ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 150 (2018). С. 26–39

УДК 519.17

О РАСКРАСКАХ 3-ОДНОРОДНЫХ ГИПЕРГРАФОВ В ТРИ ЦВЕТА

© 2018 г. **И. А. АКОЛЬЗИН**

Аннотация. В работе исследуется величина $m(n, r)$ в задаче Эрдеша—Хайнала. С помощью различных методов доказана оценка $27 \leqslant m(3, 3) \leqslant 35$.

Ключевые слова: гиперграф, раскраска, комбинаторика.

AMS Subject Classification: 05D99

СОДЕРЖАНИЕ

1. Основные определения

В работе исследуется классическая задача экстремальной комбинаторики — задача Эрдеша—Хайнала о раскрасках гиперграфов. Сначала напомним основные определения из теории гиперграфов.

Гиперграфом называется пара $H = (V, E)$, где V — некоторое (как правило, конечное) множество, называемое множеством *вершин гиперграфа*, а $E = E(H)$ — произвольная совокупность подмножеств множества V, называемых *ребрами гиперграфа*. Гиперграф H называется *n-однородным*, если каждое его ребро содержит ровно n вершин. В частности, обычный граф без петель, кратных ребер и ориентации является 2-однородным гиперграфом.

Степенью вершины называется количество инцидентных ей ребер. *Раскраской множества вершин* гиперграфа $H = (V, E)$ называется отображение $\chi : V \to \mathbb{N}$. Будем говорить, что ребро $e \in E$ является *одноцветным в χ*, если для всех $u, v \in e$ выполняется равенство $\chi(u) = \chi(v)$. Также будем говорить, что ребро *e представляет* раскраску χ, если оно одноцветно в χ. Раскраска называется *правильной раскраской* вершин гиперграфа, если в ней каждое ребро этого гиперграфа не является одноцветным. *Хроматическим числом* $\chi(H)$ гиперграфа H называется минимальное количество цветов, требуемое для правильной раскраски вершин H.

Максимальным независимым множеством гиперграфа H называется максимальное по мощности подмножество вершин, в котором не содержится целиком ни одного ребра гиперграфа. Будем обозначать любое такое множество через $A(H)$, а для его мощности использовать обычное обозначение $|A(H)| = \alpha(H)$.

2. Задача Эрдеша—Хайнала

2.1. Постановка задачи. Одной из центральных задач теории раскрасок гиперграфов является классическая задача Эрдеша—Хайнала (см. [7]). Она формулируется следующим образом: требуется найти величину $m(n)$, равную минимально возможному числу ребер гиперграфа в классе n-однородных гиперграфов с хроматическим числом больше 2. Формально определение $m(n)$ можно записать так:

$$m(n) = \min\Big\{\big|E(H)\big| : H \text{ — } n\text{-однородный гиперграф}, \ \chi(H) > 2\Big\}. \tag{1}$$

Нетрудно убедиться в том, что введенная величина конечна и удовлетворяет неравенству

$$m(n) \leqslant \binom{2n-1}{n}. \tag{2}$$

Это соотношение получается взятием множества вершин мощности $2n-1$ и множества всех его n-подмножеств n в качестве множества ребер. Ясно, что в любой двухцветной раскраске множества вершин обязательно найдется n-элементное одноцветное подмножество.

Задача естественным образом обобщается на случай произвольного числа цветов. Определим величину $m(n,r)$ следующим образом:

$$m(n,r) = \min\Big\{\big|E(H)\big| : H \text{ — } n\text{-однородный гиперграф}, \ \chi(H) > r\Big\}. \tag{3}$$

Из определения следует, что $m(n,2) = m(n)$. Так же, как и $m(n)$, величина $m(n,r)$ конечна и справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1 (ср. неравенство (2))**.** *При любых значениях $n \geqslant 2$ и $r \geqslant 2$ справедливо неравенство*

$$m(n,r) \leqslant \binom{r(n-1)+1}{n}. \tag{4}$$

Более того, в случае графов, $n = 2$, неравенство (4) обращается в равенство (см. [1]).

Для нахождения простой нижней оценки воспользуемся следующим соображением: мощность множества всевозможных раскрасок вершин в точности равна r^v, в то время как каждое ребро является одноцветным в $r^{v-n}\cdot r$ раскрасках. Таким образом, для того, чтобы хроматическое число гиперграфа было больше r, необходимо как минимум $\left\lceil \dfrac{r^v}{r^{v-n+1}} \right\rceil = r^{n-1}$ ребер. Итак, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *При любых значениях $n \geqslant 2$ и $r \geqslant 2$ верно неравенство*

$$m(n,r) \geqslant r^{n-1}. \tag{5}$$

Существует много обобщений задачи Эрдеша—Хайнала, однако их рассмотрение выходит за рамки данной работы (см., например, обзоры [1, 9]).

2.2. Известные результаты. Первые нетривиальные оценки $m(n,r)$ были получены П. Эрдешем в 1963–64 гг. с помощью простых вероятностных методов (см. [5, 6]):

$$r^{n-1} \leqslant m(n,r) \leqslant \frac{e}{2} n^2 (r-1) r^{n-1} (\ln r) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{6}$$

В настоящее время существует большое количество различных асимптотических улучшений оценок (6) с помощью продвинутых вероятностных методов. Подробно с этими результатами можно ознакомиться в обзорах [1, 9]; мы отметим лишь некоторые из них.

Наилучшую известную на сегодняшний день нижнюю оценку для случая двух цветов получили Дж. Радхакришнан и А. Сринивасан в 2000 г. (см. [11]). Они показали, что

$$m(n) \geqslant 0{,}1 \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/2} 2^n. \tag{7}$$

Лучшей асимптотической оценкой в случае растущего параметра n при фиксированном числе цветов является оценка, полученная Д. Черкашиным и Я. Козиком.

Теорема 1 (см. [4])**.** *Если $r > 2$ фиксировано, а n растет, то*

$$m(n,r) = \Omega\left(\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{(r-1)/r} r^{n-1}\right). \tag{8}$$

В случае, когда r, напротив, превосходит n, верна оценка, полученная Д. Шабановым.

Теорема 2 (см. [1]). *Если $r > n$, то выполняется неравенство*

$$m(n,r) = \Omega\big(n^{1/2} r^n\big). \tag{9}$$

Более сильные оценки, обобщающие (8) на случай большого числа цветов, получены в [2].

В настоящей работе исследуется величина $m(n,r)$ при малых n и r. На данный момент известны только первые три значения функции $m(n)$. Ясно, что $m(1) = 1$ и $m(2) = 3$. Нетрудно убедиться в том, что $m(3) = 7$. В этом случае ответ в задаче дает 3-однородный гиперграф $H = (V,E)$ с семью вершинами и семью ребрами, задаваемый точками плоскости Фано. Перечислим его ребра:

$$E = \Big\{\{1,2,3\},\ \{3,4,5\},\ \{1,5,6\},\ \{1,4,7\},\ \{2,5,7\},\ \{3,6,7\},\ \{2,4,6\}\Big\}. \tag{10}$$

Как уже было сказано, для любых r при $n = 2$ неравенство в соотношении (4) обращается в равенство. При этом ни для каких $n > 2$ и $r \geqslant 2$, кроме $m(3,2) = m(3)$, точные значения $m(n,r)$ не найдены. Дело в том, что никакие асимптотические результаты не дают разумных оценок именно при малых значениях. Поэтому обычно применяются методы, отличные от тех, которые используются для получения хороших асимптотических оценок.

Наиболее примечательна история исследования $m(4)$. Простые оценки (4) и (5) дают следующие ограничения данной величины: $8 \leqslant m(4) \leqslant 35$. Однако и верхняя, и нижняя оценки были значительно улучшены. Сначала Тофт (см. [14]) и Сеймур (см. [12]) независимо в 1975 г. показали, что $m(4) \leqslant 23$, затем в 1995 г. М. Гольдберг и Х. Рассел доказали (см. [8]) оценку $m(4) \geqslant 17$. Данный результат так и не был улучшен аналитически, однако проводились попытки определить данную величину с помощью компьютерного перебора. В результате в 2011 г. П. Остергард опубликовал статью [10], в которой утверждается, что $m(4) = 23$. Однако вопрос о том, насколько можно доверять такому доказательству, остается дискуссионным.

2.3. Формулировка новых результатов.

В данной работе исследуется значение $m(3,3)$. Основной результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема 3. *Имеет место неравенство*

$$m(3,3) \geqslant 27. \tag{11}$$

Следствие 1. *Выполнены неравенства*

$$m(4) \leqslant 23 < 27 \leqslant m(3,3). \tag{12}$$

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 3, мы приведем ряд предварительных рассуждений, содержащих некоторые идеи получения нижних оценок числа ребер гиперграфов с большим хроматическим числом.

2.4. Простые оценки числа ребер в гиперграфах с большим хроматическим числом.

При исследовании малых значений параметров в проблеме Эрдеша—Хайнала обычно рассматривают значения следующей вспомогательной величины — $m_v(n,r)$ для различных v, где

$$m_v(n,r) = \min\Big\{\big|E(H)\big| : H \text{ — } n\text{-однородный гиперграф},\ \chi(H) > r,\ \big|V(H)\big| = v,\ \forall u,w \in V\ \exists e \in E : (u,w) \in e\Big\}. \tag{13}$$

Для того, чтобы понять, как в общем случае можно искать нетривиальные нижние оценки, сформулируем два утверждения.

Утверждение 3. *Для любых натуральных n и r выполняется равенство*

$$m(n,r) = \min_{v > r(n-1)} m_v(n,r). \tag{14}$$

Доказательство. В самом деле, допустим, что n-однородный гиперграф $H = (V, E)$ таков, что $\chi(H) > r$, $|E(H)| = m(n, r)$ и существует пара вершин $u, v \in V$, не лежащая ни в одном из ребер этого гиперграфа. Тогда эти две вершины можно «склеить» в одну, получив n-однородный гиперграф H'. Легко видеть, что существование правильной раскраски H' в r цветов означало бы существование подобной правильной раскраски и для H. Значит, $\chi(H') > r$. Более того, $|E(H')| = |E(H)| = m(n, r)$. Продолжая данную процедуру для H' и т. д., получим некоторый n-однородный гиперграф $\tilde{H}$, в котором любые две вершины соединены ребром, $\chi(\tilde{H}) > r$ и $|E(\tilde{H})| = m(n, r)$. Отсюда следует справедливость (14). □

В задаче о величине $m_v(n, r)$ изучается класс гиперграфов, в которых каждая вершина соединена с каждой другой вершиной хотя бы одним ребром, что позволяет получить следующую простую лемму.

Лемма 1. *Для любых $n \geqslant 2$ и $r \geqslant 2$ выполнено соотношение*

$$m_v(n, r) \geqslant \left\lceil \frac{v}{n} \left\lceil \frac{v-1}{n-1} \right\rceil \right\rceil. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть n-однородный гиперграф $H = (V, E)$ таков, что любые две вершины соединены ребром и $|V| = v$. Тогда степень каждой вершины H должна быть не менее $\left\lceil \frac{v-1}{n-1} \right\rceil$. Значит, сумма степеней всех вершин должна быть не менее $v \left\lceil \frac{v-1}{n-1} \right\rceil$, откуда

$$|E(H)| \cdot n \geqslant v \left\lceil \frac{v-1}{n-1} \right\rceil.$$

Лемма 1 доказана. □

Пусть C — некоторое множество раскрасок множества вершин n-однородного гиперграфа $H = (V, E)$ в r цветов, $e \in E$ — произвольное ребро. Обозначим через $R(C, e)$ множество раскрасок из C, которые представляются ребром e.

Утверждение 4. *Для любого n-однородного гиперграфа $H = (V, E)$, удовлетворяющего условию $\chi(H) > r$, и любого множества C раскрасок вершин V выполнено неравенство*

$$\big|E(H)\big| \geqslant \left\lceil \frac{|C|}{\max\limits_{e \in E} |R(C, e)|} \right\rceil. \tag{16}$$

Сделаем важное замечание. Дело в том, что мы вольны фиксировать любое множество в качестве C, поэтому в данной работе будем пользоваться обозначением $C = (x_1, x_2, x_3)$, означающим, что в любой раскраске из C ровно x_1 вершин первого цвета, x_2 — второго и x_3 — третьего. Кроме того, будем использовать обозначение $C = (x_{11}, x_{12}, x_{13}) \oplus (x_{21}, x_{22}, x_{23})$, означающее, что в любой раскраске из множества C среди первых (по нумерации) $y_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13}$ вершин ровно x_{11} — первого цвета, x_{12} — второго и x_{13} — третьего. Аналогично определяется распределение цветов оставшихся $y_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23}$ вершин.

3. Доказательство теоремы 3

3.1. Первые оценки. В первую очередь следует сказать про совсем тривиальные оценки рассматриваемой величины. Согласно соотношениям (4) и (5) имеем

$$9 \leqslant m(3, 3) \leqslant 35. \tag{17}$$

Сразу же видно, насколько тривиальная нижняя оценка отличается от сформулированной в теореме 3. Воспользуемся леммой 1 и выпишем результаты в таблицу 1.

Теперь воспользуемся утверждением 4. В качестве множества раскрасок C возьмем так называемые *равномерные раскраски* в три цвета, т.е. такие, в который количество вершин одного цвета

Таблица 1. Применение леммы 1

v	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\geqslant 16$
$m(3,3) \geqslant \left\lceil \frac{v}{3} \left\lceil \frac{v-1}{3-1} \right\rceil \right\rceil =$	7	11	12	17	19	24	26	33	35	43

Таблица 2. Применение равномерных раскрасок

v	7	8	9	10	11
$\lvert U_v\rvert$	210	560	1680	4200	11550
$R(U_v,3)$	6	20	60	210	630
$m(3,3) \geqslant \left\lceil \frac{\lvert U_v\rvert}{\lvert R(U_v,3)\rvert} \right\rceil =$	35	28	28	20	19
v	12	13	14	15	
$\lvert U_v\rvert$	34650	90090	252252	756756	
$R(U_v,3)$	1890	5670	16632	49896	
$m(3,3) \geqslant \left\lceil \frac{\lvert U_v\rvert}{\lvert R(U_v,3)\rvert} \right\rceil =$	19	16	16	16	

Таблица 3. Объединение обоих соображений

v	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\geqslant 16$
$m_v(3,3) \geqslant$	35	28	28	20	19	24	26	33	35	43

может превосходить количество вершин другого цвета не более, чем на 1. Обозначим это множество через U_v. Кроме того, потребуем упорядоченности мощностей цветовых классов $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$. С учетом этого можем записать соотношения

$$|U_v| = \binom{v}{x_1}\binom{v-x_1}{x_2}, \tag{18}$$

$$R(U_v,3) = \binom{v-3}{x_2}\binom{v-3-x_2}{x_3} + \binom{v-3}{x_1}\binom{v-3-x_1}{x_3} + \binom{v-3}{x_1}\binom{v-3-x_1}{x_2}. \tag{19}$$

Подставим (18) и (19) в выражение (16) и запишем результаты в таблицу 2.

Совместим результаты таблиц 1 и 2 и запишем результат в таблицу 3.

Из таблицы 3 видно, что если удастся доказать соотношение $m_v(3,3) \geqslant 27$ для $v = 10$, 11, 12, 13, то в силу утверждения 3 справедливость теоремы 3 будет установлена.

Итак, пусть $H = (V,E)$ — 3-однородный гиперграф, $\chi(H) > 3$, в котором любые две вершины соединены хотя бы одним ребром. Наша задача будет состоять в том, чтобы в случаях $v = |V| = 10$, 11, 12, 13 проверить неравенство $|E| \geqslant 27$.

Разделим множество гиперграфов $H = (V,E)$ на классы относительно размера их максимального независимого множества $\alpha(H)$. При этом будем считать, что $V = \{1,\dots,v\}$ и

$A(H) = \{1, \ldots, \alpha(H)\}$ — максимальное независимое множество в H. Лемма 2 устанавливает верхнюю границу возможных значений $\alpha(H)$.

Лемма 2. *Для любого гиперграфа $H = (V, E)$, удовлетворяющего условиям $|V| = v$ и $\chi(H) > 3$, верно неравенство*

$$\alpha(H) < v - 4. \tag{20}$$

Доказательство. Предположим обратное, т.е. $\alpha(H) \geqslant v - 4$. Рассмотрим произвольную раскраску χ множества вершин V, для которой $\chi \in (v-x-y, 0, 0) \oplus (0, x, y)$, причем $x \leqslant 2$ и $y \leqslant 2$. Множество $A(H)$ не содержит ребер по определению, а другие два цветовых класса имеют мощность не более 2, т.е. не могут содержать ребер H. Таким образом, не существует ребра, представляющего χ. Противоречие с условием $\chi(H) > 3$ доказывает лемму. □

С другой стороны, ясно, что если число ребер довольно мало, то у нас просто не может быть небольшого максимального независимого множества. Пусть дан t-однородный гиперграф $H = (V, E)$ с условиями $|V| = n$ и $\alpha(H) = k - 1$. *Числом Турана* $T(n, k, t)$ называется минимально возможное количество ребер в таком гиперграфе (см. [15]). Непосредственно из определения следует соотношение

$$|E(H)| \geqslant T(v, \alpha(H) + 1, 3). \tag{21}$$

Нам далее понадобятся некоторые обозначения. Каждое ребро e гиперграфа H может иметь мощность пересечения с максимальным независимым множеством $A(H)$, равную 0, 1 или 2. В зависимости от этого мы будем называть ребро e ребром нулевого, первого или второго типа и обозначать e^i, где $i = 0, 1, 2$ — тип ребра e. Тогда множество ребер i-го типа будем обозначать E^i.

Теперь мы перейдем непосредственно к рассмотрению отдельных возможных случаев.

3.2. Случай $v = 10$. Исследуем все допустимые значения $\alpha(H)$. Согласно лемме 2 имеет смысл рассматривать только $\alpha(H) < 6$.

Сначала введем величину $ms_v(n, r)$ — то же самое, что и $m(n, r)$, но с условием $|V| = v$. Несложно убедиться в том, что $ms_v(n, r) = \min\limits_{w \leqslant v} m_w(n, r)$ (см. доказательство утверждения 3). Больше всего нас интересует значение этой величины при $v = 6$, $n = 3$, $r = 2$.

Лемма 3. *$ms_6(3, 2) = 10$.*

Доказательство. Пусть $H = (V, E)$ — 3-однородный гиперграф, $|V| = 6$, $\chi(H) > 2$. Рассмотрим все равномерные раскраски V в два цвета; их всего 20. При этом каждое ребро H представляет два из них. Согласно утверждению 4 $|E(H)| \geqslant 10$, т.е. $ms_6(3, 2) \geqslant 10$. С другой стороны, полный 3-однородный гиперграф на 5 вершинах не является 2-раскрашиваемым. У него 10 ребер, значит, $ms_6(3, 2) \leqslant 10$. □

Случай 1.1. $\alpha(H) = 3$. В этом случае оценку на количество ребер дает неравенство (21): $|E(H)| \geqslant T(10, 4, 3)$. Для того, чтобы оценить значение $T(10, 4, 3)$, достаточно известного рекуррентного соотношения (см. [13]):

$$T(n, k, t) \geqslant \left\lceil \frac{n}{n-t} T(n-1, k, t) \right\rceil. \tag{22}$$

В качестве базы выберем некоторое известное значение. Например, воспользуемся следующим фактом (см. [13]):

$$T(n, k+1, 3) = \begin{cases} n - k, & 1 \leqslant \dfrac{n}{k} \leqslant \dfrac{3}{2}; \\ 3n - 4k, & \dfrac{3}{2} \leqslant \dfrac{n}{k} \leqslant 2; \\ 4n - 6k, & 2 \leqslant \dfrac{n}{k} \leqslant \dfrac{9}{4},\ 4n - 9k \neq -1; \\ 4n - 6k + 2, & 4n - 9k = -1, 1, 2. \end{cases} \tag{23}$$

Из (23) следует, что $T(7, 4, 3) = 12$. Тогда последовательно применяя (22), получим результат $T(10, 4, 3) \geqslant 43$.

Случай 1.2. $\alpha(H) = 5$. Рассмотрим индуцированный гиперграф $H_A = (V_A, E_A)$, в котором $V_A = V(H) \setminus A(H)$, а E_A — такое подпространство в $E(H)$, что $e \subset V_A$ для каждого $e \in E_A$. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5. *Для любого 3-однородного гиперграфа $G = (U, F)$, удовлетворяющего условию $\chi(G) > 3$, выполняется соотношение*

$$|F^0| \geqslant ms_{|U_A|}(3, 2). \tag{24}$$

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно; тогда $\chi(G_A) \leqslant 2$. Иными словами, существует правильная раскраска множества U_A в два цвета. Тогда присвоив вершинам $A(G)$ третий цвет, получим правильную раскраску вершин U. □

Рассмотрим множество раскрасок $C = (3, 1, 1) \oplus (1, 2, 2)$. Ясно, что ребра нулевого типа не представляют ни одной такой раскраски, поэтому их вообще рассматривать не требуется. Ясно, что

$$|C| = \binom{5}{3}\binom{2}{1}\binom{5}{1}\binom{4}{2} = 600.$$

Ребра первого типа представляют

$$2\binom{4}{1}\binom{3}{1} = 24$$

раскраски из множества C, а ребра второго типа —

$$\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{2} = 36.$$

Таким образом,

$$|E^1| + |E^2| \geqslant \left\lceil \frac{600}{36} \right\rceil = 17.$$

Отсюда следует, что

$$|E| = |E^0| + |E^1| + |E^2| \geqslant 27.$$

Случай 1.3. $\alpha(H) = 4$. Рассмотрим множество раскрасок $C = (2, 1, 1) \oplus (2, 2, 2)$. Как и в предыдущем случае, $\alpha(H) = 5$ и ни одно ребро из множества E^0 не представляет ни одной раскраски из C; при этом $|E^0| \geqslant 10$ согласно утверждению 5. Нетрудно убедиться в том, что

$$|C| = \binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{6}{2}\binom{4}{2} = 1080.$$

Ребра первого типа представляют

$$\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{2} + 2\binom{3}{2}\binom{4}{2} = 72$$

раскраски, а ребра второго типа —

$$\binom{2}{1}\binom{5}{1}\binom{4}{2} = 60.$$

Кроме того, заметим, что каждая вершина H, не входящая в независимое множество $A(H)$, должна принадлежать хотя бы одному ребру второго типа, иначе ее можно было бы добавить в множество независимости, что противоречит условию его максимальности. Стало быть, H содержит хотя бы 6 ребер второго типа, представляющих при этом не более 360 раскрасок. В том случае, если $|E^2| \geqslant 7$, получаем

$$|E| = |E^0| + |E^1| + |E^2| \geqslant 10 + 7 + \left\lceil \frac{1080 - 360 - 60}{72} \right\rceil = 27.$$

Пусть $|E^2| = 6$. В силу того, что каждая пара вершин из $A(H)$ (всего 6 пар) и каждая вершина из $V \setminus A(H)$ должна быть покрыта ребром из E^2 (всего 6 вершин), получаем, что с точностью до перестановки вершин из $V \setminus A(H)$ множество E^2 имеет вид

$$E^2 = \Big\{\{w_1, w_2, w_5\},\ \{w_1, w_3, w_6\},\ \{w_1, w_4, w_7\},\ \{w_2, w_3, w_8\},\ \{w_2, w_4, w_9\},\ \{w_3, w_4, w_{10}\}\Big\}.$$

Кроме того, мы знаем, что каждая пара вершин должна быть соединена хотя бы одним ребром. Выпишем пары вершин, одна из которых лежит в независимом множестве, а другая — нет и которые еще не встречались среди набора ребер второго типа:

$$\Big\{\{w_1, w_8\},\ \{w_1, w_9\},\ \{w_1, w_{10}\},\ \{w_2, w_6\},\ \{w_2, w_7\},\ \{w_2, w_{10}\},\\ \{w_3, w_5\},\ \{w_3, w_7\},\ \{w_3, w_9\},\ \{w_4, w_5\},\ \{w_4, w_6\},\ \{w_4, w_8\}\Big\}.$$

Рассмотрим ребро первого типа, содержащее $\{w_1, w_8\}$. Пусть это будет ребро $e_1^1 = \{w_1, w_8, x\}$. Если $x \in \{w_5, w_6, w_7\}$, то существует ребро второго типа $e_1^2 = \{w_1, y, x\}$, где $y \in A(H)$. Тогда ребро e_1^1 представляет такую раскраску χ_2, что $\chi_2(w) = 1$, $w \in \{w_1, y, x, w_8\}$. Ясно, что $\chi_2 \in C$, но χ_2 уже представлена соответствующим ребром e_1^2. Тогда

$$|E| = |E^0| + |E^1| + |E^2| \geqslant 10 + 6 + 1 + \left\lceil \frac{720 - 71}{72} \right\rceil = 27.$$

Таким образом, если для некоторой конфигурации ребер E существует раскраска $\chi \in C$, представляемая более чем одним ребром первого типа, то можно проделать аналогичные рассуждения и убедиться в том, что $|E(H)| \geqslant 27$.

Пусть $x = w_9$; тогда $e_1^1 = \{w_1, w_8, w_9\}$. Теперь рассмотрим ребро $e_2^1 = \{w_2, w_6, z\}$. Если $z \notin \{w_8, w_9\}$, то ребра e_1^1 и e_2^1 представляют общую раскраску $\chi_3 \in C$, обладающую свойствами $\chi_3(w) = 2$ для $w \in e_1^1$ и $\chi_3(w) = 3$ для $w \in e_2^1$. В противном случае существует ребро $e_2^2 = \{w_2, p, z\} \in E^2$, которое вместе с e_2^1 представляет такую раскраску $\chi_4 \in C$, что $\chi_4(w) = 1$ для $w \in e_2^1 \cup e_2^2$.

Пусть $x = w_{10}$; тогда $e_1^1 = \{w_1, w_8, w_{10}\}$. Рассмотрим ребро $e_3^1 = \{w_3, w_5, q\}$. Если $q \notin \{w_8, w_{10}\}$, то ребра e_1^1 и e_3^1 представляют такую общую раскраску $\chi_5 \in C$, что $\chi_5(w) = 2$ для $w \in e_1^1$ и $\chi_5(w) = 3$ для $v \in e_3^1$. В противном случае существует ребро $e_3^2 = \{w_3, r, q\} \in E^2$, которое вместе с e_3^1 представляет такую раскраску $\chi_6 \in C$, что $\chi_6(w) = 1$ при $w \in e_3^1 \cup e_3^2$.

Таким образом, мы показали, что при любой конфигурации ребер найдется раскраска, представленная как минимум двумя ребрами первого типа. Поэтому справедлива оценка

$$|E| = |E^0| + |E^1| + |E^2| \geqslant 10 + 6 + 1 + \left\lceil \frac{720 - 71}{72} \right\rceil = 27.$$

Таким образом, $m_{10}(3,3) \geqslant 27$. Рассмотрение случая $v = 10$ завершено.

3.3. Случай $v = 11$.

Ясно, что $T(11,4,3) \geqslant T(10,4,3)$, поэтому рассматривать будем только значения $3 < \alpha(H) < 7$.

Случай 2.1. $\alpha(H) = 4$. Согласно (21), $|E(H)| \geqslant T(11,5,3)$, а точное значение $T(11,5,3)$ известно и равно 29 (см. [3]). Итак, в этом случае все доказано.

Случай 2.2. $\alpha(H) = 5$. Рассмотрим множество раскрасок $C = (1,2,2) \oplus (2,2,2)$. Как и в случае $v = 10$, ни одно ребро из множества E^0 не представляет ни одной раскраски из C; при этом согласно утверждению 5 имеем $|E^0| \geqslant 10$. Нетрудно убедиться в том, что

$$|C| = \binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2} = 2700.$$

Каждое ребро первого типа представляет

$$\binom{4}{2}\binom{4}{2} + 2\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{2} = 180$$

раскрасок. Каждое ребро второго типа представляет

$$2\binom{3}{1}\binom{5}{2}\binom{3}{2} = 180$$

раскрасок. Рассмотрим множество независимости $A(H)$. Оно содержит $\binom{5}{2}$ пар вершин, каждая из которых должна быть включена в какое-либо ребро гиперграфа H. Каждое ребро второго типа содержит не более одной такой пары; стало быть, требуется взять как минимум 10 ребер второго типа. Множество ребер второго типа, содержащих все пары вершин независимого множества ровно один раз, обозначим через E_0^2.

Рассмотрим следующую альтернативу. Допустим, что в множестве E_0^2 существует ребро, которое пересекается со всеми остальными ребрами из E_0^2. Обозначим это ребро через $e_1^2 = \{w_1, w_2, w_6\}$. Рассмотрим пары вершин $\{w_3, w_4\}$, $\{w_3, w_5\}$, $\{w_4, w_5\}$; они должны быть также соединены ребрами, причем второго типа. По предположению они должны пересекаться с ребром e_1^2, но пересечение возможно только по вершине w_6. Таким образом, получились ребра

$$\Big\{e_1^2 = \{w_1, w_2, w_6\},\ e_2^2 = \{w_3, w_4, w_6\},\ e_3^2 = \{w_3, w_5, w_6\},\ e_4^2 = \{w_4, w_5, w_6\}\Big\}.$$

Рассмотрим теперь пары вершин $u, w \in V(H)$, причем $u \in A(H)$, $w \in V(H) \setminus A(H)$. Количество таких пар равно

$$|A(H)| \cdot |V(H) \setminus A(H)| = 5 \cdot 6 = 30.$$

Ребра $e_1^2, \ldots, e_4^2$ содержат пары $\{w_1, w_6\}$, $\{w_2, w_6\}$, $\{w_3, w_6\}$, $\{w_4, w_6\}$, $\{w_5, w_6\}$. Остается 25 пар, но каждое ребро первого или второго типа покрывает не более двух пар, а значит, потребуется взять еще как минимум $\left\lceil \dfrac{25}{2} \right\rceil = 13$, что в сумме с $|E^0|$ дает не менее 27 ребер.

Теперь предположим, что такого ребра не существует. Это означает, что каждое ребро из E_0^2 не пересекается хотя бы с еще одним ребром множества E_0^2. Нетрудно убедиться в том, что любое множество E_0^2, элементы которого удовлетворяют этому условию, можно разделить на два таких непересекающихся множества E_1^2 и E_2^2, что $|E_1^2| \leqslant |E_2^2|$ и для любого $e \in E_2^2$ существует такое $e' \in E_1^2$, что $e \cap e' = \emptyset$. Для этого построим граф $G = (V', E')$, вершины которого соответствуют ребрам E_0^2, а ребро между вершинами $u, w \in V'$ проводится в том случае, если ребра e_1^2, e_2^2 из множества E_0^2, соответствующие вершинам u, w из множества V', не имеют общих вершин из множества V. Разобьем граф G на компоненты связности $G = G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_m$, затем из каждой компоненты G_i выделим произвольное остовное дерево T_i. Поскольку T_i — связный двудольный граф, всегда возможно разделить его вершины на два множества таким образом, чтобы любая вершина одного множества была смежна хотя бы с одной вершиной другого множества. Для выполнения требуемых условий к множеству E_1^2 надо добавить ребра E_0^2, соответствующие вершинам меньшей по мощности доли T_i для всех $i = 1, \ldots, m$.

Как мы уже убедились ранее, каждое ребро $e^2 \in E^2$ представляет не более 180 раскрасок из C. В то же время при подсчете числа раскрасок, представляемых ребрами e_2^2 из множества E_2^2, следует вычитать раскраски, общие с ребрами e_1^2 из множества E_1^2. Общие раскраски появляются у ребер второго типа, не имеющих общих вершин. Число таких раскрасок для одной пары ребер составляет $2\binom{4}{1}\binom{3}{1} = 24$. Таким образом, любые 10 ребер второго типа, содержащие все пары вершин независимого множества $A(H)$, в совокупности представляют не более

$$180 \cdot |E_1^2| + 156 \cdot |E_2^2| \leqslant 180 \cdot 5 + 156 \cdot 5 = 1680$$

раскрасок.

Докажем аналогичное утверждение для ребер первого типа. Допустим, что имеется ребро первого типа, которое пересекается со всеми ребрами из E_0^2. Обозначим это ребро $e^1 = \{w_1, w_6, w_7\}$ и рассмотрим пары вершин $\{w_2, w_3\}$, $\{w_2, w_4\}$, $\{w_2, w_5\}$, $\{w_3, w_4\}$, $\{w_3, w_5\}$, $\{w_4, w_5\}$; они также должны быть соединены ребрами $e_1^2, \ldots, e_6^2$. Эти ребра, в свою очередь, по условию должны пересекаться с ребром e^1. Рассмотрим множество пар вершин $u, w \in V(H)$, причем $u \in A(H)$ и

$w \in \{w_8, w_9, w_{10}, w_{11}\}$. Таких пар имеется $|A(H)| \cdot 4 = 20$, каждое ребро $E(H)$ содержит не более двух таких пар; следовательно, потребуется взять еще как минимум 10 ребер. Таким образом, $|E(H)| \geqslant 10 + 1 + 6 + 10 = 27$. Таким образом, осталось показать, что $|E(H)| \geqslant 27$ и в случае, когда для каждого $e^1 \in E^1$ существует такое $e^2 \in E_0^2$, что $e^1 \cap e^2 = \emptyset$.

Ясно, что для каждого ребра $e^2 \in E^2 \setminus E_0^2$ найдется такое ребро $e_0^2 \in E_0$, что $|e^2 \cap e_0^2 \cap A(H)| = 2$. При этом e^2 и e_0^2 представляют множество общих раскрасок $C' \subset C$: $\chi(w) \in \{2, 3\}$, $w \in e^2 \cup e_0^2$. Нетрудно убедиться, что

$$|C'| = 2\binom{3}{1}\binom{4}{2}.$$

Таким образом, любое ребро второго типа представляет не более 144 раскрасок, не представленных ребрами E_0. В то же время для каждого ребра первого типа e^1 существует такое ребро второго типа $e^2 \in E_0^2$, что $e^1 \cap e^2 = \emptyset$. Несложно понять, что

$$\left|R(C, e^1) \cap R(C, e^2)\right| = 2\binom{2}{1}\binom{3}{1} + 2\binom{3}{2} = 18.$$

Таким образом, любое ребро первого типа представляет не более 162 раскрасок, не представленных ребрами E_0. Отсюда следует, что

$$|E(H)| \geqslant 10 + 10 + \left\lceil \frac{2700 - 1680}{\max(144, 162)} \right\rceil = 27.$$

Рассмотрение случая завершено.

Случай 2.3. $\alpha(H) = 6$. Как и в случае $\alpha(H) = 5$, рассмотрим множество раскрасок $C = (2, 2, 2) \oplus (1, 2, 2)$. Кроме того, ни одно ребро из множества E^0 не представляет ни одной раскраски из C, при этом $|E^0| \geqslant 10$ согласно утверждению 5. Известно, что $|C| = 2700$; для каждого $e \in E^1 \cup E^2$ имеем $|R(C, e)| = 180$. Каждая пара вершин должна быть соединена ребром, в том числе и ребра из независимого множества, следовательно, потребуется взять не менее $\dbinom{6}{2} = 15$ ребер второго типа.

Предположим, что существует ребро второго типа, которое пересекается со всеми другими ребрами второго типа; обозначим его $\{w_1, w_2, w_7\}$. Теперь рассмотрим пары $\{w_3, w_4\}$, $\{w_3, w_5\}$, $\{w_3, w_6\}$, $\{w_4, w_5\}$, $\{w_4, w_6\}$, $\{w_5, w_6\}$; они также должны быть соединены ребрами второго типа:

$$\Big\{\{w_3, w_4, w_7\},\ \{w_3, w_5, w_7\},\ \{w_3, w_6, w_7\},\ \{w_4, w_5, w_7\},\ \{w_4, w_6, w_7\},\ \{w_5, w_6, w_7\}\Big\}.$$

Рассмотрим пары вершин $\{u, w\}$, где $u \in A(H)$, $w \in \{w_8, w_9, w_{10}, w_{11}\}$. Всего таких пар 24, каждое ребро содержит не более двух таких пар; следовательно, потребуется еще как минимум 12 ребер; итого $|E(H)| \geqslant 10 + 1 + 6 + 12 = 29$.

Осталось рассмотреть случай, когда для каждого $e_1^2 \in E^2$ существует такое $e_2^2 \in E^2$, что $e_1^2 \cap e_2^2 = \emptyset$. Нетрудно убедиться в том, что

$$\left|R(C, e_1^2) \cap R(C, e_2^2)\right| = 4\binom{3}{1} + 2\binom{3}{1}\binom{2}{1} = 24.$$

Как было установлено в п. 2.2, любое множество E^2, элементы которого удовлетворяют этому условию, можно разделить на такие два непересекающихся множества E_1^2 и E_2^2, что $|E_1^2| \leqslant |E_2^2|$ и для каждого $e \in E_2^2$ найдется такое $e' \in E_1^2$, что $e \cap e' = \emptyset$. Таким образом,

$$\left|\bigcup_{e^2 \in E^2} R(C, e^2)\right| \leqslant 180 \cdot |E_1^2| + 156 \cdot |E_2^2| \leqslant 180 \cdot 7 + 156 \cdot 8 = 2508.$$

Следовательно,

$$|E(H)| = |E^0| + |E^1| + |E^2| \geqslant 10 + \left\lceil \frac{2700 - 2508}{180} \right\rceil + 15 = 27.$$

Рассмотрение случая $v = 11$ завершено.

3.4. Случай $v = 12$**.** Поскольку выполняется неравенство $T(12,5,3) \geqslant T(11,5,3)$, будем рассматривать только значения $4 < \alpha(H) < 8$.

Случай 3.1. $\alpha(H) = 5$. Рассмотрим множество раскрасок $C = (3,1,1) \oplus (1,3,3)$. Рассмотрим различные возможные значения $|E^0|$; при этом $|E^0| \geqslant 7$ согласно утверждению 5.

Случай А. $|E^0| \geqslant 9$. В этом случае

$$\Big|\big\{\{u,w\} : u \in A(H),\ w \in H \setminus A(H)\big\}\Big| = 35,$$

любое ребро $e \in E$ содержит не более двух таких пар. Тогда

$$|E(H)| \geqslant 9 + \left\lceil \frac{35}{2} \right\rceil = 27.$$

Случай Б. $|E^0| = 7$. В этом случае ребра E_0 образуют плоскость Фано. Введем обозначение

$$C_0 = \bigcup_{e^0 \in E^0} R(C, e^0)$$

и найдем мощность множества $\tilde{C} = C \setminus C_0$. На каждую раскраску множества $V \setminus A(H)$ приходится $\binom{5}{1}\binom{4}{1} = 20$ раскрасок множества $A(H)$. Число способов зафиксировать одно множество независимости $A_1(H_A)$ размера 3 в множестве $V \setminus A(H)$ равно $\binom{7}{3} - 7 = 28$. Число способов выбрать второе множество независимости $A_2(H_A)$ размера 3, с условием $A_1(H_A) \cap A_2(H_A) = \emptyset$ равно $\binom{4}{3} - 1 = 3$. Тогда все раскраски $\chi \in C$, обладающие свойствами $\chi(w_1) = 2$ при $w_1 \in A_1(H_A)$ и $\chi(w_2) = 3$ при $w_1 \in A_2(H_A)$, не представляются ребрами E_0, поэтому входят в $\tilde{C}$. Поэтому $|\tilde{C}| = 20 \cdot 28 \cdot 3 = 1680$.

Найдем значение величины $\big|R(\tilde{C}, e^2)\big|$, $e^2 \in E^2$. Рассмотрим вершину $w = e^2 \cap (V \setminus A(H))$. Если e^2 представляет $\chi \in \tilde{C}$, то любое ребро $e^0 \in E^0$, лежащее в $V \setminus (A(H) \cup \{w\})$, должно быть неодноцветно в χ. Число равномерных раскрасок множества $V \setminus (A(H) \cup \{w\})$ в два цвета равно 20, каждое ребро нулевого типа одноцветно ровно в двух из них. В силу того, что степень w в E^0 равна трем, таких ребер ровно 4, причем никакие два из них не представляют одну и ту же раскраску. В итоге

$$\Big|R(\tilde{C}, e^2\Big| = \binom{3}{2}\binom{2}{1}(20 - 4 \cdot 2) = 72.$$

Теперь найдем $\big|R(\tilde{C}, e^1)\big|$, $e^1 \in E^1$. Пусть вершины u и w таковы, что $\{u,w\} = e^1 \cap (V \setminus A(H))$. В силу свойств плоскости Фано существует единственное $e^0_0 \in E^0$, для которого $\{u,w\} \subset e^0_0$. Если e^1 представляет $\chi \in \tilde{C}$, то, во-первых, e^0_0 должно быть неодноцветно в χ, а во-вторых, каждое ребро $e^0 \in E^0$, лежащее в $V \setminus (A(H) \cup \{u,w\})$, должно быть неодноцветно в χ. Таких ребер всего 2; обозначим любое из них через e^0_1. Поскольку в плоскости Фано любые две ребра пересекаются, то никакие два из этих условий не могут быть выполнены одновременно. Из этих рассуждений следует, что

$$\Big|R(\tilde{C}, e^1)\Big| = \Big|R(C, e^1)\Big| - \Big|R(C, e^1) \cap R(C, e^0_0)\Big| - 2\Big|R(C, e^1) \cap R(C, e^0_1)\Big|. \tag{25}$$

Найдем значения выражений, входящих в состав (25):

$$\Big|R(C, e^1)\Big| = 2\binom{4}{1}\binom{5}{1}\binom{4}{1} = 160, \tag{26}$$

$$\Big|R(C, e^1) \cap R(C, e^0_0)\Big| = 2\binom{4}{1}\binom{4}{1} = 32, \tag{27}$$

$$\Big|R(C, e^1) \cap R(C, e^0_1)\Big| = 2\binom{4}{1}\binom{2}{1} = 16. \tag{28}$$

Подставив значения выражений (26), (27) и (28) в (25), получим, что

$$\left|R(\tilde{C}, e^1)\right| = 160 - 32 - 2 \cdot 16 = 96.$$

С учетом ограничений $|E^2| \geqslant \binom{\alpha(H)}{2}$ и $\left|\tilde{C}\right| = 1680$, получаем

$$|E^1| + |E^2| \geqslant 10 + \left\lceil \frac{1680 - 72 \cdot 10}{\max(72, 96)} \right\rceil = 20.$$

Таким образом, $|E(H)| = |E^0| + |E^1| + |E^2| \geqslant 7 + 20 = 27$.

Случай В. $|E^0| = 8$. Для того, чтобы перейти к случаю восьми ребер нулевого типа, нам потребуется доказать два факта. Во-первых, что для каждого $e^0 \in E^0$ имеем

$$\left|R(\tilde{C}, e^0)\right| \leqslant 2\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1} = 160.$$

Второй факт сформулируем в виде леммы.

Лемма 4. *Пусть $H = (V, E)$ — 3-однородный гиперграф, удовлетворяющий условиям $|V| = 7$, $|E| = 8$, $\chi(H) > 2$. Тогда существуют такие ребра $e_1, \ldots, e_7 \in E$, что набор $\{e_1, \ldots, e_7\}$ изоморфен плоскости Фано.*

Доказательство. Поскольку $ms_i(3, 2) > 8$ при $i < 7$, то для любого $u, w) \in V$ существует такое $e \in E$, что $u, w \in e$. Из этого следует, что степень любой вершины не меньше 3, а всего вершин степени 3 не менее четырех. Выберем одну из таких вершин и обозначим ее w_1. Она принадлежит ребрам $e_1 = \{w_1, w_2, w_3\}$, $e_2 = \{w_1, w_4, w_5\}$, $e_3 = \{w_1, w_6, w_7\}$. Еще одну вершину степени 3 обозначим w_3; допустим, что она принадлежит ребрам e_1, $e_4 = \{w_3, w_4, w_5\}$, $e_5 = \{w_3, w_6, w_7\}$. Среди вершин w_4, w_5, w_6, w_7 хотя бы одна должна иметь степень 3, но каждая из них не соединена еще с тремя другими вершинами, а значит, ни одна не может иметь степень 3, противоречие. Тогда вершина w_3 принадлежит ребрам e_1, $e_4 = \{w_3, w_4, w_6\}$, $e_5 = \{w_3, w_5, w_7\}$. Среди вершин w_4, w_5, w_6, w_7 хотя бы одна имеет степень 3; пусть это вершина w_4, тогда она принадлежит ребрам e_2, e_4, $e_6 = \{w_2, w_4, w_7\}$. Рассмотрим такое множество раскрасок C, что

$$C = \left\{\chi : \chi(w) = 1,\ w \in \{w_2, w_4, w_5\},\ \chi(u) = 2,\ \text{где } u \in \tilde{V} :\ \tilde{V} \subset \{w_1, w_3, w_6, w_7\},\ |\tilde{V}| = 3\right\}.$$

Нетрудно найти мощность множества C: $|C| = \binom{4}{3} = 4$. Кроме того, ни одно ребро из набора $\{e_1, \ldots, e_6\}$ не представляет ни одной раскраски из C. Обозначим через F^i произвольное подмножество $F^i \subset E \setminus \{e_1, \ldots, e_6\}$, обладающее тем свойством, что $|f^i \cap \{w_2, w_4, w_5\}| = i$ для каждого $f^i \in F^i$. Оценим число раскрасок множества C, представляемых ребрами различных типов: $|R(C, f^0)| = 1$, $|R(C, f^1)| = 0$, $|R(C, f^2)| = 1$, $|R(C, f^3)| = 4$. В то же время, если $e^3 = \{w_2, w_4, w_5\} \in E$, то ребра $e_1, \ldots, e_6, f^3$ образуют плоскость Фано, т.е. лемма выполняется. С другой стороны, с учетом предыдущих результатов, можно установить истинность неравенства

$$\left|E^0\right| \geqslant \left|\{e_1, \ldots, e_6\}\right| + \left\lceil \frac{|C|}{\max\limits_{0 \leqslant i \leqslant 2} |R(C, f^i)|} \right\rceil = 10.$$

Результат противоречит условию $|E^0| \leqslant 8$ леммы. Лемма доказана. □

Итак, случай В аналогичен случаю Б с той разницей, что $|E^0| = 8$, а $|R(\tilde{C}, e^0)| \leqslant 160$. Применив те же рассуждения, получим

$$|E(H)| = |E^0| + |E^1| + |E^2| \geqslant 8 + 10 + \left\lceil \frac{1680 - 160 - 720}{96} \right\rceil = 27.$$

Рассмотрение случая $\alpha(H) = 5$ завершено.

Случай 3.2. $\alpha(H) = 6$. В этом случае $|E^0| \geqslant 10$ согласно утверждению 5; в то же время

$$|E^1| + |E^2| \geqslant \left\lceil \frac{\alpha(H) \cdot (v - \alpha(H))}{2} \right\rceil = 18,$$

а значит, $|E(H)| \geqslant 10 + 18 = 28$.

Случай 3.3. $\alpha(H) = 7$. Аналогично случаю 3.2 имеем $|E^0| \geqslant 10$ и

$$|E^1| + |E^2| \geqslant \left\lceil \frac{\alpha(H) \cdot (v - \alpha(H))}{2} \right\rceil = 18,$$

что означает выполнение неравенства $|E(H)| \geqslant 28$.

Таким образом, мы показали, что $m_{12}(3,3) \geqslant 27$. Рассмотрение случая $v = 12$ завершено.

3.5. Случай $v = 13$.

Случай 1. $\alpha(H) = 5$. Из неравенства (21) получаем $m_{13}(3,3) \geqslant T(13,6,3)$. Согласно (23) имеем $T(11,6,3) = 16$. Последовательно подставляя значения в выражение (22), для случая $\alpha(H) = 5$ получим оценку $m_{13}(3,3) \geqslant T(13,6,3) \geqslant 29$.

Случай 2. $\alpha(H) = 6$. Согласно утверждению 5, $|E^0| \geqslant 7$. В то же время

$$|E^1| + |E^2| \geqslant \left\lceil \frac{\alpha(H) \cdot (v - \alpha(H))}{2} \right\rceil = 21,$$

а значит, $|E(H)| \geqslant 7 + 21 = 28$.

Случай 3. $\alpha(H) = 7$. Аналогично предыдущему случаю, согласно утверждению 5 имеем $|E^0| \geqslant 10$ и

$$|E^1| + |E^2| \geqslant \left\lceil \frac{\alpha(H) \cdot (v - \alpha(H))}{2} \right\rceil = 21;$$

поэтому $|E(H)| \geqslant 10 + 21 = 31$.

Случай 4. $\alpha(H) = 8$. Как и раньше, $|E^0| \geqslant 10$ и

$$|E^1| + |E^2| \geqslant \left\lceil \frac{\alpha(H) \cdot (v - \alpha(H))}{2} \right\rceil = 20;$$

поэтому $|E(H)| \geqslant 10 + 20 = 30$.

Итак, приведенные рассуждения показывают истинность соотношения $m_{13}(3,3) \geqslant 28$.

Улучшенные результаты содержатся в таблице 3, на основе которой составлена новая таблица 4.

Таблица 4. Применение полученных результатов

v	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\geqslant 16$
$m_v(3,3) \geqslant$	35	28	28	27	27	27	28	33	35	43

Из таблицы 4 вытекает истинность утверждения теоремы 3 и следствия 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Райгородский А. М., Шабанов Д. А.* Задача Эрдеша—Хайнала о раскрасках гиперграфов, ее обобщения и смежные проблемы// Усп. мат. наук. — 2011. — *66*, № 5. — С. 109–182.
2. *Akolzin I. A., Shabanov D. A.* Colorings of hypergraphs with large number of colors// Discr. Math. — 2016. — *339*, № 12. — С. 3020–3031.
3. *Boyer E. D., Kreher D. L., Radziszowski S. P., Sidorenko A.* On $(n, 5, 3)$-Turan systems// Ars Combinatoria. — 1994. — *37*. — С. 13–31.
4. *Cherkashin D., Kozik J.* A note on random greedy coloring of uniform hypergraphs// Random Struct. Algorithms. — 2015. — *47*, № 3. — С. 407–413.
5. *Erdős P.* On a combinatorial problem, I// Nordisk Mat. Tidskrift. — 1963. — *11*. — С. 5–10.
6. *Erdős P.* On a combinatorial problem, II// Acta Math. Acad. Sci. — 1964. — *15*, № 3-4. — С. 445–447.
7. *Erdős P., Hajnal A.* On a property of families of sets// Acta Math. Acad. Sci. — 1961. — *12*, № 1-2. — С. 87–123.
8. *Goldberg M., Russell H.* Toward computing $m(4)$// Ars Combinatoria. — 1995. — *39*. — С. 139–148.
9. *Kostochka A. V.* Color-critical graphs and hypergraphs with few edges: A survey// в кн.: More Sets, Graphs and Numbers (Győri E., Katona G. O H., Lovász L., Fleiner T., eds.). — Bolyai Soc. Math. Stud. — Berlin–Heidelberg: Springer, 2006. — *15*. — С. 175–198.
10. *Östergård P. R. J.* On the minimum size of 4-uniform hypergraphs without property B// Discr. Appl. Math. — 2014. — *163*, № 2. — С. 199–204.
11. *Radhakrishnan J., Srinivasan A.* Improved bounds and algorithms for hypergraph two-coloring// Random Struct. Algorithms. — 2000. — *16*, № 1. — С. 4–32.
12. *Seymour P. D.* A note on a combinatorial problem of Erdős and Hajnal// J. London Math. Soc. — 1974. — *8*, № 2. — С. 681–682.
13. *Sidorenko A.* What we know and what we do not know about Turan numbers// Graphs and Combinatorics. — 1995. — *11*. — С. 179–199.
14. *Toft B.* On color critical hypergraphs// Infinite and Finite Sets. — 1975. — *3*. — С. 1445–1457.
15. *Turán P.* Research problems// Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Internat. Közl. — 1961. — *6*. — С. 417–423.

И. А. Акользин
Московский физико-технический институт
E-mail: iakolzin@gmail.com