вид

$$
a(t) = \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{m\Omega}}(im\Omega,1)^{\intercal}. \tag{3.8}
$$

Из условия нормировки $\big\|\Phi_0^{(0)}\big(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})\big)\big\|^2 = 1$ найдем $N_\hbar = (1/\pi\hbar)^{1/4}$.

Обозначим

$$
\hat{a}(t) = N_a\big(C(t)\Delta\hat{p} - B(t)\Delta x\big). \tag{3.9}
$$

Если $C(t)$ и $B(t)$ являются решениями системы (3.5), то оператор $\hat{a}(t)$ коммутирует с оператором ассоциированного уравнения (3.2). Таким образом, функции

$$
\Phi_n^{(0)}\big(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})\big) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\big(\hat{a}^+(t)\big)^n\Phi_0^{(0)}\big(x,t,\mathfrak{g}\big(t,\mathfrak{C}\big)\big), \qquad n=\overline{0,\infty},
$$

также будут решениями уравнения Шредингера (3.2). Прокоммутировав операторы $\hat{a}^+(t)$ с оператором умножения на функцию $\Phi_0^{(0)}\big(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})\big)$, получим следующее представление для фоковского базиса решений ассоциированного линейного уравнения (3.2):

$$\begin{aligned}\Phi_n^{(0)}\big(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})\big) &= \frac{1}{\sqrt{n!}}N_a^n\Phi_0^{(0)}\big(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})\big)(-i)^n\big[C^*(t)\big]^n\left[\hbar\frac{\partial}{\partial x}-\frac{2m}{|C(t)|^2}\Delta x\right]^n\cdot 1 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}}N_a^n\Phi_0^{(0)}\big(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})\big)i^n\big[C^*(t)\big]^n\left(\frac{\sqrt{\hbar m}}{\big|C(t)\big|}\right)^n H_n\left(\Delta x\frac{\sqrt{m}}{\big|C(t)\big|\sqrt{\hbar}}\right),\end{aligned}$$

где $H_n(\xi)$ – полиномы Эрмита. Определив $N_a = 1/\sqrt{2\hbar}$ из условия $\big[\hat{a}(t),\hat{a}^+(t)\big] = 1$ и представив координатную часть решения системы в вариациях в виде

$$C(t) = \frac{1}{\sqrt{m\Omega}}e^{i\Omega t},$$

получим

$$\Phi_n^{(0)}\big(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})\big) = \frac{i^n}{\sqrt{n!}}e^{-in\Omega t}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n H_n\left(\sqrt{\frac{m\Omega}{\hbar}}\Delta x\right)\Phi_0^{(0)}\big(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})\big). \tag{3.10}$$

Воспользовавшись свойствами полиномов Эрмита, найдем

$$\alpha^{(0,2)}_{\Phi_n^{(0)}}(t,\hbar) = \sigma_{xx}(t,\hbar,\mathfrak{C}) = \frac{1}{2^n n!\,\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta x^2\big|\Phi_n^{(0)}\big(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})\big)\big|^2\,dx = \frac{\hbar(2n+1)}{2m\Omega}. \tag{3.11}$$

Мы уже отмечали, что функции $\big\{\Phi_n^{(0)}\big(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})\big)\big\}_{n=0}^{\infty}$, хотя и являются решениями ассоциированного уравнения Шредингера (3.2), в общем случае (при произвольных параметрах $\mathfrak{C}$) не являются решениями уравнения (2.1). Функции (3.10) при фиксированном n будут решениями уравнения (2.1) только при специальном выборе параметров $\mathfrak{C}$ (2.22).

Положим в (2.22) $\psi(x) = \Phi_n^{(0)}(x,0)$. С учетом (3.11) находим

$$\mathfrak{C}_n = \mathfrak{C}\big(\Phi_n^{(0)}(0)\big) = \left(\frac{p_0}{m\widetilde{\Omega}},x_0,0,0,\frac{\hbar(2n+1)}{2m\Omega}\right)^{\intercal}. \tag{3.12}$$

Полученные результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 3.1. *При каждом фиксированном* $n, n=\overline{0,\infty}$, *точными решениями уравнения* (2.1) *являются функции*

$$\Psi_n^{(0)}\big(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_n)\big) = \frac{i^n}{\sqrt{n!}}e^{-in\Omega t}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n H_n\left(\sqrt{\frac{m\Omega}{\hbar}}\,\Delta x\right)\Psi_0^{(0)}\big(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_n)\big), \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}\Psi_0^{(0)}\big(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_n)\big) &= \sqrt[4]{\frac{m\Omega}{\pi\hbar}}\,e^{-i\Omega t/2}\times \\ &\times\exp\left[\frac{i}{\hbar}\big(S\big(t,\hbar,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_n)\big)+P(t,\mathfrak{C}_n)\Delta x\big)-\frac{m\Omega}{2\hbar}\Delta x^2\right],\end{aligned} \tag{3.14}$$

где $\Delta x = x - X(t, \mathfrak{C}_n)$,

$$
\begin{aligned}
S\big(t, \hbar, \mathfrak{g}(t, \mathfrak{C}_n)\big) &= \int_0^t \big[P(t, \mathfrak{C}_n)\dot{X}(t, \mathfrak{C}_n) - \mathfrak{H}\big(t, \hbar, \mathfrak{g}(t, \mathfrak{C}_n)\big)\big]\, dt = \\
&= \left[\frac{p_0^2 + m^2\widetilde{\Omega}^2 x_0^2}{4m} - \frac{m}{4}\big(\omega_0^2 + \zeta(a+2b+c)\omega_{\rm nl}^2(a+b)\big)\left(x_0^2 + \frac{p_0^2}{m^2\widetilde{\Omega}^2}\right)\right] t + \\
&+ \left[\frac{p_0^2 + m^2\widetilde{\Omega}^2 x_0^2}{8m\widetilde{\Omega}} - \frac{m}{8\widetilde{\Omega}}\big(\omega_0^2 + \zeta(a+2b+c)\omega_{\rm nl}^2(a+b)\big)\left(x_0^2 + \frac{p_0^2}{m^2\widetilde{\Omega}^2}\right)\right] \sin 2\widetilde{\Omega} t + \\
&+ \left[\frac{p_0 x_0}{4\widetilde{\Omega}^2}\big(\omega_0^2 + \zeta(a+2b+c)\omega_{\rm nl}^2(a+b)\big) + \frac{p_0 x_0}{4}\left(x_0^2 + \frac{p_0^2}{m^2\widetilde{\Omega}^2}\right)\right] \cos 2\widetilde{\Omega} t - \\
&- \left[\frac{p_0 x_0}{4\widetilde{\Omega}^2}\big(\omega_0^2 + \zeta(a+2b+c)\omega_{\rm nl}^2(a+b)\big) + \frac{p_0 x_0}{4}\left(x_0^2 + \frac{p_0^2}{m^2\widetilde{\Omega}^2}\right)\right] - \frac{\widetilde{\varkappa} c\hbar(2n+1)}{4m\Omega} t.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Функции (3.13) *удовлетворяют начальным условиям*

$$
\Psi_n^{(0)}\big(x, t, \mathfrak{g}(t, \mathfrak{C}_n)\big)\big|_{t=0} = \Phi_n^{(0)}(x, 0). \tag{3.16}
$$

Назовем функции (3.13) квазиклассическими траекторно-когерентными состояниями уравнения типа уравнения Хартри (2.1).

4. ФУНКЦИЯ ГРИНА УРАВНЕНИЯ ТИПА УРАВНЕНИЯ ХАРТРИ

Теорема 3.1 дает решение задачи Коши (2.1), (2.3) для специального класса начальных условий вида (3.16). Чтобы найти решение задачи Коши с произвольными начальными условиями в классе квазиклассически сосредоточенных функций, построим оператор эволюции уравнения (2.1).

Система функций $\big\{\Phi_n^{(0)}\big(x, t, \mathfrak{g}(t, \mathfrak{C})\big)\big\}_{n=0}^{\infty}$ вида (3.10) образует полный ортонормированный набор решений линейного ассоциированного уравнения Шредингера (3.2) и позволяет построить оператор эволюции уравнения (2.1). Функцию Грина линейного уравнения (ядро оператора эволюции) можно разложить по полному набору решений линейного уравнения:

$$
G^{(0)}\big(x, y, t, s, \mathfrak{g}(t, \mathfrak{C}), \mathfrak{g}(s, \mathfrak{C})\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{(0)}\big(x, t, \mathfrak{g}(t, \mathfrak{C})\big)\big(\Phi_n^{(0)}\big(y, s, \mathfrak{g}(s, \mathfrak{C})\big)\big)^*. \tag{4.1}
$$

С учетом формулы Мелера [14]

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n H_n(x) H_n(y) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \exp\left[\frac{2xy\lambda - (x^2+y^2)\lambda^2}{1-\lambda^2}\right]
$$

из (3.10), (4.1) найдем

$$
\begin{aligned}
G\big(x, y, t, s, \mathfrak{g}(t, \mathfrak{C}), \mathfrak{g}(s, \mathfrak{C})\big) &= \sqrt{\frac{m\Omega}{2\pi i\hbar \sin\big[\Omega(t-s)\big]}} \times \\
&\times \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\big[S\big(t, \hbar, \mathfrak{g}(t, \mathfrak{C})\big) - S\big(s, \hbar, \mathfrak{g}(s, \mathfrak{C})\big) + P(t, \mathfrak{C})\Delta x - P(s, \mathfrak{C})\Delta y\big]\right\} \times \\
&\times \exp\left\{-\frac{im\Omega}{2\hbar}\left(\frac{2\Delta x\Delta y - (\Delta x^2 + \Delta y^2)\cos\big[\Omega(t-s)\big]}{\sin\big[\Omega(t-s)\big]}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Теорема 4.1. *Пусть оператор $\widehat{U}_\varkappa(t,s,\cdot)$ определен соотношением*

$$\widehat{U}_\varkappa(t,s,\psi)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G_\varkappa(x,y,t,s,\mathfrak{g}\big(t,\mathfrak{C}(\psi)\big),\mathfrak{g}\big(s,\mathfrak{C}(\psi)\big)\psi(y)\,dy, \tag{4.2}$$

где

$$\begin{aligned}G_\varkappa\big(x,y,t,s,\mathfrak{g}\big(t,\mathfrak{C}(\psi),\mathfrak{g}\big(s,\mathfrak{C}(\psi)\big)\big)\big)&=\sqrt{\frac{m\Omega}{2\pi i\hbar\sin\big[\Omega(t-s)\big]}}\times\\&\times\exp\bigg\{\frac{i}{\hbar}\big[S\big(t,\hbar,\mathfrak{g}\big(t,\mathfrak{C}(\psi)\big)+P\big(t,\mathfrak{C}(\psi)\big)\Delta x-\\&-S\big(s,\hbar,\mathfrak{g}\big(s,\mathfrak{C}(\psi)\big)\big)-P\big(s,\mathfrak{C}(\psi)\big)\Delta y\big]\bigg\}\times\\&\times\exp\bigg\{-\frac{im\Omega}{2\hbar}\bigg(\frac{2\Delta x\Delta y-(\Delta x^2+\Delta y^2)\cos\big[\Omega(t-s)\big]}{\sin\big[\Omega(t-s)\big]}\bigg)\bigg\}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Здесь $\Delta x=x-X\big(t,\mathfrak{C}(\psi)\big)$, $\Delta y=y-X\big(s,\mathfrak{C}(\psi)\big)$, функция $S\big(t,\hbar,\mathfrak{g}\big(t,\mathfrak{C}(\psi)\big)\big)$ задана соотношением (3.4), *а параметры $\mathfrak{C}(\psi)$ определяются уравнением*

$$\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})\big|_{t=s}=\mathfrak{g}_0(\psi)=\langle\psi|\hat{\mathfrak{g}}|\psi\rangle. \tag{4.4}$$

Тогда функция

$$\Psi(x,t)=\widehat{U}_\varkappa(t,s,\psi)(x) \tag{4.5}$$

является точным решением задачи Коши для уравнения (2.1) *с начальным условием $\Psi(x,t)\big|_{t=s}=\psi(x)$, а оператор $\widehat{U}_\varkappa(t,s,\cdot)$ является оператором эволюции нелинейного уравнения* (2.1).

Доказательство проводится непосредственной подстановкой.

Теорема 4.2. *Пусть оператор $\widehat{U}_\varkappa^{-1}(t,s,\cdot)$ определен соотношением*

$$\begin{aligned}\widehat{U}_\varkappa^{-1}(t,s,\psi)(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}G_\varkappa^{-1}\big(x,y,t,s,\mathfrak{g}\big(t,(\psi)\big),\mathfrak{g}\big(s,\mathfrak{C}(\psi)\big)\big)\psi(y)\,dy=\\&=\int_{-\infty}^{\infty}G_\varkappa\big(x,y,s,t,\mathfrak{g}\big(s,\mathfrak{C}(\psi)\big),\mathfrak{g}\big(t,(\psi)\big)\big)\psi(y)\,dy.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Здесь функция $G_\varkappa\big(x,y,s,t,\mathfrak{g}\big(s,\mathfrak{C}(\psi)\big),\mathfrak{g}\big(t,(\psi)\big)\big)$ задана соотношением (4.2), *в котором переменную t необходимо заменить на s, переменную s – на t, а постоянные $\mathfrak{C}$ определяются из уравнения*

$$\mathfrak{g}(s,\mathfrak{C})\big|_{s=t}=\mathfrak{g}_0(\psi)=\big\langle\psi|\hat{\mathfrak{g}}|\psi\big\rangle. \tag{4.7}$$

Тогда оператор $\widehat{U}_\varkappa^{-1}(t,s,\cdot)$ (4.6) *является левым обратным для оператора $\widehat{U}_\varkappa(t,s,\cdot)$* (4.2), *т.е.*

$$\widehat{U}_\varkappa^{-1}\big(t,s,\widehat{U}_\varkappa(t,s,\psi)\big)(x)=\psi(x),\qquad\psi\in\mathcal{P}_\hbar^0. \tag{4.8}$$

Доказательство проводится непосредственной подстановкой.

Следствие. *Если функция $\Psi(x,t)$ является частным решением уравнения* (2.1), *то справедливо соотношение*

$$\widehat{U}_\varkappa\big(t,s,\widehat{U}_\varkappa^{-1}\big(t,s,\Psi(t)\big)\big)(x)=\Psi(x,t). \tag{4.9}$$

Доказательство. Обозначим $\psi(x)=\Psi(x,t)\big|_{t=s}$, тогда по теореме 4.1 справедливо равенство $\Psi(x,t)=\widehat{U}_\varkappa(t,s,\psi)(x)$. Следовательно, левую часть соотношения (4.9) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\widehat{U}_\varkappa\big(t,s,\widehat{U}_\varkappa^{-1}\big(t,s,\Psi(t)\big)\big)(x)&=\widehat{U}_\varkappa\big[t,s,\widehat{U}_\varkappa^{-1}\big(t,s,\widehat{U}_\varkappa(t,s,\psi)\big)\big](x)=\\&=\widehat{U}_\varkappa(t,s,\psi)(x)=\Psi(x,t).\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой (4.8). Следствие доказано.

5. ОПЕРАТОРЫ СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ ТИПА УРАВНЕНИЯ ХАРТРИ

Решение задачи Коши для уравнения (2.1) в классе квазиклассически сосредоточенных функций $\mathcal{P}_\hbar^0$ и явный вид оператора эволюции (4.2) позволяют, в свою очередь, построить в явном виде общие выражения основных конструкций симметрийного анализа [1]. Этими конструкциями являются операторы симметрии, однопараметрическое семейство операторов симметрии, генераторы этого семейства (симметрии уравнения (2.1)).

Действительно, пусть $\hat{\mathsf{a}}$ есть некоторый оператор, действующий в $\mathcal{P}_\hbar^0$, $\hat{\mathsf{a}}\colon\mathcal{P}_\hbar^0\to\mathcal{P}_\hbar^0$, и $\Psi(x,t)$ – произвольная функция из класса $\mathcal{P}_\hbar^t$. Определим оператор $\hat{\mathsf{A}}(\cdot)$ соотношением

$$\Phi(x,t)=\hat{\mathsf{A}}\big(\Psi(t)\big)(x)=\widehat{U}_\varkappa\big(t,\hat{\mathsf{a}}\,\widehat{U}_\varkappa^{-1}\big(t,\Psi(t)\big)\big)(x), \tag{5.1}$$

где $\widehat{U}_\varkappa(t,\cdot)=\widehat{U}_\varkappa(t,0,\cdot)$.

Теорема 5.1. *Если функция $\Psi(x,t)$ есть решение уравнения* (2.1), *то* $\Phi(x,t)$ (5.1) *также является решением уравнения* (2.1).

Доказательство непосредственно следует из свойств оператора эволюции, сформулированных в теоремах 4.1 и 4.2.

Таким образом, оператор $\hat{\mathsf{A}}(\cdot)$, определенный соотношением (5.1), есть оператор симметрии уравнения (2.1).

Пусть далее оператор $\hat{\mathsf{b}}$ и его операторная экспонента $\exp(\alpha\hat{\mathsf{b}})$ действуют в классе $\mathcal{P}_\hbar^0$, т.е. $\hat{\mathsf{b}}\colon\mathcal{P}_\hbar^0\to\mathcal{P}_\hbar^0$ и $\exp(\alpha\hat{\mathsf{b}})\colon\mathcal{P}_\hbar^0\to\mathcal{P}_\hbar^0$, где α – вещественный параметр. Для произвольной функции $\Psi(x,t)\in\mathcal{P}_\hbar^t$ определим однопараметрическое семейство операторов $\widehat{\mathsf{B}}(\alpha,\cdot)$ соотношением

$$\widehat{\mathsf{B}}\big(\alpha,\Psi(t)\big)(x)=\widehat{U}_\varkappa\big(t,\exp(\alpha\hat{\mathsf{b}})\widehat{U}_\varkappa^{-1}\big(t,\Psi(t)\big)\big)(x). \tag{5.2}$$

По аналогии с предыдущим операторы $\widehat{\mathsf{B}}(\alpha,\cdot)$ образуют однопараметрическое семейство операторов симметрии уравнения (2.1).

Нетрудно убедиться, что для произвольной функции $\Psi(x,t)\in\mathcal{P}_\hbar^t$ справедливо групповое свойство

$$\widehat{\mathsf{B}}\big(\alpha+\beta,\Psi(t)\big)(x)=\widehat{\mathsf{B}}\big(\alpha,\widehat{\mathsf{B}}\big(\beta,\Psi(t)\big)\big)(x). \tag{5.3}$$

Продифференцировав соотношение (5.2) по параметру α в точке $\alpha=0$, получим

$$\widehat{\mathsf{C}}\big(\Psi(t)\big)(x)=\frac{d}{d\alpha}\widehat{\mathsf{B}}\big(\alpha,\Psi(t)\big)(x)\bigg|_{\alpha=0}=\frac{d}{d\alpha}\widehat{U}_\varkappa\big(t,\exp(\alpha\hat{\mathfrak{b}})\widehat{U}_\varkappa^{-1}\big(t,\Psi(t)\big)\big)(x)\bigg|_{\alpha=0}. \tag{5.4}$$

Оператор $\widehat{\mathsf{C}}(\cdot)$, определенный соотношением (5.4), является генератором однопараметрического семейства операторов симметрии (5.3).

Отметим, что оператор $\widehat{\mathsf{C}}(\cdot)$ не является оператором симметрии уравнения (2.1). Это связано с тем, что параметры $\mathfrak{C}$, определяющие оператор эволюции $\widehat{U}_\varkappa(t,\cdot)$ в соотношении (5.4), зависят от α. Действительно, параметры $\mathfrak{C}$ определяются из уравнения (5.4):

$$\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})\big|_{t=0}=\big\langle\exp(\alpha\hat{\mathfrak{b}})\phi|\hat{\mathfrak{g}}|\exp(\alpha\hat{\mathfrak{b}})\phi\big\rangle,\qquad \phi(x)=\widehat{U}_\varkappa^{-1}\big(t,\Psi(t)\big)(x),\qquad \Psi(x,t)\in\mathcal{P}_\hbar^t,$$

которое содержит параметр α в явном виде. В результате выражение (5.4) будет содержать производные от оператора эволюции $\widehat{U}_\varkappa(t,\cdot)$ по параметрам $\mathfrak{C}$. Эти производные представляют собой оператор, отличающийся от оператора эволюции.

Пример. Подставим в соотношение (5.1) вместо оператора $\hat{\mathfrak{a}}$ операторы $\hat{a}^+(t)$ и $\hat{a}(t)$ вида (3.9) при $t=0$, т.е.

$$\hat{a}(0)=\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\Omega}}(\Delta\hat{p}_0-im\Omega\Delta x_0),\qquad \hat{a}^+(0)=\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\Omega}}(\Delta\hat{p}_0+im\Omega\Delta x_0),$$

где $\Delta\hat{p}_0=-i\hbar\partial_x-p_0$, $\Delta x_0=x-x_0$. Тогда операторы $\hat{A}^{(\pm)}(\cdot)$, определенные соотношениями

$$\begin{gathered}\hat{A}^{(+)}\big(\Psi(t)\big)(x)=\widehat{U}_\varkappa\big(t,\hat{a}^+(0)\widehat{U}_\varkappa^{-1}\big(t,\Psi(t)\big)\big)(x),\\ \hat{A}^{(-)}\big(\Psi(t)\big)(x)=\widehat{U}_\varkappa\big(t,\hat{a}(0)\widehat{U}_\varkappa^{-1}\big(t,\Psi(t)\big)\big)(x),\end{gathered}$$

где $\Psi(x,t)\in\mathcal{P}_\hbar^t$, являются операторами симметрии уравнения (2.1), для которых, в частности, справедливы равенства

$$\begin{gathered}\hat{A}^{(+)}\big(\Psi_n^{(0)}\big(t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_n)\big)\big)(x)=\sqrt{n+1}\,\Psi_{n+1}^{(0)}\big(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_{n+1})\big),\\ \hat{A}^{(-)}\big(\Psi_n^{(0)}\big(t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_n)\big)\big)(x)=\sqrt{n}\,\Psi_{n-1}^{(0)}\big(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_{n-1})\big).\end{gathered}$$

Здесь $\Psi_n^{(0)}\big(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_n)\big)$ – квазиклассические траекторно-когерентные состояния вида (3.13), где константы $\mathfrak{C}_n$ определены соотношением (3.12). Таким образом, операторы $\hat{A}^{(\pm)}(\cdot)$ являются нелинейными аналогами операторов рождения и уничтожения.

С помощью операторов $\hat{A}^{(\pm)}(\cdot)$ соотношение (3.13) представим в виде

$$\Psi_n^{(0)}\big(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_n)\big) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\big(\hat{A}^{(+)}(\cdot)\big)^n\Psi_0^{(0)}\big(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_0)\big). \tag{5.5}$$

На функциях $\Psi(x,t)\in\mathcal{P}_\hbar^t$ определим однопараметрическое семейство операторов сдвига $\widehat{D}(\alpha,\cdot)$ соотношением

$$\widehat{D}\big(\alpha,\Psi(t)\big)(x) = \widehat{U}_\varkappa\big(t,\widehat{\mathcal{D}}_0(\alpha)\widehat{U}_\varkappa^{-1}\big(t,\Psi(t)\big)\big)(x), \tag{5.6}$$

где

$$\widehat{\mathcal{D}}_0(\alpha) = \exp\big[\alpha\hat{a}^+(0) - \alpha^*\hat{a}(0)\big], \qquad \Psi(x,t)\in\mathcal{P}_\hbar^t, \qquad \alpha\in\mathbb{C}. \tag{5.7}$$

Операторы $\widehat{D}(\alpha,\cdot)$ являются операторами симметрии уравнения (2.1), а функции

$$\Psi_\alpha\big(x,t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_\alpha)\big) = \widehat{D}\big(\alpha,\Psi_0^{(0)}\big(t,\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C}_0)\big)\big)(x) \tag{5.8}$$

– решениями уравнения (2.1) для произвольных комплексных значений α. Здесь параметры $\mathfrak{C}_\alpha$ определяются уравнением (4.4), которое в данном случае имеет вид

$$\mathfrak{g}(t,\mathfrak{C})\big|_{t=0} = \big\langle\widehat{\mathcal{D}}_0(\alpha)\Psi_0^{(0)}(0)|\hat{\mathfrak{g}}|\widehat{\mathcal{D}}_0(\alpha)\Psi_0^{(0)}(0)\big\rangle. \tag{5.9}$$

Запишем оператор $\widehat{\mathcal{D}}_0(\alpha)$ в виде

$$\widehat{\mathcal{D}}_0(\alpha) = \exp(\beta\Delta\hat{p}_0 + \gamma\Delta x_0) = \exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\beta\gamma\right)\exp(\gamma\Delta x_0)\exp(\beta\Delta\hat{p}_0), \tag{5.10}$$

где $\beta = (\alpha-\alpha^*)/\sqrt{2\hbar m\Omega}$, $\gamma = i(\alpha+\alpha^*)\sqrt{m\Omega}/\sqrt{2\hbar}$. Тогда

$$\begin{aligned}\Psi_\alpha\big(x,0,\mathfrak{g}(0,\mathfrak{C}_\alpha)\big) &= \widehat{\mathcal{D}}_0(\alpha)\Psi_0^{(0)}\big(x,0,\mathfrak{g}(0,\mathfrak{C}_0)\big) = \\ &= \exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\beta\gamma\right)\exp(\gamma\Delta x_0 - p_0\beta)\Psi_0^{(0)}\big(x-i\hbar\beta,0,\mathfrak{g}(0,\mathfrak{C}_\alpha)\big),\end{aligned} \tag{5.11}$$

где

$$\begin{aligned}\Psi_0^{(0)}\big(x-i\hbar\beta,0,\mathfrak{g}(0,\mathfrak{C}_\alpha)\big) &= \Psi_0^{(0)}\big(x,0,\mathfrak{g}(0,\mathfrak{C}_\alpha)\big)\times \\ &\times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[-i\hbar p_0\beta - i\hbar Q(0)\Delta x_0\beta - \frac{\hbar^2}{2}Q(0)\beta^2\right]\right\}.\end{aligned}$$

Заметим, что $Q(0) = im\Omega$. Следовательно, $\gamma + Q(0)\beta = 2i\alpha\sqrt{m\Omega/2\hbar}$. Аналогично находим

$$-\frac{i\hbar}{2}\big(\beta\gamma + Q(0)\beta^2\big) = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\sqrt{m\Omega}\,\alpha\beta = \frac{1}{2}\big(\alpha^2 - |\alpha|^2\big). \tag{5.12}$$

Подставив (5.12) в (5.11), получим

$$\begin{aligned}\Psi_\alpha\big(x,0,\mathfrak{g}(0,\mathfrak{C}_\alpha)\big) &= \Psi_0^{(0)}\big(x,0,\mathfrak{g}(0,\mathfrak{C}_0)\big)\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} + i\sqrt{\frac{2m\Omega}{\hbar}}\,\alpha\Delta x_0 + \frac{\alpha^2}{2}\right) = \\ &= \sqrt[4]{\frac{m\Omega}{\pi\hbar}}\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{i}{\hbar}\big(p_0 + \sqrt{2m\Omega\hbar}\,\alpha\big)\Delta x_0 - \frac{m\Omega}{2\hbar}\Delta x_0^2\right).\end{aligned} \tag{5.13}$$

Обозначив $\alpha_1 = \operatorname{Re}\alpha$ и $\alpha_2 = \operatorname{Im}\alpha$, запишем

$$\left|\Psi_\alpha\big(x, 0, \mathfrak{g}(0, \mathfrak{C}_\alpha)\big)\right|^2 = \sqrt{\frac{m\Omega}{\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{m\Omega}{\hbar}\left(\Delta x_0 + \sqrt{\frac{2\hbar}{m\Omega}}\,\alpha_2\right)^2\right). \tag{5.14}$$

Из уравнения (5.9) с учетом (5.14) найдем

$$\mathfrak{C}_\alpha = \left(\frac{1}{m\widetilde{\Omega}} p_\alpha, x_\alpha, 0, 0, \frac{\hbar}{2m\Omega}\right)^{\mathsf{T}}, \tag{5.15}$$

где $p_\alpha = p_0 + \alpha_1\sqrt{2m\Omega\hbar}$, $x_\alpha = x_0 - \alpha_2\sqrt{2\hbar/m\Omega}$.

В результате для соответствующего семейства (по параметру α) решений нелинейного уравнения (2.1) найдем явный вид функций $\Psi_\alpha\big(x, t, \mathfrak{g}(t, \mathfrak{C}_\alpha)\big)$.

Тем самым, с помощью прямого действия однопараметрического семейства операторов симметрии $\widehat{D}(\alpha, \cdot)$ найдены явные выражения

$$\Psi_\alpha\big(x, t, \mathfrak{g}(t, \mathfrak{C}_\alpha)\big) = \sqrt[4]{\frac{m\Omega}{\pi\hbar}} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\Big(S\big(t, \hbar, \mathfrak{g}(t, \mathfrak{C}_\alpha)\big) + P(t, \mathfrak{C}_\alpha)\Delta x\Big) - \frac{m\Omega}{2\hbar}\Delta x^2\right], \tag{5.16}$$

где $\Delta x = x - X(t, \mathfrak{C}_\alpha)$,

$$\begin{aligned} S\big(t, \hbar, \mathfrak{g}(t, \mathfrak{C}_\alpha)\big) &= \int_0^t \big[P(t, \mathfrak{C}_\alpha)\dot{X}(t, \mathfrak{C}_\alpha) - \mathfrak{H}\big(t, \hbar, \mathfrak{g}(t, \mathfrak{C}_\alpha)\big)\big]\, dt = \\ = &\left[\frac{p_\alpha^2 + m^2\widetilde{\Omega}^2 x_\alpha^2}{4m} - \frac{m}{4}\big(\omega_0^2 + \zeta(a + 2b + c)\omega_{\mathrm{nl}}^2(a + 2b + c)\big)\left(x_\alpha^2 + \frac{p_\alpha^2}{m^2\widetilde{\Omega}^2}\right)\right] t + \\ + &\left[\frac{p_\alpha^2 + m^2\widetilde{\Omega}^2 x_\alpha^2}{8m\widetilde{\Omega}} - \frac{m}{8\widetilde{\Omega}}\big(\omega_0^2 + \zeta(a + 2b + c)\omega_{\mathrm{nl}}^2(a + 2b + c)\big)\left(x_\alpha^2 + \frac{p_\alpha^2}{m^2\widetilde{\Omega}^2}\right)\right] \sin 2\widetilde{\Omega} t + \\ + &\left[\frac{p_\alpha x_\alpha}{4\widetilde{\Omega}^2}\big(\omega_0^2 + \zeta(a + 2b + c)\omega_{\mathrm{nl}}^2(a + 2b + c)\big) + \frac{p_\alpha x_\alpha}{4}\left(x_\alpha^2 + \frac{p_\alpha^2}{m^2\widetilde{\Omega}^2}\right)\right] \cos 2\widetilde{\Omega} t - \\ - &\left[\frac{p_\alpha x_\alpha}{4\widetilde{\Omega}^2}\big(\omega_\alpha^2 + \zeta(a + 2b + c)\omega_{\mathrm{nl}}^2(a + 2b + c)\big) + \frac{p_\alpha x_\alpha}{4}\left(x_\alpha^2 + \frac{p_\alpha^2}{m^2\widetilde{\Omega}^2}\right)\right] - \frac{\widetilde{\varkappa} c\hbar}{4m\Omega} t. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Для операторов (5.6) справедлив следующий закон умножения:

$$\widehat{D}\big(\alpha, \widehat{D}\big(\beta, \Psi(t)\big)\big)(x) = \exp(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)\widehat{D}\big(\alpha + \beta, \Psi(t)\big)(x). \tag{5.18}$$

Операторы $\exp(i\gamma)\widehat{D}(\alpha, \cdot)$, где $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, задают нелинейный аналог представления группы Гейзенберга–Вейля [13]. Функции $\Psi_\alpha\big(x, t, \mathfrak{g}(t, \mathfrak{C}_\alpha)\big)$ (5.16) в силу равенств (2.14) и (2.15) минимизируют соотношение неопределенностей Шредингера (2.10) и, следовательно, являются сжатыми когерентными состояниями.

В заключение отметим, что построенные в работе точные выражения для оператора эволюции и конструкций симметрийного анализа для уравнения типа уравнения Хартри (2.1) могут быть обобщены на случай уравнения типа уравнения Хартри в многомерном пространстве с гладкими коэффициентами общего вида. Это можно сделать на основе результатов работ [3], [4]. Однако данное обобщение будет справедливым лишь в приближенном смысле, с точностью до $\widehat{O}\big(\hbar^{(M+1)/2}\big)$, $\hbar \to 0$, где M – порядок системы Гамильтона–Эренфеста. В частности, это позволяет построить особый вид приближенных операторов симметрии (симметрий) для указанных выше уравнений типа уравнения Хартри, которые естественно назвать квазиклассическими операторами симметрии (симметриями).

Благодарности. Работа частично поддержана грантами Президента Российской Федерации НШ-1743.2003.2 и МД-246.2003.02. А. Л. Лисок поддержан стипендией некоммерческого фонда “Династия” в рамках МЦФФ в Москве и грантом МО РФ № А03-2.8-794.

Список литературы

[1] *Л. В. Овсяников*. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978; *Л. В. Ибрагимов*. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983; *В. К. Андреев, О. В Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов*. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994; *П. Олвер*. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989; *В. И. Фущич, А. Г. Никитин*. Симметрия уравнений Максвелла. Киев: Наукова думка, 1983; *G. Gaeta*. Nonlinear Symmetry and Nonlinear Equations. Dordrecht: Kluwer, 1994.
[2] *Во Хань Фук, В. М. Четвериков*. ТМФ. 1978. Т. 36. № 3. С. 345.
[3] *V. V. Belov, A. Yu. Trifonov, A. V. Shapovalov*. Int. J. Math. Math. Sci. 2002. V. 32. № 6. P. 325.
[4] *В. В. Белов, А. Ю. Трифонов, А. В. Шаповалов*. ТМФ. 2002. Т. 130. № 3. С. 460.
[5] *В. П. Маслов*. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977; *В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов*. ТМФ. 1992. Т. 92. № 2. С. 215.
[6] *V. G. Bagrov, V. V. Belov, A. Yu Trifonov*. Ann. Phys. 1996. V. 246. № 2. P. 231.
[7] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*. Квантовая механика. М.: Наука, 1989.
[8] *Л. П. Питаевский*. УФН. 1998. Т. 168. С. 641.
[9] *В. В. Пухначев*. ДАН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 294. С. 535.
[10] *П. Эренфест*. Замечание о приближенной справедливости классической механики в рамках квантовой механики. В сб.: Относительность. Кванты. Статистика. М.: Наука, 1972. С. 82.
[11] *H. P. Robertson*. Phys. Rev. 1934. V. 46. № 9. P. 794.
[12] *В. В. Белов, М. Ф. Кондратьева*. Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 6. С. 27.
[13] *М. А. Малкин, В. И. Манько*. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука, 1979; *А. М. Переломов*. Обобщенные когерентные состояния и их применение. М.: Наука, 1987.
[14] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи*. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 14.XI.2003 г.