ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР, 2010, том 48, № 2, с. 224–233

ТЕПЛОМАССООБМЕН И ФИЗИЧЕСКАЯ ГАЗОДИНАМИКА

УДК 536.529

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МЕЛКОДИСПЕРСНЫХ ЧАСТИЦ НА ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

© 2010 г. Л. И. Зайчик*, В. М. Алипченков**, И. М. Козлов*

*Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва

**Объединенный институт высоких температур РАН, Москва

Поступила в редакцию 16.09.2008 г.

Представлена теоретическая модель для описания обратного влияния небольших тяжелых частиц на интенсивность турбулентности в течениях различного типа. Выполнен анализ влияния частиц на изотропную, однородную сдвиговую и пристеночную турбулентность.

ВВЕДЕНИЕ

Анализ влияния частиц дисперсной фазы на характеристики турбулентности несущего потока (жидкости) является одной из главных задач в теории двухфазных турбулентных течений. Характер влияния частиц на структуру турбулентного течения не является однозначным, и в зависимости от инерционности и размера частицы могут оказывать как ламинаризирующее, так и турбулизирующее влияние на поток. Так, присутствие относительно мелких частиц в результате тормозящего (демпфирующего) воздействия, связанного с неполнотой их вовлечения в пульсационное движение жидкости, вызывает дополнительную диссипацию и уменьшение интенсивности турбулентных пульсаций. С ростом инерционности частиц дополнительная диссипация, обусловленная межфазным пульсационным скольжением, снижается и для крупных частиц становится несущественной. В качестве основного механизма генерации турбулентности из-за обратного воздействия дисперсной фазы, по-видимому, следует считать образование нестационарной вихревой структуры (следа) вследствие отрыва потока за обтекаемой крупной частицей. Кроме того, заметное влияние на турбулентные характеристики сплошной фазы может оказывать диффузионный турбулентный перенос частиц, обусловленный неравномерностью распределения дисперсной фазы в пространстве (своеобразный аналог влияния термогравитационных сил на турбулентность в однофазном неизотермическом стратифицированном потоке). В целом с ростом инерционности частиц наблюдается тенденция смены ламинаризирующего влияния дисперсной фазы на турбулизирующее [1, 2].

К настоящему времени накоплен достаточно большой экспериментальный материал по характеристикам двухфазных турбулентных внутренних и внешних течений (в каналах, трубах, пограничных слоях, струях и т.д.). Однако выделить из этих работ информацию об отдельных механизмах влияния частиц на турбулентность "в чистом виде", как правило, представляется затруднительным вследствие неоднородности течения, изменения градиента осредненной скорости жидкости под воздействием частиц и других усложняющих факторов. Поэтому, с точки зрения выявления основных механизмов взаимодействия частиц с турбулентностью, особенное значение имеют результаты прямого численного моделирования (DNS) в изотропных течениях и однородных потоках с заданной постоянной скоростью сдвига. Результаты DNS [3, 4] свидетельствуют о снижении интенсивности пульсаций скорости в стационарной турбулентности с ростом концентрации небольших тяжелых частиц, что согласуется с данными экспериментальных исследований [5]. Расчеты [6, 7] показывают, что введение в затухающую изотропную турбулентность небольших тяжелых частиц также приводит к дополнительной диссипации турбулентной энергии, причем этот эффект усиливается с увеличением инерционности частиц. Однако в [8] обнаружено, что микрочастицы, время релаксации которых τ_p много меньше колмогоровского масштаба τ_k, вызывают замедление скорости вырождения турбулентности, т.е. повышают интенсивность турбулентных пульсаций. Этот эффект был объяснен вкладом микрочастиц в транспорт турбулентной энергии за счет увеличения эффективной плотности двухфазной среды, что эквивалентно уменьшению кинематической вязкости [9]. Следовательно, влияние частиц на затухающую изотропную турбулентность с ростом τ_p качественно изменяется и турбулизирующий эффект сменяется подавлением пульсаций скорости несущей сплошной среды [9, 10]. Результаты DNS [11–13] показывают, что влияние небольших тяжелых частиц на турбулентную энергию жидкости в однородном сдвиговом потоке подобно влиянию в изотропной турбулентности: с ростом τ_p проис-

ходит качественный переход от интенсификации к подавлению турбулентности. В этом случае турбулизирующий эффект связан с вкладом микрочастиц в порождение турбулентности, обусловленное градиентом скорости.

В литературе известно большое количество моделей, описывающих обратное влияние частиц на турбулентность, например [14–20]. Наиболее интересными, по мнению авторов, являются подходы, развиваемые в [21–24]. Так, двухпараметрическая $k-\varepsilon$-модель турбулентности для дисперсного потока [21] основана на двухточечной функции плотности вероятности (ФПВ) скоростей частиц и качественно согласуется с данными DNS для изотропной турбулентности [6]. В [22] представлена полуэмпирическая модель для вторых моментов пульсаций скоростей сплошной и дисперсной фаз; эмпирические константы, входящие в уравнения для вторых моментов, определяются в результате калибровки с данными DNS для однородного сдвигового потока. Авторы [23, 24] предложили оригинальную одножидкостную модель двухфазного изотропного течения на основе модифицированного уравнения Навье–Стокса с зависящей от волнового числа эффективной плотностью и дополнительным демпфирующим членом, описывающим вязкое трение частиц и жидкости. Эта модель воспроизводит все принципиальные особенности влияния частиц на изотропную затухающую турбулентность, полученные путем прямого численного моделирования [10].

В настоящей статье представлена теоретическая модель для описания влияния небольших тяжелых частиц на турбулентные течения различного типа. Выполнен анализ влияния частиц на изотропную, однородную сдвиговую и пристеночную турбулентность.

СООТНОШЕНИЯ, ОСНОВАННЫЕ НА ОДНОТОЧЕЧНОЙ ФПВ СКОРОСТИ ЧАСТИЦ

Рассмотрим движение двухфазной дисперсной среды, состоящей из несжимаемой вязкой жидкости и небольших тяжелых частиц. Объемная концентрация дисперсной фазы Φ предполагается малой, чтобы можно было пренебречь столкновениями частиц; однако массовая концентрация $M \equiv \rho_p\Phi/\rho$ может быть достаточно большой. Плотность частиц ρ_p считается много большей плотности жидкости ρ, а размер не превышает колмогоровский пространственный микромасштаб. В этом случае уравнения для сплошной и дисперсной фаз могут быть представлены в приближении точечных сил, приложенных к центрам масс отдельных частиц. Кроме того, поведение частиц в турбулентной среде и их обратное воздействие на поток определяются, главным образом, силой гидродинамического сопротивления, а силы, обусловленные присоединенной и вытесненной массами и эффектом памяти (сила Бассэ) могут не приниматься во внимание. Таким образом, движение жидкости описывается уравнением Навье–Стокса

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}+\frac{\rho_p}{\rho\tau_p}\int(v_i-u_i)p\,d\mathbf{v}, \quad (1)$$

где u_i, v_i – скорости сплошной и дисперсной фаз; p – давление; ν – кинематическая вязкость жидкости. Влияние частиц учитывается последним членом в (1), а величина p обозначает динамическую плотность вероятности скорости частиц [25].

Осредним уравнение (1) по ансамблю случайных реализаций турбулентных полей, представляя скорость жидкости и давление в виде сумм осредненных и пульсационных составляющих ($\mathbf{u}=\mathbf{U}+\mathbf{u}'$, $\mathrm{p}=\mathrm{P}+\mathrm{p}'$). В результате получим уравнение Рейнольдса для турбулентной жидкости с частицами

$$\begin{gathered}\frac{\partial U_i}{\partial t}+U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\langle u_i'u_j'\rangle\right)+A_i,\\ A_i=\frac{\rho_p}{\rho\tau_p}\int\langle(v_i-u_i)p\rangle d\mathbf{v}=\frac{M}{\tau_p}(V_i-U_{pi}),\\ U_{pi}=U_i+\langle u_i'\rangle_p,\quad \langle u_i'\rangle_p=\frac{1}{\Phi}\int\langle u_i'p\rangle d\mathbf{v},\\ \Phi=\int P d\mathbf{v},\quad V_i=\frac{1}{\Phi}\int v_i P d\mathbf{v},\quad P=\langle p\rangle.\end{gathered} \quad (2)$$

Здесь U_{pi} – так называемая скорость жидкости, видимая частицами; $\langle u_i'\rangle_p$ – скорость дрейфа между жидкостью и частицами, обусловленная неоднородностью распределения дисперсной фазы; V_i – осредненная скорость дисперсной фазы; P – статистическая одноточечная ФПВ распределения скорости частиц.

Уравнение для рейнольдсовых напряжений жидкости, следующее из (1), имеет вид

$$\begin{gathered}K_{ij}-\mathfrak{D}_{ij}-\Pi_{ij}-\pi_{ij}+\varepsilon_{ij}-A_{ij}=0,\\ K_{ij}=\frac{\partial\langle u_i'u_j'\rangle}{\partial t}+U_k\frac{\partial\langle u_i'u_j'\rangle}{\partial x_k},\\ \mathfrak{D}_{ij}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu\frac{\partial\langle u_i'u_j'\rangle}{\partial x_k}-\langle u_i'u_j'u_k'\rangle-\frac{\langle u_i'p'\rangle\delta_{jk}+\langle u_j'p'\rangle\delta_{ik}}{\rho}\right),\\ \Pi_{ij}=-\langle u_i'u_k'\rangle\frac{\partial U_j}{\partial x_k}-\langle u_j'u_k'\rangle\frac{\partial U_i}{\partial x_k},\\ \pi_{ij}=\left\langle \mathrm{p}'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)\right\rangle,\quad \varepsilon_{ij}=2\nu\left\langle\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}\right\rangle,\\ A_{ij}=\frac{\rho_p}{\rho\tau_p}\int\left[\langle(v_i-u_i)u_j'p\rangle+\langle(v_j-u_j)u_i'p\rangle\right]d\mathbf{v}=\\ =\frac{\rho_p}{\rho\tau_p}\int\Big(v_i\langle u_j'p\rangle+v_j\langle u_i'p\rangle-U_i\langle u_j'p\rangle-\end{gathered} \quad (3)$$

$$-U_j\langle u_i'p\rangle - 2\langle u_i'u_j'p\rangle\Big)d\mathbf{v}.$$

Члены в уравнении (3) описывают соответственно конвекцию, диффузию, порождение турбулентных напряжений из осредненного движения за счет градиентов скорости, перераспределение между различными компонентами рейнольдсовых напряжений благодаря пульсациям давления, диссипацию и обратное влияние частиц.

Для нахождения членов, характеризующих воздействие частиц на импульс и турбулентные напряжения несущего потока в уравнениях (2) и (3), т.е. A_i и A_{ij}, необходимо определить корреляции пульсаций скорости жидкости и плотности вероятности скорости частиц $\langle u_i'p\rangle$ и $\langle u_i'u_j'p\rangle$. Моделируя поле скорости жидкости гауссовым случайным процессом и ограничиваясь членами с производными первого порядка, можно получить [25]

$$\langle u_i'p\rangle = -\tau_p\left(\lambda_{ij}\frac{\partial P}{\partial v_j} + \mu_{ij}\frac{\partial P}{\partial x_j}\right),$$

$$\lambda_{ij} = \frac{f_u}{\tau_p}\langle u_i'u_j'\rangle + l_u\langle u_i'u_k'\rangle\frac{\partial U_j}{\partial x_n} - \frac{f_{u1}}{2}\frac{\mathrm{D}_p\langle u_i'u_j'\rangle}{\mathrm{D}t},$$

$$\mu_{ij} = g_u\langle u_i'u_j'\rangle, \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{D}_p\langle u_i'u_j'\rangle}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\langle u_i'u_j'\rangle}{\partial t} + U_{pk}\frac{\partial\langle u_i'u_j'\rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial\langle u_i'u_j'u_k'\rangle_p}{\partial x_k},$$

$$\langle u_i'u_j'u_k'\rangle_p = -\frac{\tau_p}{3}\left(\mu_{in}\frac{\partial\langle u_j'u_k'\rangle}{\partial x_n} + \mu_{jn}\frac{\partial\langle u_i'u_k'\rangle}{\partial x_n} + \mu_{kn}\frac{\partial\langle u_i'u_j'\rangle}{\partial x_n}\right).$$

В отличие от [25] транспортный член $\mathrm{D}_p\langle u_i'u_j'\rangle/\mathrm{D}t$ в (4) определяется вдоль "траектории движения жидкости, видимой частицей". Величины f_u, f_{u1}, g_u, l_u представляют собой коэффициенты, характеризующие вовлечение частиц в турбулентное движение жидкости. С целью упрощения эти коэффициенты предполагаются скалярами и описываются соотношениями, соответствующими би-экспоненциальной автокорреляционной функции [25]:

$$f_u = \frac{2\Omega + z^2}{2\Omega + 2\Omega^2 + z^2},\quad f_{u1} = \frac{\left(2\Omega + z^2\right)^2 - 2\Omega^2 z^2}{\left(2\Omega + 2\Omega^2 + z^2\right)^2},$$

$$g_u = \frac{1}{\Omega} - f_u,\quad l_u = g_u - f_{u1},\quad \Omega = \frac{\tau_p}{T_{Lp}},\quad z = \frac{\tau_{Tp}}{T_{Lp}}, \tag{5}$$

где T_{Lp}, τ_{Tp} – интегральный и дифференциальный временные масштабы, характеризующие взаимодействие частиц с турбулентными вихрями.

С учетом (4) скорость дрейфа примет вид

$$\langle u_i'\rangle_p = -\tau_p g_u\langle u_i'u_j'\rangle\frac{\partial \ln\Phi}{\partial x_j}. \tag{6}$$

Для определения корреляции $\langle u_i'u_j'p\rangle$ примем аппроксимацию

$$\langle u_i'u_j'p\rangle = \langle u_i'u_j'\rangle P + \frac{\langle u_i'\rangle_p\langle u_j'p\rangle + \langle u_j'\rangle_p\langle u_i'p\rangle}{2}. \tag{7}$$

Тогда согласно (4), (6) и (7) член, описывающий влияние частиц в уравнении (3), представляется в виде

$$A_{ij} = -K_{pij} + \mathfrak{D}_{pij} + \Pi_{pij} - \varepsilon_{pij} + G_{pij},$$

$$K_{pij} = Mf_{u1}\left(\frac{\partial\langle u_i'u_j'\rangle}{\partial t} + U_{pk}\frac{\partial\langle u_i'u_j'\rangle}{\partial x_k}\right),$$

$$\mathfrak{D}_{pij} = -Mf_{u1}\frac{\partial\langle u_i'u_j'u_k'\rangle_p}{\partial x_k},$$

$$\Pi_{pij} = -M\left[\langle u_i'u_k'\rangle\left(g_u\frac{\partial V_j}{\partial x_k} - l_u\frac{\partial U_j}{\partial x_k}\right) + \right. \tag{8}$$

$$\left. + \langle u_j'u_k'\rangle\left(g_u\frac{\partial V_i}{\partial x_k} - l_u\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right)\right],$$

$$\varepsilon_{pij} = \frac{2M}{\tau_p}(1 - f_u)\langle u_i'u_j'\rangle,$$

$$G_{pij} = \frac{M}{\tau_p}\left[(V_i - U_{pi})\langle u_i'\rangle_p + (V_j - U_{pj})\langle u_i'\rangle_p\right].$$

Слагаемые правой части (8) могут быть интерпретированы как обусловленные присутствием частиц в потоке дополнительные конвекция, диффузия, порождение, диссипация и эффект неоднородности распределения частиц в пространстве.

Уравнение (3) с учетом (8) примет вид

$$K_{mij} - \mathfrak{D}_{mij} - \Pi_{mij} - \pi_{ij} + \varepsilon_{mij} + G_{pij} = 0,$$

$$K_{mij} = K_{ij} + K_{pij},\quad \mathfrak{D}_{mij} = \mathfrak{D}_{ij} + \mathfrak{D}_{pij}, \tag{9}$$

$$\Pi_{mij} = \Pi_{ij} + \Pi_{pij},\quad \varepsilon_{mij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{pij},$$

где K_{mij}, $\mathfrak{D}_{mij}$, Π_{mij}, ε_{mij} – соответственно конвекция, диффузия, порождение и диссипация турбулентных напряжений двухфазного потока.

Из (3) с учетом (8) получается уравнение баланса турбулентной энергии жидкости $k \equiv \langle u_i'u_i'\rangle/2$

$$K - \mathfrak{D} - \Pi + \varepsilon - A_k = 0,$$

$$K = \frac{\partial k}{\partial t} + U_i\frac{\partial k}{\partial x_i},\quad \mathfrak{D} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu\frac{\partial k}{\partial x_i} - \frac{\langle u_i'u_j'u_j'\rangle}{2} - \frac{\langle u_i'p'\rangle}{\rho}\right),$$

$$\Pi = -\langle u_i'u_j'\rangle\frac{\partial U_i}{\partial x_j},\quad \varepsilon = \nu\left\langle\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right\rangle,$$

$$A_k = -K_p + \mathfrak{D}_p + \Pi_p - \varepsilon_p + G_p,$$

$$K_p = Mf_{u1}\left(\frac{\partial k}{\partial t} + U_i\frac{\partial k}{\partial x_i}\right),\quad \mathfrak{D}_p = -\frac{Mf_{u1}}{2}\frac{\partial\langle u_i'u_j'u_j'\rangle_p}{\partial x_i}, \tag{10}$$

$$\Pi_p = -M\langle u_i'u_j'\rangle\left(g_u\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - l_u\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right),$$

$$\varepsilon_p = \frac{2M}{\tau_p}(1 - f_u)k,$$

$$G_p = Mg_u(U_{pi} - V_i)\langle u_i'u_j'\rangle \frac{\partial \ln \Phi}{\partial x_j}.$$

Уравнение (10) аналогично (9) может быть представлено в виде

$$K_m - \mathfrak{D}_m - \Pi_m + \varepsilon_m + G_p = 0,$$
$$K_m = K + K_p, \quad \mathfrak{D}_m = \mathfrak{D} + \mathfrak{D}_p, \tag{11}$$
$$\Pi_m = \Pi + \Pi_p, \quad \varepsilon_m = \varepsilon + \varepsilon_p.$$

Далее в диффузионном члене пренебрежем вкладом молекулярного переноса и пульсациями давления, т.е. положим

$$\mathfrak{D} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \langle u_i'u_j'u_j'\rangle}{\partial x_i}. \tag{12}$$

В пределе безынерционных частиц (микрочастиц) из (5), (10) и (12) следуют асимптотические соотношения

$$\lim_{\tau_p \to 0} K_p = -MK, \quad \lim_{\tau_p \to 0} \mathfrak{D}_p = -M\mathfrak{D}, \quad \lim_{\tau_p \to 0} \Pi_p = -M\Pi,$$
$$\lim_{\tau_p \to 0} \varepsilon_p = \lim_{\tau_p \to 0} G_p = 0. \tag{13}$$

Итак, в безынерционном пределе получаем

$$\lim_{\tau_p \to 0} A_k = -M(K - \mathfrak{D} - \Pi). \tag{14}$$

В результате подстановки (14) в (10) при наличии в потоке микрочастиц уравнение баланса турбулентной энергии переходит в

$$K - \mathfrak{D} - \Pi + \frac{\varepsilon}{1+M} = 0. \tag{15}$$

Физический смысл уравнения (15) заключается в том, что микрочастицы дают вклад в конвекцию, диффузию и порождение турбулентной энергии за счет увеличения эффективной плотности потока в $(1 + M)$ раз, однако не влияют на диссипацию, обусловленную вязкостью. Полученный результат согласуется с выводами работ [8–10, 12].

ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ k–ε-МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ДЛЯ ДВУХФАЗНОГО ПОТОКА

Моделирование сложных трехмерных течений на основе системы дифференциальных уравнений для всех компонент турбулентных напряжений приводит к большим затратам времени даже при использовании самых быстродействующих компьютеров. Поэтому для расчета однофазных течений широкое распространение получили так называемые алгебраические модели рейнольдсовых напряжений, использующие дифференциальное уравнение только для турбулентной энергии. Аналогичный подход целесообразно применить и для моделирования двухфазных турбулентных течений. Для этого нужно получить алгебраическое соотношение для $\langle u_i'u_j'\rangle$, учитывающее присутствие частиц. С этой целью, следуя известной в теории однофазных турбулентных течений аппроксимации [26], выразим члены в уравнении (9), описывающие конвекцию, диффузию и эффект неоднородности распределения частиц в пространстве, через соответствующие члены в уравнении баланса турбулентной энергии (11)

$$K_{mij} - \mathfrak{D}_{mij} + G_{pij} = \frac{\langle u_i'u_j'\rangle}{k}(K_m - \mathfrak{D}_m + G_p). \tag{16}$$

Корреляцию пульсаций давления и скоростей деформации аппроксимируем при помощи соотношения [27, 28]

$$\pi_{ij} = -C_1\varepsilon_m\left(\frac{\langle u_i'u_j'\rangle}{k} - \frac{2\delta_{ij}}{3}\right) - C_2\left(\Pi_{mij} - \frac{2\Pi_m\delta_{ij}}{3}\right), \tag{17}$$

где вместо диссипации ε и порождения Π_{ij} турбулентности в однофазной среде введены соответствующие величины для двухфазного потока ε_m и Π_{mij}, а C_1 и C_2 – постоянные.

Для диссипации турбулентной энергии вводится изотропное представление

$$\varepsilon_{mij} = \frac{2\varepsilon_m\delta_{ij}}{3}. \tag{18}$$

Тогда с учетом аппроксимаций (16)–(18) из уравнений (9) и (11) следует

$$\langle u_i'u_j'\rangle = \frac{2k\delta_{ij}}{3} + \frac{(1-C_2)k(\Pi_{mij} - 2\Pi_m\delta_{ij}/3)}{(C_1-1)\varepsilon_m + \Pi_m}. \tag{19}$$

Выражение (19) представляет собой неявную алгебраическую модель для определения турбулентных напряжений, так как $\langle u_i'u_j'\rangle$ входит как в левую, так и в правую части уравнения. С вычислительной точки зрения, существенным преимуществом по отношению к неявным обладают явные алгебраические модели, непосредственно связывающие турбулентные напряжения с градиентами осредненной скорости. С этой целью в выражении для Π_{pij} в (8) заменим градиент скорости дисперсной фазы $V_{i,j}$ на соответствующую величину для сплошной фазы $U_{i,j}$. Эта замена не приводит к существенной погрешности ни для малоинерционных ($\Omega \ll 1$), ни для высокоинерционных ($\Omega \gg 1$) частиц, поскольку скорость малоинерционных частиц совпадает со скоростью жидкости, а вклад порождения высокоинерционных частиц Π_{pij} в полное порождение Π_{mij} незначителен по сравнению с порождением турбулентных напряжений в сплошной среде. Поэтому указанная замена может приводить к определенной погрешности только при $\Omega \sim 1$. Итак, получим

$$\Pi_{pij} = Mf_{u1}\Pi_{ij}, \quad \Pi_{mij} = (1 + Mf_{u1})\Pi_{ij},$$
$$\Pi_m = (1 + Mf_{u1})\Pi, \tag{20}$$

Далее для явного выражения $\langle u_i'u_j'\rangle$ применим итерационную процедуру, используя для Π_{ij} в правой части (19) изотропное приближение

$$\Pi_{ij} = -\frac{2k}{3}(U_{i,j} + U_{j,i}), \quad \Pi = -\frac{2k}{3}U_{i,i}. \tag{21}$$

Подстановка (20) и (21) в (19) дает

$$\langle u_i' u_j' \rangle = \frac{2k\delta_{ij}}{3} - \nu_t\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial U_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right),$$
$$\nu_t = \frac{C_\mu(1 + Mf_{u1})k^2}{\varepsilon_m + (\Pi_m - \varepsilon_m)/C_1}, \quad C_\mu = \frac{2(1 - C_2)}{3C_1}. \tag{22}$$

В отличие от коэффициента турбулентной вязкости в стандартной $k - \varepsilon$-модели турбулентности $\nu_{t0} = C_\mu k^2/\varepsilon$ выражение для ν_t в (22) описывает два дополнительных эффекта: наличие частиц в потоке и неравновесность турбулентности, заключающиеся в возможности учета неравенства между порождением и диссипацией турбулентности. При отсутствии частиц ($M = 0$, $\Pi_m = \Pi$, $\varepsilon_m = \varepsilon$) и в предположении равновесия между процессами порождения и диссипации ($\Pi = \varepsilon$) ν_t переходит в ν_{t0}.

В равновесном приближении ($\Pi_m = \varepsilon_m$), что допустимо, например, при описании турбулентности в пристеночной области, из (22) следует

$$\nu_t = \frac{C_\mu(1 + Mf_{u1})k^2}{\varepsilon + \varepsilon_p}. \tag{23}$$

Уравнение для диссипации турбулентной энергии представляется в виде

$$K_\varepsilon - \mathfrak{D}_\varepsilon - C_{\varepsilon1}\frac{\varepsilon}{k}\Pi + C_{\varepsilon2}\frac{\varepsilon^2}{k} - C_{\varepsilon3}\frac{\varepsilon}{k}A_k = 0,$$
$$K_\varepsilon = \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + U_i\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i}, \tag{24}$$

где $C_{\varepsilon1}$, $C_{\varepsilon2}$, $C_{\varepsilon3}$ – постоянные. Следовательно, по сравнению со случаем однофазного течения уравнение (24) содержит дополнительную константу $C_{\varepsilon3}$. В литературе использовались различные значения постоянной $C_{\varepsilon3}$, например: 1.2 [29], 2.0 [30], 1.9 [31]; в [32] значение $C_{\varepsilon3}$ предполагается зависящим от массовой концентрации дисперсной фазы M, причем $C_{\varepsilon3} = 1.2$ при $M \to 0$. В данной статье постоянная $C_{\varepsilon3}$ определяется из требования, чтобы аналогично (15) безынерционные частицы давали вклад в конвекцию, диффузию и порождение турбулентной энергии за счет увеличения эффективной плотности потока в $(1 + M)$ раз, однако не влияли на деструкцию диссипации турбулентной энергии. Для этого нужно принять $C_{\varepsilon3} = C_{\varepsilon2}$. В этом случае уравнение (24) для безынерционных частиц ($\tau_p \to 0$) с учетом (14) и (15) примет вид

$$K_\varepsilon - \mathfrak{D}_\varepsilon - C_{\varepsilon1}\frac{\varepsilon}{k}\Pi + \frac{C_{\varepsilon2}\varepsilon^2}{(1 + M)k} = 0.$$

Итак, уравнение для диссипации турбулентной энергии принимается в виде

$$K_\varepsilon - \mathfrak{D}_\varepsilon - C_{\varepsilon1}\frac{\varepsilon}{k}\Pi + C_{\varepsilon2}\frac{\varepsilon(\varepsilon - A_k)}{k} = 0. \tag{25}$$

Далее рассмотрим способность двухпараметрической $k - \varepsilon$-модели, включающей уравнения (10), (22) и (25), описывать влияние частиц на турбулентную энергию в течениях различного типа.

ВЫРОЖДЕНИЕ ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Изотропная однородная турбулентность представляет собой простейший класс турбулентных течений. Рассмотрим нестационарную вырождающуюся турбулентность за решеткой при отсутствии силы тяжести. В этом случае диффузия и порождение турбулентности отсутствуют и уравнения (10) и (25) принимают вид

$$(1 + Mf_{u1})\frac{dk}{dt} = -\left[\varepsilon + \frac{2M}{\tau_p}(1 - f_u)k\right], \tag{26}$$

$$(1 + Mf_{u1})\frac{d\varepsilon}{dt} = -C_{\varepsilon2}\frac{\varepsilon}{k}\left[\varepsilon + \frac{2M}{\tau_p}(1 - f_u)k\right], \tag{27}$$

где значение постоянной $C_{\varepsilon2}$ равно 1.8. Начальными условиями для уравнений (26) и (27) будут

$$k = k_0, \ \varepsilon = \varepsilon_0 \ \text{при} \ t = 0. \tag{28}$$

Очевидно, что система уравнений (26), (27) с учетом (28) имеет интеграл

$$\varepsilon = \varepsilon_0\left(\frac{k}{k_0}\right)^{C_{\varepsilon2}}.$$

Коэффициенты вовлечения f_u и f_{u1} в (26) и (27) определяются соотношениями (5). Так как в данной статье рассматриваются малоинерционные частицы, интегральный T_{Lp} и дифференциальный τ_{Tp} временные масштабы, характеризующие взаимодействие частиц с турбулентными вихрями, могут быть приняты равными соответственно лагранжеву T_L и тейлорову масштабам турбулентности и описаны выражениями [25]

$$T_L = \frac{2(\mathrm{Re}_\lambda + C_1)\tau_k}{15^{1/2}C_{0\infty}}, \quad \mathrm{Re}_\lambda = \left(\frac{20k^2}{3\varepsilon\nu}\right)^{1/2},$$
$$C_{0\infty} = 7, \quad C_1 = 32,$$
$$\tau_T = \left(\frac{2\mathrm{Re}_\lambda}{15^{1/2}a_0}\right)^{1/2}\tau_k, \quad a_0 = \frac{a_{01} + a_{0\infty}\mathrm{Re}_\lambda}{a_{02} + \mathrm{Re}_\lambda}, \tag{29}$$
$$a_{01} = 11, \quad a_{02} = 205, \quad a_{0\infty} = 7.$$

Время релаксации частиц определяется в предположении стоксова закона обтекания

$$\tau_p = \frac{\rho_p d^2}{18\rho\nu},$$

где d – диаметр частиц.

На рис. 1а показаны результаты решения задачи (26)–(28) о затухании турбулентной энергии в сопоставлении с данными прямого численного моделирования [10], приведенными на рис. 1б. В соответствии с [10] начальное число Рейнольдса

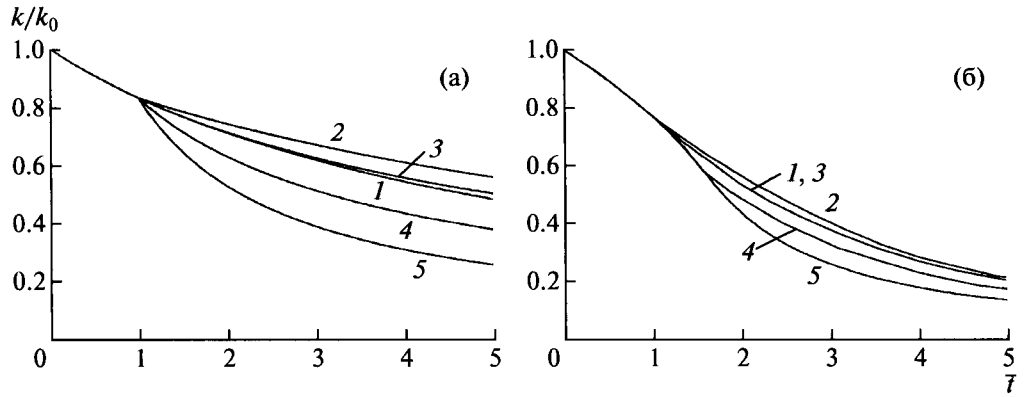

Рис. 1. Влияние частиц на затухание изотропной турбулентности: (а) – решение уравнений (26) и (27), (б) – DNS [10], *1* – $M = 0$, *2*–*5* – $M = 1$; *2* – St = 0.1, *3* – 0.25, *4* – 1.0, *5* – 5.0.

Re_λ равнялось 75. Частицы вводились в поток в момент времени $\bar{t} = 1$ (где $\bar{t}$ – безразмерное время, принятое в [10]) с массовой концентрацией $M = 1$. Инерционность частиц характеризуется числом Стокса $\mathrm{St} \equiv \tau_p/\tau_k$, равным отношению времени релаксации частицы к значению колмогоровского временного микромасштаба в момент ввода частиц в поток. Из сравнения рис. 1а и 1б видно, что, несмотря на существенное количественное расхождение, качественное влияние частиц на затухание турбулентной энергии, предсказываемое моделью и DNS, одинаково. Количественное расхождение связано, главным образом, с неадекватным описанием уравнением (27) при постоянном значении коэффициента $C_{\varepsilon 2}$ диссипации турбулентной энергии при небольших числах Рейнольдса. Известно, что для улучшения моделирования затухания однофазной турбулентности при небольших числах Рейнольдса необходимо учитывать зависимость коэффициента $C_{\varepsilon 2}$ от Re_λ, однако улучшение традиционной $k - \varepsilon$-модели для однофазной турбулентности выходит за рамки данной статьи. Как видно из рис. 1а, введение в поток микрочастиц (St = 0.1) приводит к замедлению скорости вырождения турбулентности, что объясняется вкладом микрочастиц в транспорт турбулентной энергии за счет увеличения эффективной плотности двухфазной среды. Отметим, что в безынерционном пределе ($\mathrm{St} \to 0$, $f_u = f_{u1} = 1$) задача (26)–(28) путем введения эффективного времени $\tilde{t} = t/(1 + M)$ сводится к соответствующей задаче для однофазной среды. Влияние частиц при St = 0.25, как и в [10], на турбулентную энергию несущего потока очень незначительно. Дальнейшее увеличение инерционности частиц приводит к более быстрому затуханию турбулентности благодаря росту дополнительной диссипации турбулентной энергии ε_p и снижению роли дополнительной конвекции K_p в связи с уменьшением коэффициента вовлечения f_{u1}.

ОДНОРОДНЫЙ СДВИГОВЫЙ ПОТОК

Рассмотрим влияние частиц на эволюцию турбулентной энергии в однородном потоке с постоянной скоростью сдвига. Вследствие однородности поля скорости несущего турбулентного потока тройные моменты пульсаций скоростей жидкостей и частиц обращаются в нуль, что приводит к обрыву цепочки уравнений на уровне вторых моментов. Поэтому однородные течения имеют фундаментальное значение для верификации моделей турбулентности для вторых моментов.

Вследствие однородности потока концентрация частиц в пространстве не изменяется, а градиенты сплошной и дисперсной фаз равны. Эти градиенты задаются соотношением

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = S\delta_{ix}\delta_{jy}, \tag{30}$$

где S – интенсивность сдвига, а x и y – координаты в продольном и поперечном направлении движения потока.

С учетом (30) уравнения баланса турбулентной энергии (10) и скорости ее диссипации (25) принимают вид

$$(1 + Mf_{u1})\frac{dk}{dt} = (1 + Mf_{u1})\Pi - (\varepsilon + \varepsilon_p), \tag{31}$$

$$(1 + Mf_{u1})\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{C_{\varepsilon 1}\varepsilon(1 + Mf_{u1})\Pi}{k} - C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon}{k}(\varepsilon + \varepsilon_p), \tag{32}$$

$$\Pi = \nu_t S^2,$$

$$\nu_t = \frac{C_\mu(1 + Mf_{u1})k^2}{\varepsilon + \varepsilon_p + [(1 + Mf_{u1})\Pi - (\varepsilon + \varepsilon_p)]/C_1}. \tag{33}$$

Значения постоянных в (31)–(33) приняты равными $C_{\varepsilon 1} = 1.5$, $C_{\varepsilon 2} = 1.8$, $C_\mu = 0.09$, $C_1 = 1.1$. При отсутствии порождения турбулентности за счет сдвига скорости ($S = 0$) уравнения (31) и (32) переходят в (26) и (27). Начальные условия для уравнений (31) и (32) задаются в виде (28). Лагранжев и тейлоров масштабы турбулентности, необходимые для определения коэффициентов

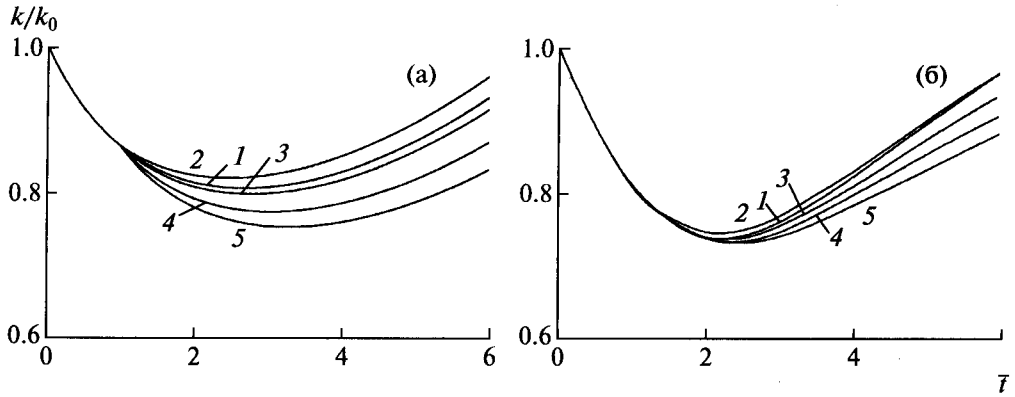

Рис. 2. Влияние инерционности частиц на эволюцию турбулентной энергии в однородном сдвиговом потоке: (а) – решение уравнений (31)–(33); (б) – DNS [12]; *1* – $M = 0$, *2–5* – $M = 0.1$; *2* – St = 0.233, *3* – 0.583, *4* – 1.165, *5* – 2.33.

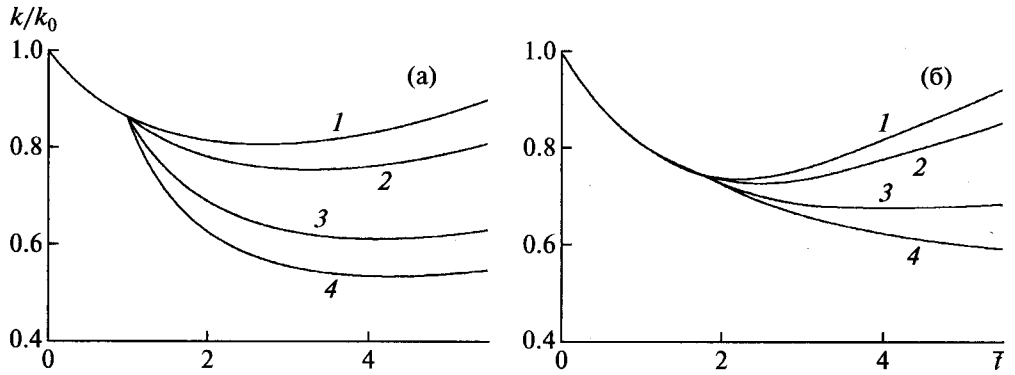

Рис. 3. Влияние массовой концентрации частиц на эволюцию турбулентной энергии в однородном сдвиговом потоке: (а) – решение уравнений (31)–(33); (б) – DNS [12]; *1* – $M = 0$; *2–4* – St = 2.33; *2* – $M = 0.1$; *3* – $M = 0.5$; *4* – $M = 1.0$.

вовлечения f_u и f_{u1}, описываются, как и в изотропной турбулентности, выражениями (29).

При больших временах задача (31)–(33) имеет асимптотическое решение, не зависящее от начальных условий. Это решение, как и в однофазном однородном сдвиговом потоке [33], характеризуется экспоненциальным ростом во времени турбулентной энергии, диссипации и порождения

$$k = k_\infty \exp(\omega t), \quad \varepsilon = \varepsilon_\infty \exp(\omega t), \quad \Pi = \Pi_\infty \exp(\omega t),$$

$$\omega = \frac{\Pi_\infty}{k_\infty}\left(1 - \frac{\varepsilon_{m\infty}}{\Pi_{m\infty}}\right), \quad \frac{\varepsilon_{m\infty}}{\Pi_{m\infty}} = \frac{C_{\varepsilon 1} - 1}{C_{\varepsilon 2} - 1}.$$

На рис. 2 и 3 показано сопоставление результатов моделирования эволюции во времени турбулентной энергии однородного сдвигового потока с данными прямого численного моделирования [12]. В соответствии с [12] начальное число Рейнольса Re_λ равнялось 20. Частицы вводились в поток в момент времени $\bar{t} = 1$, где $\bar{t}$ – безразмерное время, принятое в [12]. Варьировались число Стокса St, равное отношению времени релаксации частицы к значению колмогоровского временного микромасштаба в момент ввода частиц в поток, и массовая концентрация дисперсной фазы M. Как видно из рис. 2, самые малоинерционные из рассмотренных частиц (St = 0.233) вызывают рост турбулентной энергии, что связано с их вкладом в порождение турбулентной энергии из осредненного движения. В безынерционном пределе уравнения (31)–(33) путем введения переменных $\tilde{t} = t/(1 + M)$ и $\tilde{S} = (1 + M)S$ сводятся к соответствующим уравнениям для однофазной среды. Таким образом, турбулизация потока за счет микрочастиц обусловлена двумя эффектами: уменьшением эффективного времени затухания начальной турбулентности и увеличением эффективной скорости сдвига. Введение в поток более инерционных частиц (St = 0.583 и 2.33) приводит к уменьшению энергии турбулентности благодаря росту дополнительной диссипации турбулентной энергии ε_p. С увеличением массовой концентрации влияние частиц на турбулентность возрастает, и относительно инерционные частицы (St = 2.33) при достаточно большой массовой концентрации, как видно из рис. 3, оказывают сильное ламинаризирующее воздействие на течение.

ПРИСТЕНОЧНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ТРУБЕ

Проведем приближенный анализ влияния частиц на пристеночную турбулентность в трубе, предполагая, что имеет место приближенное равенство порождения и диссипации турбулентной энергии. В этом случае уравнение (11) сводится к

$$\Pi_m = \varepsilon_m. \tag{34}$$

В отличие от уравнения для турбулентной энергии, в уравнении для диссипации (25) необходимо учитывать диффузионный перенос $\mathfrak{D}_\varepsilon$. Тогда, пренебрегая конвективным переносом K_ε, полагая $A_k = \Pi_p - \varepsilon_p$ и учитывая (34), из уравнения (25) получим

$$\mathfrak{D}_\varepsilon - \frac{(C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1})\varepsilon\Pi}{k} = 0. \tag{35}$$

С целью получения аналитического решения диффузионный перенос в (35) аппроксимируется алгебраическим соотношением

$$\mathfrak{D}_\varepsilon = \frac{(C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1})C_\mu^{3/2}k^2}{L^2}, \tag{36}$$

где L – интегральный пространственный масштаб турбулентности.

Приравнивая (35) и (36), получаем выражение для скорости диссипации турбулентной энергии

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{3/2}k^3}{L^2\Pi}. \tag{37}$$

Из равновесного приближения для коэффициента турбулентной вязкости (23) и соотношения (37) получается выражение для турбулентной энергии

$$k = \frac{(1 + Mf_{u1})L^2}{C_\mu^{1/2}(1 + \varepsilon_p/\varepsilon)}\left(\frac{\partial U_x}{\partial y}\right)^2. \tag{38}$$

Подстановка (23) в (34) дает

$$\varepsilon = \frac{(1 + Mf_{u1})C_\mu^{1/2}k}{1 + \varepsilon_p/\varepsilon}\frac{\partial U_x}{\partial y}. \tag{39}$$

Оценим влияние частиц на k в предположении, что профиль осредненной продольной скорости U_1 и пространственный масштаб турбулентности L в случае присутствия относительно малоинерционных частиц ($\Omega \le 1$) изменяются незначительно. Принятое допущение подтверждается данными экспериментального исследования [34] для турбулентного газодисперсного течения в трубе. Тогда из (38) следует

$$\frac{k}{k_0} = \frac{1 + Mf_{u1}}{1 + \varepsilon_p/\varepsilon}, \tag{40}$$

где турбулентная энергия в однофазном потоке k_0 определяется как

$$k_0 = \frac{L^2}{C_\mu^{1/2}}\left(\frac{\partial U_x}{\partial y}\right)^2. \tag{41}$$

Формула (40) выражает в равновесном приближении (34) влияние частиц на интенсивность пристеночной турбулентности и имеет ясный физический смысл: числитель характеризует увеличение турбулентной энергии благодаря вкладу частиц в порождение турбулентности, а знаменатель описывает ее снижение за счет дополнительной диссипации.

Для определения параметра инерционности частиц Ω положим $T_{Lp} = T_L$ и определим лагранжев интегральный масштаб турбулентности при помощи соотношения

$$T_L = \frac{C_\mu^{1/2}k}{\varepsilon}. \tag{42}$$

С учетом (42) отношение диссипации турбулентной энергии, обусловленной присутствием частиц, к вязкой диссипации равно

$$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon} = \frac{2M(1 - f_u)}{C_\mu^{1/2}\Omega}. \tag{43}$$

На рис. 4 показано влияние инерционности частиц на интенсивность турбулентности (отношение кинетических турбулентных энергий в двухфазном и однофазном потоках), определенную согласно (40) с учетом (43) при $M = 1$ для разных значений параметра z. Видно, что с ростом параметра инерционности Ω турбулизирующий эффект частиц благодаря их вкладу в порождение турбулентности сменяется на ламинаризирующее влияние за счет дополнительной диссипации. Как следует из (43), при больших значениях Ω роль дополнительной диссипации ε_p становится незначительной и, следовательно, влияние частиц на турбулентность исчезает. С уменьшением параметра z, когда число Рейнольдса в соответствии с соотношениями (29) возрастает, область малых значений Ω, где имеет место турбулизирующее воздействие частиц, сужается и при $z \to 0$ ($\mathrm{Re} \to \infty$) исчезает.

В пределе больших чисел Рейнольдса ($z = 0$) коэффициенты вовлечения (5) становятся равными

$$f_u = \frac{1}{1 + \Omega}, \; f_{u1} = \frac{1}{(1 + \Omega)^2},$$

и формула (40) с учетом (43) принимает вид

$$\frac{k}{k_0} = \left[1 + \frac{M}{(1 + \Omega)^2}\right]\left[1 + \frac{2M}{C_\mu^{1/2}(1 + \Omega)}\right]^{-1}. \tag{44}$$

Согласно (44) при больших числах Рейнольдса имеет место монотонное снижение интенсивности турбулентности с уменьшением параметра инерционности Ω (кривая *1* на рис. 4). Из (44) следует, что максимальное снижение интенсивности турбулентности под воздействием частиц может быть реализовано при $\mathrm{Re} \to \infty$, $\Omega \to 0$, $M \to \infty$ и достигает

$$\left(\frac{k}{k_0}\right)_{\min} = \frac{C_\mu^{1/2}}{2} = 0.15 \text{ при } C_\mu = 0.09.$$

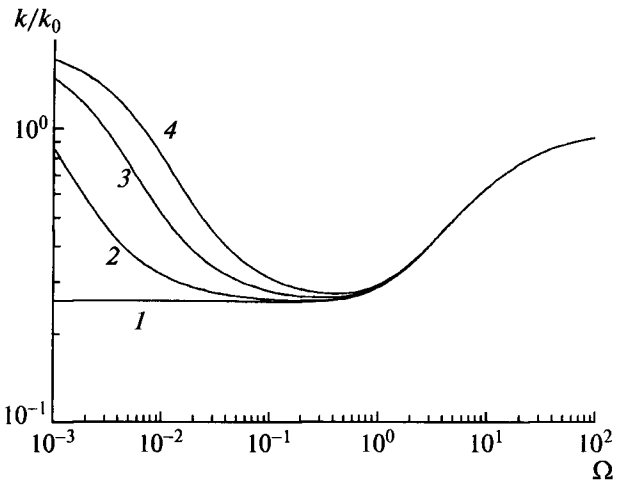

Рис. 4. Влияние инерционности частиц на интенсивность пристеночной турбулентности: *1* – $z = 0$, *2* – 0.1, *3* – 0.2, *4* – 0.3.

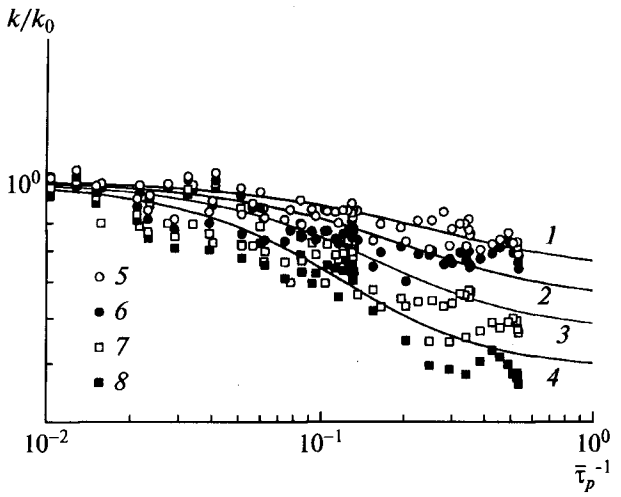

Рис. 5. Влияние частиц на интенсивность турбулентности в трубе: *1–4* – формула (44); *5–8* – эксперимент [34]; *1, 5* – $M = 0.12$; *2, 6* – 0.18; *3, 7* – 0.26; *4, 8* – 0.39.

Проведем сравнение формулы (44) с экспериментальными данными [34] по влиянию частиц на интенсивность турбулентности в круглой трубе. С этой целью определим лагранжев интегральный масштаб турбулентности (42), используя соотношения (38), (39) и (41):

$$T_L = \frac{Lk_0^{1/2}}{C_\mu^{1/4}k},$$

что позволяет выразить параметр инерционности частиц в виде

$$\Omega = \frac{\tau_p}{T_L} = C_\mu^{1/4}\bar{\tau}_p\frac{k}{k_0}, \quad \bar{\tau}_p = \frac{\tau_p k_0^{1/2}}{L}. \qquad (45)$$

Интегральный пространственный масштаб турбулентности в (45) полагаем равным длине пути смешения Прандтля–Никурадзе

$$L = 0.4y\left(1 - 1.1\bar{y} + 0.6\bar{y}^2 - 0.15\bar{y}^3\right), \quad \bar{y} = y/R, \qquad (46)$$

где y – расстояние от стенки трубы, R – радиус трубы.

На рис. 5 показано сравнение формулы (44), в которой параметр инерционности Ω определяется согласно соотношениям (45) и (46), с экспериментальными данными [34]. В работе [34] исследовалось стационарное восходящее гидродинамически развитое газодисперсное течение в вертикальной трубе. Число Рейнольдса, построенное по среднемассовой скорости потока и диаметру канала, равнялось 25600. В качестве дисперсной фазы использовались частицы стекла диаметром d = 50 и 100 мкм и плотностью ρ_p = = 2550 кг/м^3, а также окиси алюминия размером 50 мкм и плотностью 3950 кг/м^3; массовая концентрация дисперсной фазы M изменялась в диапазоне 0.12–0.39. Отметим, что в экспериментах [34] частицы являются достаточно инерционными, а число Рейнольдса достаточно большим, чтобы можно было исключить из анализа эффект интенсификации турбулентности при малых значениях параметра Ω. Одновременно частицы относительно небольшие, поэтому можно не учитывать турбулизацию потока, обусловленную механизмом генерации турбулентности за счет образования аэродинамического следа за крупными частицами. В результате, как видно из рис. 5, формула (44) адекватно описывает снижение интенсивности турбулентности в трубе с уменьшением инерционности и увеличением массовой концентрации частиц.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены соотношения для моделирования обратного влияния небольших тяжелых частиц на импульс и рейнольдсовы напряжения несущего турбулентного потока. Эти соотношения основаны на одноточечной ФПВ скорости частиц и учитывают вклад частиц в конвекцию, диффузию, порождение и диссипацию турбулентности.

Представлена двухпараметрическая k – ε-модель турбулентности для двухфазного потока. На основе этой модели выполнен анализ влияния частиц на интенсивность турбулентности в течениях различного типа: на затухание изотропной турбулентности, эволюцию однородной сдвиговой турбулентности и пристеночную турбулентность в трубе. В результате сравнения с данными прямого численного моделирования изотропной и однородной сдвиговой турбулентности и экспериментальными данными в круглой трубе показано, что представленная модель адекватно описывает влияние инерционности и массовой концентрации частиц на интенсивность турбулентности во всех рассмотренных течениях. В соответствии с

данными DNS модель предсказывает, что турбулизирующий эффект микрочастиц, обусловленный увеличением эффективной плотности двухфазной среды, с ростом инерционности частиц вследствие дополнительной диссипации сменится ламинаризирующим воздействием.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 07-08-92160 и 09-08-00084).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gore R.A., Crowe C.T.* Effect of Particle Size on Modulating Turbulent Intensity // Int. J. Multiphase Flow. 1989. V. 15. № 2. P. 279.
2. *Hetsroni G.* Particle–Turbulence Interaction // Int. J. Multiphase Flow. 1989. V. 15. № 5. P. 735.
3. *Squires K.D., Eaton J.K.* Particle Response and Turbulence Modulation in Isotropic Turbulence // Phys. Fluids A. 1990. V. 2. № 7. P. 1191.
4. *Boivin M., Simonin O., Squires K.D.* Direct Numerical Simulation of Turbulence Modulation by Particles in Isotropic Turbulence // J. Fluid Mech. 1998. V. 375. P. 235.
5. *Hwang W., Eaton J.K.* Homogeneous and Isotropic Turbulence Modulation by Small Heavy (St~50) Particles // J. Fluid Mech. 2006. V. 564. P. 361.
6. *Elghobashi S., Truesdell G.C.* On the Two-Way Interaction between Homogeneous Turbulence and Dispersed Solid Particles. I: Turbulence Modification // Phys. Fluids A. 1993. V. 5. № 7. P. 1790.
7. *Sundaram S., Collins L.R.* A Numerical Study of the Modulation of Isotropic Turbulence by Suspended Particles // J. Fluid Mech. 1999. V. 379. P. 105.
8. *Druzhinin O.A., Elghobashi S.* On the Decay Rate of Isotropic Turbulence Laden with Microparticles // Phys. Fluids. 1999. V. 11. № 3. P. 602.
9. *Druzhinin O.A.* The Influence of Particle Inertia on the Two-Way Coupling and Modification of Isotropic Turbulence by Microparticles // Phys. Fluids. 2001. V. 13. № 12. P. 3738.
10. *Ferrante A., Elghobashi S.* On the Physical Mechanisms of Two-Way Coupling in Particle-Laden Isotropic Turbulence // Phys. Fluids. 2003. V. 15. № 2. P. 315.
11. *Mashayek F.* Droplet–Turbulence Interactions in Low-Mach Number Homogeneous Shear Two-Phase Flows // J. Fluid Mech. 1998. V. 367. P. 163.
12. *Ahmed A.M., Elghobashi S.* On the Mechanisms of Modifying the Structure of Turbulent Homogeneous Shear Flows by Dispersed Particles // Phys. Fluids. 2000. V. 12. № 11. P. 2906.
13. *Tanaka M., Maeda Y., Hagiwara Y.* Turbulence Modification in a Homogeneous Turbulent Shear Flow Laden with Small Heavy Particles // Int J. Heat and Fluid Flow. 2002. V. 23. P. 615.
14. *Yuan Z., Michaelides E.E.* Turbulence Modulation in Particulate Flows – a Theoretical Approach // Int. J. Multiphase Flow. 1992. V. 18. P. 779.
15. *Yarin L.P., Hetsroni G.* Turbulence Intensity in Dilute Two-Phase Flows – 3: The Particles–Turbulence Interaction in Dilute Two-Phase Flow // Int. J. Multiphase Flow. 1994. V. 20. № 1. P. 27.
16. *Kenning V.M., Crowe C.T.* On the Effect of Particles on Carrier Phase Turbulence in Gas–Particle Flows // Int. J. Multiphase Flow. 1997. V. 23. P. 403.
17. *Вараксин А.Ю., Зайчик Л.И.* Влияние мелкодисперсной примеси на интенсивность турбулентности несущего потока в трубе // ТВТ. 1998. Т. 36. № 6. С. 1004.
18. *Crowe C.T.* On Models for Turbulence Modulation in Fluid–Particle Flows // Int. J. Multiphase Flow. 2000. V. 26. P. 719.
19. *Graham D.I.* Turbulent Attenuation by Small Particles in Simple Shear Flows // Trans. ASME. J. Fluids Eng. 2000. V. 122. № 3. P. 134.
20. *Вараксин А.Ю., Зайчик Л.И.* Влияние частиц на интенсивность турбулентности несущего потока // Теплофизика и аэромеханика. 2000. Т. 7. № 2. С. 243.
21. *Деревич И.В.* Двухпараметрическая модель турбулентного потока с дисперсной примесью частиц // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 4. С. 40.
22. *Taulbee D.B., Mashayek F., Barré C.* Simulation and Reynolds Stress Modeling of Particle-Laden Turbulent Shear Flows // Int J. Heat and Fluid Flow. 1999. V. 20. P. 368.
23. *L'vov V.S., Ooms G., Pomyalov A.* Effect of Particle Inertia on Turbulence in a Suspension // Phys. Rev. E. 2003. V. 67. P. 046314-1.
24. *Ooms G., Poelma C.* Comparison between Theoretical Predictions and Direct Numerical Simulation Results for a Decaying Turbulent Suspension // Phys. Rev. E. 2004. V. 69. P. 056311-1.
25. *Зайчик Л.И., Алипченков В.М.* Статистические модели движения частиц в турбулентной жидкости. М.: Физматлит, 2007.
26. *Rodi W.* A New Algebraic Relation for Calculating the Reynolds Stresses // ZAMM. 1976. V. 56. P. T219.
27. *Rotta J.C.* Statistische Theorie Nichthomogener Turbulenz // Z. Physik. 1951. V. 129. № 5. P. 547.
28. *Launder B.E., Reece G.J., Rodi W.* Progress in the Development of a Reynolds Stress Turbulence Closure // J. Fluid Mech. 1975. V. 68. P. 537.
29. *Elghobashi S.E., Abou-Arab T.W.* A Two-Equation Turbulence Model for Two-Phase Flows // Phys. Fluids. 1983. V. 26. № 4. P. 931.
30. *Rizk M.A., Elghobashi S.E.* A Two-Equation Turbulence Model for Dispersed Confined Two-Phase Flows // Int. J. Multiphase Flow. 1989. V. 15. № 1. P. 119.
31. *Berlemont A., Densjonqueser P., Goubest G.* Particle Lagrangian Simulation in Turbulent Flows // Int. J. Multiphase Flow. 1990. V. 16. № 1. P. 19.
32. *Squires K.D., Eaton J.K.* Effect of Selective Modification of Turbulence on Two-Equation Models for Particle–Laden Turbulent Flows // Trans. ASME. J. Fluids Eng. 1994. V. 116. P. 778.
33. *Speziale C.G., Mac Giolla Mhuiris N.* On the Prediction of Equilibrium States in Homogeneous Turbulence // J. Fluid Mech. 1989. V. 209. P. 591.
34. *Вараксин А.Ю., Полежаев Ю.В., Поляков А.Ф.* Экспериментальное исследование влияния твердых частиц на турбулентное течение воздуха в трубе // ТВТ. 1998. Т. 36. № 5. С. 767.