



Общероссийский математический портал

Н. А. Зайцев, Б. В. Критский, Ю. Г. Рыков, Об одной двумерной модели расчета двухфазных потоков, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2014, 086

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

22 января 2025 г., 22:07:53





ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 86 за 2014 г.



Зайцев Н.А., Критский Б.В.,  
Рыков Ю.Г.

Об одной двумерной  
модели расчета двухфазных  
ПОТОКОВ

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Зайцев Н.А., Критский Б.В., Рыков Ю.Г. Об одной двумерной модели расчета двухфазных потоков // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 86. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-86>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М. В. КЕЛДЫША

Н. А. Зайцев, Б. В. Критский, Ю. Г. Рыков

ОБ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ  
РАСЧЕТА ДВУХФАЗНЫХ ПОТОКОВ

Москва — 2014

Н. А. Зайцев, Б. В. Критский, Ю. Г. Рыков. *Об одной двумерной модели расчета двухфазных потоков.*

**Аннотация.** В препринте дан критический обзор методологий расчета двухфазных течений на масштабах локального равновесия и предложена двумерная модель для расчета двухфазных течений. Замкнутая модель определяющих уравнений выписана для модельной среды с уравнением состояния типа Ван-дер-Ваальса. Представленная схематика расчета базируется на методе прямого моделирования и предназначена для использования на высокопроизводительных вычислительных комплексах (в перспективе порядка одного экзафлопса). Модель основана на концепции односкоростного континуума, где фазы идентифицируются с помощью величины плотности среды. Также модель включает в себя уравнение состояния, основанное на уравнении типа Ван-дер-Ваальса, с возможностью фазовых переходов. При этом термодинамическая составляющая позволяет проводить сквозной расчет, и ее структура позволяет включать в рассмотрение различные неравновесные процессы. Гидродинамической основой являются уравнения Эйлера с учетом процессов теплопроводности.

**Ключевые слова:** двумерные двухфазные течения, прямое численное моделирование, термодинамическая модель

N. A. Zaitsev, B. V. Kritskii, Yu. G. Rykov. *On a two-dimensional model for computations of two-phase flows.*

**Abstract.** In the preprint a critical review of the methodologies for calculating of two phase flows at the scale of local equilibrium is presented and a two-dimensional model for calculating of two phase flows is suggested. A closed model of the governing equations for a model medium with EOS of Van der Waals type is presented. The described calculation schematics is based on the DNS approach and is intended for the usage with the supercomputers (with the prospects of achieving of exaflops performance). The model is based on the concept of single-velocity continuum, where the phases differ by the density level. Also the model includes the EOS of Van der Waals type with the possibility to have the phase transition. Such EOS allows performing the uniform calculations and including into the consideration various non-equilibrium processes. The Euler equations with heat conduction effects form the hydrodynamic background.

**Key words:** 2D two-phase flows, direct numerical simulation, thermodynamic model

Исследование выполнено за счет Российского научного фонда (проект № 14-21-00025).

## Основные обозначения

$i$  – индекс, принимающий всегда только два значения (по числу фаз): 1 и 2.

$\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2$  – плотности фаз (по отношению к контрольному объему);  $\rho_1, \rho_2$  – истинные плотности фаз (по отношению к реально занимаемому объему);

$\bar{P}_1, \bar{P}_2$  – давления фаз (как компоненты тензора напряжений);  $P_1, P_2$  – истинные давления фаз;

$\vec{U}_1 = (u_1, v_1, w_1), \vec{U}_2 = (u_2, v_2, w_2)$  – векторы скорости фаз в координатах  $(x, y, z)$ ;

$(u, v, w)$  – вектор скорости межфазной поверхности для транспортного уравнения

$e_1, e_2$  – полные удельные энергии фаз;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – внутренние удельные энергии фаз;

$J_{ji}; i=1,2; j=1,2$  – члены, отвечающие за обмен массой между фазами;

$$J_{ij} = -J_{ji}, J_{ii} = 0;$$

$\vec{M}_{ji}; i=1,2; j=1,2$  – члены, отвечающие за обмен импульсом между фазами;

$$\vec{M}_{ij} = -\vec{M}_{ji}, \vec{M}_{ii} = 0;$$

$E_{ji}; i=1,2; j=1,2$  – члены, отвечающие за обмен энергией между фазами;

$$E_{ij} = -E_{ji}, E_{ii} = 0;$$

$\vec{G}_1, \vec{G}_2$  – внешние и внутренние силы, действующие на фазы;

$Q_1, Q_2$  – работа внешних и внутренних сил.

## Вводные замечания

Авторами настоящего препринта ранее в [1] была предложена одномерная модель для прямого численного моделирования (DNS) течений двухфазной жидкости, основанная на уравнениях Эйлера для односкоростного континуума и уравнении состояния типа Ван-дер-Ваальса. Позднее авторами было предложено уточнение одномерной модели для реальной среды, т.е. для среды с реальными свойствами, полученными экспериментально. Кроме того, была программно реализована одномерная модель с учетом вязкости и теплопроводности в уравнениях движения (на основе уравнений Навье-Стокса). Были проведены тестовые расчеты.

В настоящем препринте разработана двумерная модель двухфазных течений для модельной среды с уравнением состояния типа Ван-дер-Ваальса.

В начале препринта дан краткий обзор подходов к расчету движений парожидкостных смесей. Кратко рассмотрен ряд моделей, описывающих двухфазную среду. При этом модели отбирались так, чтобы

продемонстрировать сложившуюся (по мнению авторов) тенденцию развития методов решения задач теории многофазных сред, которая вытекает из сочетания физической адекватности, математической корректности, эффективности численных методов и возможностей вычислительной техники. Самым общим образом эту тенденцию можно сформулировать так: *задачи теории многофазных сред необходимо решать с помощью прямого моделирования (расчет из первых принципов); из таких расчетов следует извлекать параметры (функциональные зависимости) упрощенных моделей, которые используются для практического применения в промышленности.* Для того, чтобы яснее выразить основное направление развития, мы не будем (если противное не оговорено особо) принимать во внимание эффекты, связанные с вязкостью и теплопроводностью, также ограничимся рассмотрением только двухфазных сред. Любую модель, представленную ниже, можно распространить на многофазный случай и включить в нее дополнительные физические эффекты. Все это не повлияет на общие выводы.

Затем предлагается двумерная модель течений двухфазного односкоростного континуума. В следующем параграфе приводятся замыкающие соотношения для уравнения состояния типа Ван-дер-Ваальса.

## **§1. Основная 3D система дифференциальных уравнений**

Как правило, двухфазный поток (впрочем, как и многофазный) мыслится как состоящий из двух видов объемов, которые в сумме занимают все трехмерное пространство. Эти объемы имеют более-менее приемлемые границы (хотя при использовании прямого моделирования существование таких границ можно рассматривать как некую идеализацию), заполнены каждый своим видом среды и представляют собой так называемый «мезомасштаб». «Микромасштаб» представлен молекулярным уровнем, «макромасштаб» — уровнем движения такой смеси как целого. При рассмотрении таких потоков предполагаются выполненными два условия, см. [2]:

- размеры описанных выше объемов – неоднородностей смеси – во много раз больше молекулярно-кинетических размеров;
- с другой стороны, размеры этих объемов во много раз меньше расстояний, на которых заметно меняются осредненные или макроскопические параметры.

В каждом объеме на «мезомасштабе» выполняются, вообще говоря, обычные уравнения гидродинамики для того типа жидкости или газа, который занимает данный объем. Взаимодействие между фазами можно контролировать с помощью разного рода граничных условий, поставленных для каждого объема. Поскольку в сколько-нибудь сложных задачах на сегодняшний день представляется невозможным проследить за поведением всех межфазных границ, учесть возможный коллапс объемов обоих видов, а также и их возможное возникновение, то, как правило, при описании двухфазных сред

используют разнообразные виды осреднения, что приводит к обозримым системам уравнений. При этом, как правило, происходит редукция размерности, и система уравнений оказывается одномерной.

Способов записывать осреднения и отбрасывать «несущественные» члены существует довольно много. Этот процесс, вообще говоря, приводит к достаточно сложным и принципиально (по крайней мере, с математической точки зрения) разным формулировкам даже в том случае, когда не принимается во внимание конкретный вид взаимодействия между фазами. Часто в литературе физическая подоплека полученных систем уравнений не может быть прояснена без точного знания экспериментального материала. Характерные методы усреднения и способы получения систем уравнений при моделировании двухфазных потоков описаны, например, в [3**Ошибка! Источник ссылки не найден.**, 4].

Важным моментом при формулировке получающихся одномерных моделей также является учет межфазного взаимодействия и влияния межфазной границы. Этот вопрос относился бы скорее к компетенции физики и эксперимента, если бы члены, отвечающие за взаимовлияние фаз, не содержали бы дифференциальных операторов. Но, как правило, наличие межфазной границы приводит при усреднении к появлению членов с производными, что может кардинально поменять тип полученной системы уравнений. Такие силы можно также трактовать с помощью вариационных принципов, что приводит к появлению в некотором роде экзотических (с «одномерной» точки зрения) сил, см., например, [5, 6], и о чем мы скажем немного подробнее позднее.

Все же из всего множества возможных формулировок удастся выделить некоторый основной вариант, который в той или иной форме используется всеми исследователями и показывает хорошие результаты при работе в промышленных кодах. Во всяком случае, представляется удобным отталкиваться от этого основного варианта, к описанию которого мы сейчас и переходим.

Итак, основной вариант базируется на выполнении обычных законов сохранения гидродинамики для каждой фазы.

Сохранение массы.

$$\frac{\partial \bar{\rho}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_i u_i}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}_i v_i}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho}_i w_i}{\partial z} = J_{1i} + J_{2i}. \quad (1)$$

Сохранение импульса.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\rho}_i u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{P}_i + \bar{\rho}_i u_i^2)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{\rho}_i u_i v_i)}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{\rho}_i u_i w_i)}{\partial z} &= G_i^x + M_{1i}^x + M_{2i}^x, \\
\frac{\partial \bar{\rho}_i v_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho}_i u_i v_i)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{P}_i + \bar{\rho}_i v_i^2)}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{\rho}_i v_i w_i)}{\partial z} &= G_i^y + M_{1i}^y + M_{2i}^y, \\
\frac{\partial \bar{\rho}_i w_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho}_i u_i w_i)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{\rho}_i v_i w_i)}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{P}_i + \bar{\rho}_i w_i^2)}{\partial z} &= G_i^z + M_{1i}^z + M_{2i}^z.
\end{aligned} \tag{2}$$

Сохранение энергии.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\rho}_i e_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho}_i e_i + \bar{P}_i) u_i}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{\rho}_i e_i + \bar{P}_i) v_i}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{\rho}_i e_i + \bar{P}_i) w_i}{\partial z} &= Q_i + E_{1i} + E_{2i} \\
e_i = \frac{1}{2} (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) + \varepsilon_i.
\end{aligned} \tag{3}$$

Поскольку в гетерогенных смесях, в отличие от гомогенных, каждая фаза занимает лишь часть объема смеси, то вводится доля  $\alpha_i$  каждой фазы в контрольном объеме смеси, при этом  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . Таким образом,  $\bar{\rho}_i = \alpha_i \rho_i$  и  $\bar{P}_i = \alpha_i P_i$ , см., например, [2].

Далее, величины  $\vec{G}_i, Q_i$  могут содержать различные дифференциальные члены, отражающие действующие внутренние и внешние силы, не связанные с непосредственным обменом между фазами. В дальнейшем выделим специально одну такую силу (которая всегда присутствует, см., например, [2, 7]), связанную с движением межфазной границы под воздействием градиента давления. Положим

$$\begin{aligned}
\vec{G}_i &= \hat{P}_i \cdot \nabla \alpha_i + (\vec{V}_f)_i + \vec{F}_i, \\
Q_{=i} &= -\hat{P}_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + W_i.
\end{aligned}$$

Здесь  $\hat{P}_i$  обозначает некоторую особую силу давления, связанную с поверхностью раздела фаз,  $(\vec{V}_f)_i$  представляют собой силы, действующие между фазами при движении (например, межфазное трение) и которые могут содержать дифференциальные члены. Величина  $\vec{F}_i$  описывает внешние (не связанные со взаимодействием фаз) силы (например силу тяжести или трения о стенки), а  $W_i$  – внешние источники или стоки тепла, а также теплопроводность и потери на тот или иной вид «трения». Силы  $\vec{F}_i$  и  $W_i$  не содержат дифференциальных членов.



Итак, получим следующую систему уравнений

$$\frac{\partial(\alpha_i \rho_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_i \rho_i u_i)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha_i \rho_i v_i)}{\partial y} + \frac{\partial(\alpha_i \rho_i w_i)}{\partial z} = J_{1i} + J_{2i}, \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_i \rho_i u_i)}{\partial t} + \frac{\partial[\alpha_i (P_i + \rho_i u_i^2)]}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha_i \rho_i u_i v_i)}{\partial y} + \frac{\partial(\alpha_i \rho_i u_i w_i)}{\partial z} = \hat{P}_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \\ + F_i^x + (V_f^x)_i + M_{1i}^x + M_{2i}^x, \end{aligned} \quad (4b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_i \rho_i v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_i \rho_i u_i v_i)}{\partial x} + \frac{\partial[\alpha_i (P_i + \rho_i v_i^2)]}{\partial y} + \frac{\partial(\alpha_i \rho_i v_i w_i)}{\partial z} = \hat{P}_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \\ + F_i^y + (V_f^y)_i + M_{1i}^y + M_{2i}^y, \end{aligned} \quad (4c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_i \rho_i w_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_i \rho_i u_i w_i)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha_i \rho_i v_i w_i)}{\partial y} + \frac{\partial[\alpha_i (P_i + \rho_i w_i^2)]}{\partial z} = \hat{P}_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \\ + F_i^z + (V_f^z)_i + M_{1i}^z + M_{2i}^z, \end{aligned} \quad (4d)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_i \rho_i e_i)}{\partial t} + \frac{\partial[\alpha_i u_i (P_i + \rho_i e_i)]}{\partial x} + \frac{\partial[\alpha_i v_i (P_i + \rho_i e_i)]}{\partial y} + \frac{\partial[\alpha_i w_i (P_i + \rho_i e_i)]}{\partial z} = -\hat{P}_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} \\ + W_i + E_{1i} + E_{2i}, \end{aligned} \quad (4e)$$

$$e_i = \frac{1}{2} (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) + \varepsilon_i.$$

Система (1) – (3) является основной системой уравнений для описания двухфазной среды, система (4) представляет собой наиболее распространенную ее конкретизацию. Заметим, что тип системы (4) еще все-таки не определен, поскольку член  $(\vec{V}_f)_i$ , вообще говоря, может содержать дифференциальные члены. Кроме того, замыкание этой системы (т.е. приведение в соответствие количества уравнений и неизвестных) может также содержать дополнительные дифференциальные члены (так, например, бывает при учете поверхностного натяжения при выписывании соотношений между давлениями в разных фазах). В дальнейшем мы рассмотрим только одномерный вариант (4). При этом мы для сокращения записи не будем учитывать все внешние силы, т.к. этот вопрос не вызывает затруднений с точки зрения математического описания и не приводит к изменению типа системы уравнений.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** На самом деле мы только что рассмотрели один из подходов к описанию двухфазной среды – модель двух «жидкостей» (two-fluid model). Этот подход был превалирующим, начиная со второй половины 20 века (особенно в одномерном варианте), ввиду того, что за счет «огрубления» ситуации при осреднении требуется относительно немного вычислительных ресурсов. Однако в последние годы в связи со значительным ростом мощности вычислительных систем стал развиваться подход прямого моделирования. При этом подходе многофазная среда представляется как единый «однофазный» континуум, но свойства этой гипотетической фазы сильно меняются при переходе от описания областей, занимаемых, например, «жидкостью», к описанию областей, занимаемых, например, «газом». Естественно, для достаточно надежного расчета подобной ситуации необходимы очень подробные сетки и большие вычислительные мощности. Об этом подходе будет рассказано позже.

Теперь отметим основные сложности математического порядка, которые могут возникнуть при моделировании двухфазных потоков и которые обязательно должны учитываться как при построении физических моделей, так и при конструировании разностных схем. Эти сложности таковы:

- Система (4) может оказаться не эволюционной, т.е. у нее отсутствует свойство непрерывной зависимости от начальных данных;
- Система (4) содержит недивергентные члены, математическая трактовка которых затруднена при возникновении разрывов у соответствующих функций.
- В реальных двухфазных течениях существует много режимов, которые различаются видом используемых корреляций для межфазных сил и обменов (наиболее известная аналогия в обычной гидродинамике – это ламинарный и турбулентный режимы); на настоящий момент в доступной авторам литературе не обнаружено описания способов получения автоматического перехода с режима на режим, соответствующего широкому набору экспериментальных данных.

Первая сложность означает, что модель не является корректно поставленной и при попытке добиться уточнения результата путем, например, дробления сетки любую численную схему будет разносить. Поэтому, вообще говоря, необходимо предусмотреть регуляризацию задачи.

Вторая сложность приводит к тому, что одной математической формы уравнений недостаточно, в отличие от задач, скажем, гидродинамики, для выбора необходимого класса разностных схем (в гидродинамике таким классом фактически является класс схем, основанных на дивергентном замыкании). Необходимо привлекать дополнительные соображения физического характера для обоснования того, какую скорость распространения разрыва должна давать численная схема.

Третья сложность требует отдельной аккуратности при написании разностных схем, т.к. правые части системы (4) могут иметь достаточно

нерегулярный характер. Кроме того, необходим существенный объем экспериментальных данных.

Все эти сложности будут в той или иной мере рассмотрены далее на примере одномерных систем уравнений.

## §2. Одномерные системы дифференциальных уравнений

Итак, одномерная система уравнений двухфазной среды выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_i \rho_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_i \rho_i u_i)}{\partial x} &= J_{1i} + J_{2i} \\ \frac{\partial(\alpha_i \rho_i u_i)}{\partial t} + \frac{\partial \left[ \alpha_i (P_i + \rho_i u_i^2) \right]}{\partial x} - \hat{P}_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} &= (V_f)_i + M_{1i} + M_{2i}, \\ \frac{\partial(\alpha_i \rho_i e_i)}{\partial t} + \frac{\partial \left[ \alpha_i u_i (P_i + \rho_i e_i) \right]}{\partial x} + \hat{P}_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} &= E_{1i} + E_{2i} \end{aligned} \quad (5)$$

$$e_i = u_i^2 / 2 + \varepsilon_i.$$

Обычно предполагают, что на поверхности раздела  $\hat{P}_1 = \hat{P}_2 = \hat{P}$ . Учитывая термодинамические уравнения состояния сред  $\varepsilon_i = \varepsilon_i(\rho_i, P_i)$  и то, что  $\hat{P}$  является некоторой известной функцией от плотности, давления, концентрации и, возможно, скорости, получим, что система (5) состоит из шести уравнений для семи неизвестных:  $\rho_i, u_i, P_i$  и  $\alpha_i \equiv \alpha$ . Так что необходимо еще одно замыкающее уравнение.

Простейшим замыкающим соотношением, см. [3], удовлетворяет так называемая «модель с равными давлениями» (equal pressure model)  $\hat{P} = P_1 = P_2 \equiv P$ . При этом силы  $(V_f)_i$  полагаются равными нулю. Несмотря на то, что математически эта модель неустойчива, т.е. не обладает свойством непрерывной зависимости от начальных данных, она нашла широкое применение в приложениях, например, см. [3, 8 – 10]. Запишем этот важный вариант отдельно

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_i \rho_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_i \rho_i u_i)}{\partial x} &= J_{1i} + J_{2i}, \\ \frac{\partial(\alpha_i \rho_i u_i)}{\partial t} + \frac{\partial \left[ \alpha_i (P + \rho_i u_i^2) \right]}{\partial x} - P \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} &= M_{1i} + M_{2i}, \\ \frac{\partial(\alpha_i \rho_i e_i)}{\partial t} + \frac{\partial \left[ \alpha_i u_i (P + \rho_i e_i) \right]}{\partial x} + P \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} &= E_{1i} + E_{2i}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $e_i = u_i^2/2 + \varepsilon_i$ ,  $\varepsilon_i = \varepsilon_i(\rho_i, P)$ . Система (6) состоит из шести уравнений, также имеется шесть неизвестных функций  $\rho_1, \rho_2, u_1, u_2, P$  и  $\alpha_1$ .

Как уже говорилось, (6) не является эволюционной системой. Вывод этого факта можно найти, например, в [3, Appendix 1] и [11]. В этих же работах изложен в некотором смысле наиболее естественный и простой (помимо учета вязких сил) рецепт регуляризации системы (6) с помощью учета сил поверхностного натяжения. В этом случае рассматриваемая система становится эволюционной и выглядит так

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_i \rho_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_i \rho_i u_i)}{\partial x} &= J_{1i} + J_{2i}, \quad P_2 - P_1 = \sigma \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial(\alpha_i \rho_i u_i)}{\partial t} + \frac{\partial[\alpha_i (P_i + \rho_i u_i^2)]}{\partial x} - P_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} &= M_{1i} + M_{2i}, \\ \frac{\partial(\alpha_i \rho_i e_i)}{\partial t} + \frac{\partial[\alpha_i u_i (P_i + \rho_i e_i)]}{\partial x} + P_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} &= E_{1i} + E_{2i}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $e_i = u_i^2/2 + \varepsilon_i$ ,  $\varepsilon_i = \varepsilon_i(\rho_i, P)$ .

Возможна также регуляризация, которая основана на учете неравновесных эффектов и записывается в следующей форме  $P_2 - P_1 = \theta(\alpha_1)$  [2]. В работах [12, 13] также применялась регуляризация типа  $P_2 - P_1 = C_P \cdot \rho_2 (u_2 - u_1)^2 \partial \alpha_2 / \partial x$ , где  $C_P$  – некоторая постоянная величина.

Иногда (см., например, [14]) используется упрощенный вариант системы (6), включающий только уравнения сохранения массы и импульса в каждой фазе. Этот вариант основан на том соображении, что, вообще говоря, для гладких решений уравнения сохранения энергии в фазах могут быть заменены на уравнения переноса энтропии, то есть могут в некоторых ситуациях рассматриваться как пассивный перенос вдоль некоторого поля скоростей.

Таким образом, от системы (6) остается четыре уравнения, но и их подвергают дальнейшему упрощению с целью регуляризации, а также для того, чтобы не иметь дело с явной формой обменных членов в уравнении для импульса. Для этого возьмем из (6) только два уравнения неразрывности (для каждой фазы), а уравнения для сохранения импульсов заменим на следующие соотношения

$$\begin{aligned} P_1 = P_2 = P, \quad u_1 - u_2 &= \Phi(P, \alpha_1, u_1), \\ \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 u_1 + \alpha_2 \rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_2 \rho_2 u_2^2 + P)}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

В (8) третье нелинейное соотношение представляет собой некоторую, вообще говоря, эмпирически заданную функцию, описывающую расхождение скоростей фаз (в простых случаях ее можно вычислить и из теоретических соображений). Фактически, получается система из трех дифференциальных уравнений, которая оказывается гиперболической. Такая модель получила название модели «дрейфа по потоку» (drift-flux model). Существуют методы (см., например, [3, пункт 4.2] в целях ознакомления), позволяющие распространить эту конструкцию и на полную систему уравнений (6), получая четыре уравнения (выписывается еще уравнение для полной энергии) или пять уравнений (к уже указанным уравнениям добавляется уравнение переноса для интерфейса), см. [15, 16].

Относительно недавно получила достаточно широкое распространение модель течения двухфазной среды, состоящая из семи уравнений [17]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \hat{V} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial (\alpha_i \rho_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_i \rho_i u_i)}{\partial x} = J_{1i} + J_{2i}, \\ \frac{\partial (\alpha_i \rho_i u_i)}{\partial t} + \frac{\partial [\alpha_i (P_i + \rho_i u_i^2)]}{\partial x} - \hat{P} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} &= M_{1i} + M_{2i}, \\ \frac{\partial (\alpha_i \rho_i e_i)}{\partial t} + \frac{\partial [\alpha_i u_i (P_i + \rho_i e_i)]}{\partial x} - \hat{P} \hat{V} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} &= E_{1i} + E_{2i}, \end{aligned} \quad (9)$$

$e_i = u_i^2/2 + \varepsilon_i$ ,  $\varepsilon_i = \varepsilon_i(\rho_i, P)$ . Здесь величины  $\hat{P}, \hat{V}$  представляют собой эффективное давление на межфазной границе и эффективную скорость межфазной границы соответственно. Выбор этих величин, как функций от кинематических и термодинамических параметров фаз, должен, вообще говоря, определяться физикой задачи. Наиболее распространенным выбором являются следующие усредняющие функции  $\hat{V} = (\alpha_1 \rho_1 u_1 + \alpha_2 \rho_2 u_2) / (\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2)$ ,  $\hat{P} = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$ . (Также иногда используются следующие выражения  $\hat{P} = 0$ ,  $\hat{P} = P_1 + \theta(\alpha_1)$ ,  $\hat{V} = V_1$ ,  $\hat{V} = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ ).

Эта же система уравнений может быть записана в виде

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

где  $\vec{U} = (\alpha_1, \rho_1, u_1, P_1, \rho_2, u_2, P_2)^T$ ,

$$A = \begin{pmatrix} \hat{V} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho_1}{\alpha_1}(u_1 - \hat{V}) & u_1 & \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{P_1 - \hat{P}}{\alpha_1 \rho_1} & 0 & u_1 & 1/\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho_1 \hat{c}_1^2}{\alpha_1}(u_1 - \hat{V}) & 0 & \rho_1 c_1^2 & u_1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho_2}{\alpha_2}(\hat{V} - u_2) & 0 & 0 & 0 & u_2 & \rho_2 & 0 \\ \frac{\hat{P} - P_2}{\alpha_2 \rho_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 & 1/\rho_2 \\ \frac{\rho_2 \hat{c}_2^2}{\alpha_2}(\hat{V} - u_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_2 c_2^2 & u_2 \end{pmatrix},$$

$$c_i^2 = \frac{P_i}{\rho_i^2} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial P_i}, \quad \hat{c}_i^2 = \frac{\hat{P}}{\rho_i^2} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial P_i}.$$

Система (10) представляет собой квазилинейную систему уравнений первого порядка. У матрицы  $A$  есть 7 собственных чисел

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \lambda_i = \hat{V}, \\ \lambda^2 &= \lambda_1^- = u_1 - c_1, \quad \lambda^3 = \lambda_1^0 = u_1, \quad \lambda^4 = \lambda_1^+ = u_1 + c_1, \\ \lambda^5 &= \lambda_2^- = u_2 - c_2, \quad \lambda^6 = \lambda_2^0 = u_2, \quad \lambda^7 = \lambda_2^+ = u_2 + c_2. \end{aligned}$$

и 7 соответствующих левых собственных векторов:

$$\begin{aligned} \varphi^1(\vec{U}) &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ \varphi^2(\vec{U}) &= \left( \frac{\rho_1 \hat{c}_1^2 (u_1 - \hat{V}) - c_1 (P_1 - \hat{P})}{\alpha_1 (\hat{V} - u_1 + c_1)}, 0, \rho_1 c_1, -1, 0, 0, 0 \right), \\ \varphi^3(\vec{U}) &= \left( \frac{\rho_1 (c_1^2 - \hat{c}_1^2)}{\alpha_1}, c_1^2, 0, -1, 0, 0, 0 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi^4(\vec{U}) &= \left( \frac{-\rho_1 \hat{c}_1^2 (u_1 - \hat{V}) - c_1 (P_1 - \hat{P})}{\alpha_1 (\hat{V} - u_1 - c_1)}, 0, \rho_1 c_1, 1, 0, 0, 0 \right), \\ \varphi^5(\vec{U}) &= \left( \frac{\rho_2 \hat{c}_2^2 (\hat{V} - u_2) + c_2 (P_2 - \hat{P})}{\alpha_2 (\hat{V} - u_2 + c_2)}, 0, 0, 0, 0, \rho_2 c_2, -1 \right), \\ \varphi^6(\vec{U}) &= \left( \frac{\rho_2 (\hat{c}_2^2 - c_2^2)}{\alpha_2}, 0, 0, 0, c_2^2, 0, -1 \right), \\ \varphi^7(\vec{U}) &= \left( \frac{\rho_2 \hat{c}_2^2 (u_2 - \hat{V}) + c_2 (P_2 - \hat{P})}{\alpha_2 (\hat{V} - u_2 - c_2)}, 0, 0, 0, 0, \rho_2 c_2, 1 \right).\end{aligned}$$

Вдоль характеристики, соответствующей собственному значению  $\lambda^k$  сохраняется инвариант  $\varphi^k \cdot \vec{U}$ . Этот факт естественным образом учитывается при построении разностных схем.

Преимущество системы (9) состоит в том, что она является гиперболической при любом значении параметров, то есть при ее решении можно использовать хорошо развитые методы численного решения гиперболических систем уравнений.

ЗАМЕЧАНИЕ: Аналогичную систему из семи дифференциальных уравнений, наряду с классической системой из шести уравнений, используют и в проекте «НЕПТУН».

Приведем здесь также один из уже упоминавшихся вариантов модели «дрейфа по потоку» (drift-flux model) [15, 16]. Этот вариант содержит пять уравнений, и его можно рассматривать как упрощенную версию (9)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \hat{V} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial (\alpha_1 \rho_1)}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_1 \rho_1 u_1)}{\partial x} &= J_{21} \\ \frac{\partial (\alpha_2 \rho_2)}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_2 \rho_2 u_2)}{\partial x} &= -J_{21} \\ \frac{\partial (\alpha_1 \rho_1 u_1 + \alpha_2 \rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial [\hat{P} + \alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_2 \rho_2 u_2^2]}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial (\alpha_1 \rho_1 e_1 + \alpha_2 \rho_2 e_2)}{\partial t} + \frac{\partial [\alpha_1 u_1 P_1 + \alpha_2 u_2 P_2 + \alpha_1 u_1 \rho_1 e_1 + \alpha_2 u_2 \rho_2 e_2]}{\partial x} &= 0 \\ e_i &= \frac{u_i^2}{2} + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i = \varepsilon_i(\rho_i, P_i)\end{aligned} \quad (11)$$

Систему (11) еще необходимо дополнить выражением для общей скорости и суммарной энергии. Это можно сделать разными способами, опираясь на конкретную физическую ситуацию.

### §3. О распространении разрывов

Практически все более или менее общие системы уравнений многофазного континуума содержат недивергентные члены. Общеизвестно, что при использовании в этом случае численных методов скорость распространения разрывов (если таковые возникают) может зависеть от используемого численного метода (в отличие от уравнений гидродинамики, которые имеют дивергентную форму). Правильная скорость распространения разрыва должна определяться происходящими физическими процессами. Придать соответствующую математическую форму (т.е. получить правила для распространения разрыва типа соотношений Ренкина-Гюгонио) результатам этих процессов, чтобы на ее основе сконструировать корректную разностную схему, является, как правило, непростой задачей.

Чтобы получить некоторое представление о формировании движения разрыва в двухфазной среде рассмотрим в методических целях следующий мысленный эксперимент, приведенный в [17], см. Рис. 1.

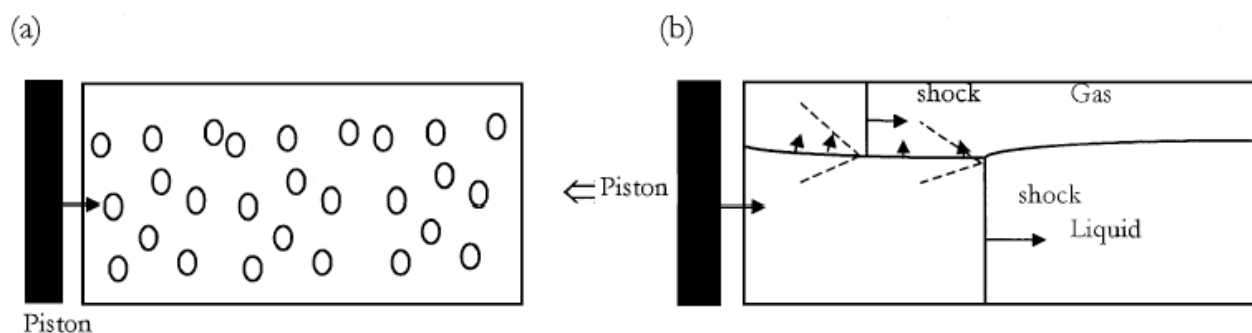


Рис 1. Мысленный эксперимент образования ударной волны в двухфазной среде.

В двухфазную среду, состоящую из несущей газовой фазы, в которой находится множество капель жидкой фазы (сила тяжести не учитывается), вдвигается поршень (Рис. 1, (a)). Жидкая фаза предполагается сжимаемой. Тогда в окрестности каждой капли, через которую проходит область резкого роста давления, на очень коротких временных масштабах происходит процесс, схематически изображенный на Рис. 1 (b) (Поясним дополнительно, что на Рис.1 (b) схематически изображен процесс, протекающий в малой окрестности каждой капли, а не во всем сосуде.). И в газе, и в жидкости будет распространяться ударная волна в соответствии с законами однофазной гидродинамики, т.е. подчиняющаяся соответствующим соотношениям Ренкина-Гюгонио. При этом скорость ударной волны в жидкости будет существенно



больше соответствующей скорости в газовой фазе. Конфигурация, изображенная на Рис. 1 (b) будет неустойчивой, так как линия раздела газ-жидкость окажется неустойчивой из-за разности давлений. То есть начнутся уравнивающие процессы в направлении, перпендикулярном направлению распространения ударной волны (на рисунке они изображены пунктиром). В результате должна возникнуть некоторая ударная волна со своей специфической скоростью, законы распространения которой будут существенно отличаться от соответствующих законов и в жидкости, и в газе.

Существуют математические подходы для формулировки законов распространения ударных волн, описываемых недивергентными системами законов сохранения, см., например, [18]. Однако, все подобные подходы требуют привлечения некоторой дополнительной информации.

Одно из преимуществ модели (9) также состоит в том, что две параметрические функции  $\hat{P}, \hat{V}$  можно пытаться выбрать так, чтобы в определенных физических ситуациях их разрывы и возможные разрывы в  $\alpha_i$  не совпадали. Тогда недивергентный член в (9) определен корректно, см., например, [19].

Часто недивергентные члены рассматриваются просто как правая часть и аппроксимируются соответственно, так сделано, например, в [20].

#### §4. Описание межфазных взаимодействий

При квазиодномерном моделировании двухфазных потоков приходится использовать понятие «режима», поскольку при изменении скоростей движения фаз, содержания одной фазы по отношению к другой и т.п. в реальной трехмерной ситуации (которая очень сложна) может происходить существенное изменение характера потока, что требует резкого изменения зависимостей и параметров одномерной модели – переход в другой «режим». Классификация двухфазных потоков при разработке некоторых нефтегазовых месторождений в Северном море приведена, например, в [21]. Классификация двухфазных потоков при математическом моделировании паро-жидкостных течений приведена [22].

Если посмотреть другую литературу, например [23, 8, 9], то можно отметить, что фактически единой классификации не существует. Все зависит от того, в какой области применяется двухфазный поток и какие цели преследуются. В имеющейся литературе комментарии по вопросу о связи топологии потока и соответствующего режима, как правило, не содержат точных количественных оценок. Получаемая в этом отношении информация и коэффициенты опираются на экспериментальный материал. Однако, можно отметить некоторую общую форму сил, описывающих межфазный обмен. Приведем наиболее характерные вещи. Напомним, что мы будем рассматривать двухфазную смесь. Также мы не будем рассматривать эффекты, связанные с вязкостью, о чем уже упоминалось вначале, и внешние силы, типа трения о

стенки канала и тяжести. Включение в рассмотрение внешних сил не представляет сложностей.

Величина  $J_{12}$ , отвечающая за обмен массой при фазовых переходах, выбирается, исходя из законов испарения/конденсации и в соответствии с принципами термодинамики (пример такого выбора можно найти, например, в [3], [23]).

Величина  $M_{12}$ , отвечающая за перенос момента, состоит из нескольких слагаемых (часть из которых появляется из-за требования моделирования одномерными уравнениями трехмерных эффектов)  $M_{12} = \hat{u}J_{12} + M_f + M_v + M_l$ . Здесь первый член представляет собой перенос момента, связанный с переносом массы,  $M_f$  – сила межфазного трения (frictional drag),  $M_v$  – сила, связанная с воздействием так называемых «присоединенных масс» (virtual mass force),  $M_l$  – сила типа Магнуса или Жуковского (lift force).

Скорость  $\hat{u}$  часто вычисляют по формуле  $\hat{u} = (u_1 + u_2)/2$ . Этот выбор не диктуется каким-либо физическим принципом, но удобством, проистекающим из того факта, что в этом случае

$$\sum_{i=1,2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \alpha_i \rho_i u_i^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} u_i \alpha_i \rho_i u_i^2 \right) + u_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x} P \right] = 0. \quad (12)$$

То есть для кинетической энергии выполняется такое же соотношение, как при  $J_{12} = 0$  (все остальные силы при выводе (12) считаются равными нулю).

Сила трения  $M_f$  как правило имеет вид  $M_f = \lambda(u_1 - u_2)$ , для коэффициента  $\lambda$  используются различные выражения. Например, в [8, 23]  $\lambda = C_{drag} \cdot |u_1 - u_2|$ , причем коэффициент  $C_{drag}$  зависит сложным образом от  $\alpha_1, \rho_1, \rho_2$  и геометрии трубопровода. Также выражение для этого коэффициента меняется при переходе с режима на режим. В [12] взято  $\lambda = \mu \alpha_1 \alpha_2 \cdot \rho_2$ , т.е. этот коэффициент не зависит от модуля разности скоростей. В общем случае коэффициент  $\lambda$  может зависеть и от параметров вязких эффектов. Подобным образом можно моделировать и трение о стенки канала.

Подъемная сила  $M_l$  возникает, вообще говоря, только в трехмерных течениях, и ее общая форма выглядит так  $\vec{M}_l = C_{lift} \cdot (\vec{U}_1 - \vec{U}_2) \times \text{rot} \vec{U}_1$  (см. [2, 9]). При выводе одномерных моделей более точный учет поведения функций в направлениях, трансверсальных к основному направлению, вдоль которого и получается одномерное представление (см., например, [3]), может приводить к появлению членов типа  $\frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho_{1(2)} f(\alpha_1) \cdot (u_1 - u_2)^2 \right]$  с некоторой гладкой функцией  $f$ . Используемую в [3] процедуру можно интерпретировать как некоторый способ учесть подъемную силу. Далее, введение в одномерное

уравнение для момента следующей силы  $C_{lift} \cdot \left( u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} - \zeta u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)$  приводит к тому, что система уравнений (6) (из которой выкинуты уравнения для энергии, так что получается четыре уравнения) обладает теми же собственными числами, что и система (8), представляющая собой модель «дрейфа по потоку» (drift-flux model). Таким образом, возникает естественная регуляризация [14]. Этот факт предоставляет дополнительную мотивировку для введения сил типа подъемной силы. Следует отметить, что в одномерных моделях, используемых на практике, подъемная сила учитывается редко.

Выражения для  $M_v$ , силы, связанной с воздействием «присоединенных масс», рассмотрим отдельно ввиду важности этого механизма для описания дисперсных режимов течения, а также возможности влияния этой силы на регуляризацию основной системы уравнений (6).

### **Эффект присоединенных масс (virtual mass force)**

Часто вводится дополнительная сила, возникающая вследствие «ускоренного движения включения относительно несущей среды, когда в последней возникают возмущения на расстояниях порядка размера включений. Эти мелкомасштабные возмущения и приводят к дополнительной силе давления» [2]. Такая дополнительная сила становится особо заметной при дисперсных режимах, например, течение жидкости с включенными в нее газовыми пузырьками. В системе (5) этому эффекту соответствуют силы  $(V_f)_i$ , которые могут содержать и дифференциальные члены. Введение таких сил может также регуляризовать основную систему уравнений (6).

Наиболее систематическим способом введения таких сил является вариационный принцип, см., например, [5]. В этом подходе Лагранжиан  $L$  представляется в виде разности плотности кинетической энергии  $K$  и плотности свободной энергии  $F$ . При этом кинетическая энергия берется в виде

$$2K = \alpha_1 \rho_1 (u_1)^2 + \alpha_2 \rho_2 (u_2)^2 + \rho_2 m(\alpha_1) (u_1 - u_2)^2, \quad (13)$$

здесь имеется в виду, что  $\rho_2$  – это плотность жидкой фазы, а  $\rho_2 m(\alpha_1)$  – плотность виртуальной массы. При этом уравнения неразрывности для обеих фаз (см. первое уравнение в (5) для  $i=1,2$ ) представляют собой условия, при которых будет искаться экстремум соответствующего функционала действия, т.е.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{x_0}^{x_1} dx \cdot L = 0. \quad (14)$$

То есть, фактически, мы ищем условный экстремум и должны строить соответствующую функцию Лагранжа. Дальнейшие обобщения можно найти в [6].

Применяя (14), с использованием различных вариантов формулы (13), получают довольно сложные формулы для сил, связанных с присутствием эффекта виртуальной массы. При этом система (5) может менять тип, что может иметь эффект регуляризации. Исследование модели на корректность необходимо проводить в каждом конкретном случае.

В отчете [3] приведены следующие формы для таких сил в одномерной постановке:

а)

$$M_v = M_0 \left[ \frac{\partial}{\partial t}(u_1 - u_2) - (u_1 - u_2) \frac{\partial}{\partial x}(u_1 - u_2) \right],$$

$M_0$  – некоторая функция, общий вид которой не приводится;

б)

$$M_v = M_1 \left[ \frac{\partial}{\partial t}(u_1 - u_2) + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} - u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + (u_1 - u_2) \frac{\partial}{\partial x}(u_1 - u_2) \right],$$

где  $M_1 \sim 0.5 \cdot \alpha_1 \rho_2$  при малых  $\alpha$ ;

в)

$$M_v = \mu \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2) \left[ \frac{\partial}{\partial t}(u_1 - u_2) + u_1 \frac{\partial}{\partial x}(u_1 - u_2) \right],$$

где  $\mu = 1/2$ .

В практически используемых коммерческих кодах, например, [8, 9], приняты, например, следующие выражения для сил типа  $(V_f)_i$ , см. также [2, 23]:

$$M_v = C_{vm} \cdot \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2) \left[ \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right],$$

где  $C_{vm}$  – некоторая постоянная; в работе [14] используется следующее выражение

$$M_v = C_{vm} \cdot \alpha_1 \rho_2 \left\{ \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial t} + u_1 \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial x} + (u_1 - u_2) \left[ (\lambda - 2) \frac{\partial u_1}{\partial x} + (1 - \lambda) \frac{\partial u_2}{\partial x} \right] \right\},$$

где параметр  $\lambda$  выбирается дополнительно.

Как видно из приведенных формул, выражения для сил, связанных с «присоединенными массами», значительно отличаются друг от друга. Общим фактом является то, что в эту силу входят только производные скоростей, других дифференциальных выражений не входит. Конкретный вид формул сильно зависит от физической ситуации.

При наличии процессов испарения или конденсации правая часть в уравнениях для энергии в (5), (6) или (9) имеет вид  $E_{12} = E \cdot J_{12}$ , где  $E$  – скрытая теплота испарения/конденсации. Конкретный выбор вида величины  $J_{12}$  должен быть согласован с законом возрастания энтропии. Если присутствуют какие-либо диссипативные силы, например, силы трения, то в выражение для  $W_i$  добавляются соответствующие члены, которые отражает потерю суммарной энергии. При этом инвариантный характер носит лишь общая потеря энергии, распределение ее по членам  $W_1, W_2$  представляет собой некоторую проблему, требующую привлечение дополнительных соображений. Наличие теплопередачи добавляет в  $W_i$  члены вида  $C_{heat} \cdot (T_2 - T_1)$ .

## §5. О едином описании режимов

Как мы видели из предыдущих пунктов, многофазные потоки характеризуются множественностью режимов течения. Поэтому для описания течений таких сред используются модели, состоящие из разного количества уравнений и так называемые «карты режимов», которые определяют вид действующих сил в зависимости от параметров течения. Все это создает определенные неудобства и, что более существенно, ограничения при моделировании многофазных потоков как с точки зрения физики, так и точки зрения устойчивости вычислений. Поэтому в последние годы усилилась активность по разработке единого подхода к моделированию и «автоматического» переключения режимов.

В настоящее время считается, что появление различных режимов связано с изменением так сказать «топологии» потока. Иными словами, характер движения среды зависит от структуры и величины межфазной поверхности, через которую происходят межфазные взаимодействия, определяющие реализовавшийся режим. Структура и величина межфазной поверхности тоже в некотором роде взаимосвязаны, если не учитывать довольно тонкие, действительно топологические, эффекты. То есть, например, при стратифицированном режиме течения площадь поверхности раздела будет, вообще говоря, меньше, чем при развитом пузырьковом режиме.

Поэтому при попытке единообразного моделирования режимов к основной системе, например, (6) добавлялось еще уравнение для средней площади межфазной поверхности  $A$  в форме уравнения типа закона сохранения для масс

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A u_i}{\partial x} + \frac{\partial A v_i}{\partial y} + \frac{\partial A w_i}{\partial z} = \Phi, \quad (15)$$

где  $\Phi$  – источниковый или стоковый член, зависящий, вообще говоря, нелинейно от неизвестных функций, для справки см., например, [7, 23]. Величина  $A$  входит в правые части уравнений (6) и, таким образом, может влиять на формирование того или иного режима.

Однако такого подхода оказалось недостаточно. В работе [24] для единообразного описания режимов предложено считать, что в системе жидкость-пар имеется не две фазы, а четыре. А именно: непрерывная жидкая ( $\alpha_{cl}$ ), дисперсная жидкая ( $\alpha_{dl}$ ), непрерывная паровая ( $\alpha_{cv}$ ), дисперсная паровая ( $\alpha_{dv}$ ).

В работе [25] выписывается аналогичное уравнение для площади межфазной поверхности  $A$ . Также там приведено феноменологическое представление для функции  $\Phi$ . Это выражение достаточно сложно и содержит даже дифференциальные члены, так что понять из каких теоретических или экспериментальных соображений оно получено представляется затруднительным.

Описанный подход позволяет взглянуть на «разнорежимные» течения как-то единообразно, но возникают дополнительные осложнения – каким образом описывать межфазный обмен между «псевдофазами»? С общей точки зрения для этого придется пользоваться более точными теоретическими формулами (для разных частных течений) и более точными экспериментальными данными, получить которые представляется не всегда возможным. И эта трудность будет возникать при создании любых моделей подобного рода.

В связи с изложенным выше возникла потребность в разработке какого-то в некотором смысле принципиально другого подхода. И такой подход возник – это так называемое «прямое моделирование» (Direct Numerical Simulation – DNS) или «моделирование из первых принципов», к краткому описанию которого мы сейчас переходим.

### **Прямое моделирование двухфазной среды**

Вначале заметим, что в основе нашего представления о многофазном континууме лежит общая, достаточно простая, модель: многофазная среда рассматривается как объединение объемов, занятых разными фазами и разделенных межфазными границами, на которых действуют известные силы подобные тем, что возникают, например, на поверхности пузырьков (например, поверхностное натяжение). Трудность состоит в том, что для расчета течения в такой постановке требуется очень много памяти и машинного времени. Поэтому приходится вводить всевозможные усреднения в зависимости от конкретных физических ситуаций, которые и приводят к множественности моделей.

Однако, в последние годы в связи с бурным развитием многопроцессорных систем и методов параллельных вычислений появилась возможность приблизиться к решению этой задачи, в частности, к проблеме автоматического учета перехода течения с режима на режим. Это достигается путем перехода к «прямому моделированию» (DNS) или так называемому расчету «из первых принципов».

В работах [26, 27] рассматривается среда, состоящая из двух несжимаемых фаз, которые разделены интерфейсом (т.е. фактически рассматривается исходная модель двухфазной среды до усреднения). При этом считается, что для обеих фаз справедлива трехмерная система уравнений типа Навье-Стокса, параметры которой, например, плотность и коэффициенты вязкости, претерпевают резкое изменение при переходе из области, занятой одной фазой, в область, занятую другой фазой. Далее, можно просто аккуратно следить за межфазной границей и действующими на ней силами, как это сделано в [26]. Однако более перспективным представляется другой подход, реализованный в [27]. В этой работе поверхность раздела фаз определяется с помощью дополнительного уравнения на вспомогательную функцию  $\phi$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0. \quad (16)$$

Если функция  $\phi$  найдена, то поверхность раздела фаз определяется как линия уровня функции  $\phi$ , т.е. из уравнения  $\phi(t, x, y, z) = 0$  при фиксированном  $t$ . Далее, поверхностные силы моделируются как правые части в системе Навье-Стокса. А именно, в правую часть вводится член вида  $k \cdot \nabla H_\varepsilon(\phi)$ , где  $H_\varepsilon(\cdot)$  – это сглаженная функция Хевисайда (ступенька) с параметром  $\varepsilon$ , а  $k$  – некоторое, вообще говоря, сложное выражение, могущее содержать и производные, которое отражает действие поверхностных сил (например, так называемые силы Марангони). В случае обычных сил поверхностного натяжения коэффициент  $k$  выглядит так  $k = \nabla_s \cdot \nabla \phi / |\nabla \phi|$ , где  $\nabla_s$  – это дифференцирование вдоль межфазной поверхности. Заметим, что так введенные силы отличны от нуля только в окрестности межфазных границ, которые эволюционируют в соответствии с (16). В результате такого представления мы получаем односкоростную модель двухфазной среды (условия на межфазной границе вобраны в уравнение (16) и представление для поверхностных сил) с минимумом дополнительных предположений. За это мы «заплатили» достаточно сложной правой частью и необходимость решать задачу на очень мелкой сетке, такой мелкой, чтобы в дальнейшем можно было при необходимости проводить операцию усреднения.

Поясним последнюю фразу подробнее. Выше мы привели фактически способ расчета движения двухфазной среды, основываясь на базовой общей модели двухфазного континуума, не прибегая к операции усреднения для

получения более простой модели. Естественно такой подход требует гораздо больше вычислительных ресурсов, однако наличие к настоящему моменту многопроцессорных вычислительных систем и методологии параллельного программирования сделало такие ресурсы доступными. Заметим также, что при выводе упрощенных одномерных моделей, которые однако широко используются на практике, нам была необходима некоторая информация о истинном поведении функций, которые затем подвергались усреднению (см. предыдущие пункты). Мы брали такую информацию либо из эксперимента, либо как предположение. С помощью расчетов по описанной выше методологии можно такую информацию получать численно и обрабатывать ее так, как необходимо. Отсюда получается новый способ получения корреляций, используемых в одномерных моделях. Теоретический пример такого получения корреляций приведен в [28].

Идеология подобного типа приведена в [29] уже и для сжимаемых сред. Там же поставлена цель получения при помощи этой идеологии корреляций для модели «псевдофаз», см. рис. 5. Однако подробности моделирования в [29] опущены, приведена только общая схема без специфики сжимаемого случая и полученные результаты.

Для сжимаемых сред некоторый подход, позволяющий рассчитывать многофазные течения из первых принципов, суммирован в [30]. Рассмотрения в этой работе основаны на принципах неравновесной термодинамики, см., например, [31]. Суть подхода состоит в том, что межфазная граница изначально рассматривается не как поверхность, а как зона некоторой протяженности (причем при приближении термодинамических параметров к критическим протяженность этой зоны стремится к бесконечности). То есть переход от одной фазы к другой характеризуется быстрым, но все же непрерывным, изменением какого-либо «параметра порядка». В [30] таким параметром порядка выступает плотность среды. Из некоторых феноменологических соображений энтропия системы выражается не только, например, через плотность и внутреннюю энергию, но еще и через градиент плотности (возможны также операторы более высокого порядка). Это вносит изменения в уравнение состояния и в реологию смеси. Далее, рассматриваются обычные уравнения сохранения массы, импульса и энергии (сжимаемый Навье-Стокс) с этими дополнительными соотношениями (например, в тензор напряжений входят слагаемые, являющиеся квадратичной формой компонент градиента плотности). Оказывается, что такая система уравнений автоматически моделирует поверхностные силы в зонах резкого изменения плотности смеси, т.е. в зонах, которые мы раньше идентифицировали бы как межфазные границы.

Пока с помощью описанных выше подходов моделируются довольно простые ситуации: движение капель/пузырьков в среде и по поверхностям, их столкновения, слияние и разрыв; двухфазное и трехфазное обтекание тел простой геометрии, падение капель и струй в поле сил тяжести и т.п. Расчет



такого типа «простых» течений на основе метода прямого моделирования реализован, например, в французском проекте программного комплекса нового поколения «НЕПТУН» (по материалам Интернета).

На рис. 2 представлен взятый из [36] (форму одномерных уравнений и вид источниковых членов, упомянутых в пункте 3, можно также найти в этой статье) пример DNS расчета слияния двух пузырей. Подобные расчёты позволяют верифицировать и откалибровать модели межфазного взаимодействия (включая силы смачивания и поверхностного натяжения) перед переходом к расчёту более сложных течений.

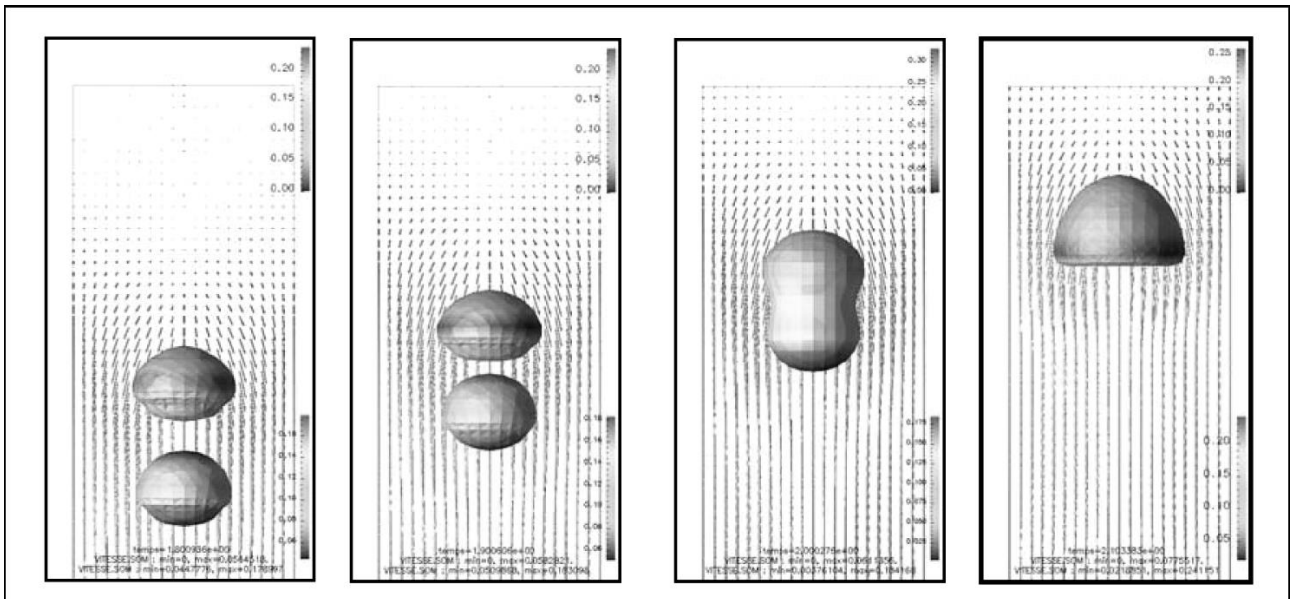


Рис. 2. Пример DNS расчета слияния пузырей из материалов проекта НЕПТУН.

## §6. Односкоростная двумерная модель двухфазной среды

Изложенные выше факты показывают, что при возникновении необходимости рассчитывать все более сложные процессы требования к аккуратности модели многофазных сред возрастают. Поэтому повышаются требования к точности и универсальности используемых моделей.

Здесь мы предлагаем модель двухфазной среды для расчета движений двухфазных потоков, построенную «из первых принципов». То есть метод расчета, использующий только базовые принципы построения математических моделей и минимум предположений. В качестве «базовых принципов» мы берем законы сохранения массы, импульса и энергии, которые должны выполняться для любых материальных объектов. Допущения же касаются перечня процессов, которые учитываются при моделировании, и замыкающих уравнений состояния.

Платой за фундаментальность и универсализм является большой порог, относящийся к минимальной мощности потребных вычислительных ресурсов.

В настоящее время нет вычислительных комплексов, которые позволили бы смоделировать содержательную трехмерную задачу в целом.

Поэтому здесь мы предлагаем двумерную модель, которая позволит, с одной стороны, отработать составные части модели и вычислительные технологии, а, с другой стороны, исследовать свойства подхода на более простых двумерных задачах.

Необходимо отметить, что прямое численное моделирование имеет своей целью не только самостоятельный расчет конкретного процесса (это цель, может быть, не очень далекого, но будущего), но и численный анализ свойств различных типовых течений с целью подбора коэффициентов в более простых, но более быстрых моделях.

Итак, мы рассматриваем двумерный континуум, в каждой точке которого имеется определенная плотность, определенная скорость и определенная энергия. Движение этого континуума подчиняется законам сохранения массы, импульса и энергии. Для простоты мы запишем их в виде двумерных уравнений Эйлера, к которым добавлен учет теплопроводности:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (P + \rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho uv)}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial (\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial (P + \rho v^2)}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial [u(P + \rho e)]}{\partial x} + \frac{\partial [v(P + \rho e)]}{\partial y} &= \nabla \cdot \kappa \nabla T \\
 e &= \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \varepsilon
 \end{aligned} \tag{17}$$

Слагаемые, учитывающие другие диссипативные процессы, планируется добавить позже.

Система уравнений (17) должна быть дополнена функциями  $P(\rho, \varepsilon)$  и  $T(\rho, \varepsilon)$ , которые зависят от рассматриваемой среды.

Введя обозначения

$$I \equiv \rho u, \quad J \equiv \rho v, \quad E \equiv \rho e,$$

перепишем гиперболическую часть системы (17) для консервативных переменных:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial J}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{P} + I^2/\rho)}{\partial x} + \frac{\partial(I \cdot J/\rho)}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial(I \cdot J/\rho)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{P} + J^2/\rho)}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial[I(\bar{P} + E)/\rho]}{\partial x} + \frac{\partial[J(\bar{P} + E)/\rho]}{\partial y} &= 0
\end{aligned} \tag{18}$$

где  $\bar{P}(\rho, E, I, J)$  определяется формулой

$$\bar{P}(\rho, E, I, J) = P\left(\rho, \frac{E}{\rho} - \frac{1}{2\rho^2}(I^2 + J^2)\right). \tag{19}$$

Приведем некоторые формулы, которые потребуются для конструирования численного алгоритма интегрирования законов сохранения.

Введем векторы

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ I \\ J \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} I \\ \bar{P} + I^2/\rho \\ I \cdot J/\rho \\ I(\bar{P} + E)/\rho \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} J \\ I \cdot J/\rho \\ \bar{P} + J^2/\rho \\ J(\bar{P} + E)/\rho \end{pmatrix},$$

перепишем систему (18) в компактной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = \mathbf{Q}(x, y, t, \mathbf{U}), \tag{20}$$

где  $\mathbf{Q}$  — вектор правых частей, который может меняться от задачи к задаче.

Матрица

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \bar{P}_\rho - \frac{I^2}{\rho^2} & \bar{P}_I + 2\frac{I}{\rho} & \bar{P}_J & \bar{P}_E \\ -\frac{I \cdot J}{\rho^2} & \frac{J}{\rho} & \frac{I}{\rho} & 0 \\ -\frac{I}{\rho^2}(\bar{P} + E) + \frac{I}{\rho}\bar{P}_\rho & \frac{1}{\rho}(\bar{P} + E) + \frac{I}{\rho}\bar{P}_I & \frac{I}{\rho}\bar{P}_J & \frac{I}{\rho}(\bar{P}_E + 1) \end{pmatrix}$$

имеет собственные числа  $\lambda_1 = u - c$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = u$ ,  $\lambda_4 = u + c$ , где  $c$  — это скорость звука,

$$c^2 = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{S=\text{const}} = \frac{\partial P(\rho, \varepsilon)}{\partial \rho} + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial P(\rho, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}.$$

Левые собственные векторы выражаются следующим образом:

$$l_{1,x} = \left( u^2 + v^2 + \frac{c \cdot (u + c)}{\bar{P}_E} - \frac{\bar{P} + E}{\rho}; -\left(u + \frac{c}{\bar{P}_E}\right); \frac{\bar{P}_J}{\bar{P}_E}; 1 \right),$$

$$l_{2,x} = (-v; 0; 1; 0), \quad l_{3,x} = \left( u^2 - \frac{\bar{P} + E}{\rho}; -u; 0; 1 \right),$$

$$l_{4,x} = \left( u^2 + v^2 - \frac{c \cdot (u - c)}{\bar{P}_E} - \frac{\bar{P} + E}{\rho}; \frac{c}{\bar{P}_E} - u; \frac{\bar{P}_J}{\bar{P}_E}; 1 \right).$$

Матрица

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{I \cdot J}{\rho^2} & \frac{J}{\rho} & \frac{I}{\rho} & 0 \\ \bar{P}_\rho - \frac{J^2}{\rho^2} & \bar{P}_I & \bar{P}_J + 2\frac{J}{\rho} & \bar{P}_E \\ -\frac{J}{\rho^2}(\bar{P} + E) + \frac{J}{\rho}\bar{P}_\rho & \frac{J}{\rho}\bar{P}_I & \frac{1}{\rho}(\bar{P} + E) + \frac{J}{\rho}\bar{P}_J & \frac{J}{\rho}(\bar{P}_E + 1) \end{pmatrix}$$

имеет собственные числа  $\lambda_1 = v - c$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = v$ ,  $\lambda_4 = v + c$  и собственные векторы

$$l_{1,y} = \left( u^2 + v^2 + \frac{c \cdot (v+c)}{\bar{P}_E} - \frac{\bar{P}+E}{\rho}; \frac{\bar{P}_I}{\bar{P}_E}; -\left( v + \frac{c}{\bar{P}_E} \right); 1 \right),$$

$$l_{2,y} = (-u; 1; 0; 0), \quad l_{3,y} = \left( v^2 - \frac{\bar{P}+E}{\rho}; 0; -v; 1 \right),$$

$$l_{4,y} = \left( u^2 + v^2 - \frac{c \cdot (v-c)}{\bar{P}_E} - \frac{\bar{P}+E}{\rho}; \frac{\bar{P}_I}{\bar{P}_E}; \frac{c}{\bar{P}_E} - v; 1 \right).$$

## §7. Замкнутая модель двухфазного континуума для уравнения состояния типа Ван-дер-Ваальса

Для тестирования предложенной в предыдущем параграфе модели двухфазной среды возьмем в качестве уравнения состояния уравнение Ван-дер-Ваальса:

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}, \quad (21)$$

где  $P$  – давление,  $V$  – удельный объем,  $T$  – температура,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $a, b$  – некоторые константы, характеризующие действие межмолекулярных сил. При заданных  $P$  и  $T$  удельный объем  $V$  и плотность  $\rho(P, T) = 1/V$  находятся из кубического уравнения:

$$V^3 - \left( b + \frac{RT}{P} \right) V^2 + \frac{a}{P} V - \frac{ab}{P} = 0. \quad (22)$$

Левый и правый корни этого уравнения соответствуют жидкой и паровой фазам соответственно.

Из известного термодинамического соотношения  $T \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial V} + P$  получим выражение для внутренней энергии  $\varepsilon = \int C_V(T) dT - \frac{a}{V}$ , где  $C_V(T)$  – вообще говоря, переменная теплоемкость при постоянном объеме. Примем теплоемкость за постоянную величину  $C_V$ . Тогда при известной величине  $V(P, T)$  получаем  $\varepsilon(P, T) = C_V T - \frac{a}{V}$  для жидкой и паровой фаз. Таким образом, функции  $\rho(P, T)$  и  $\varepsilon(P, T)$  определены. Но для интегрирования по времени уравнений (17) нужны обратные функции,  $P(\rho, \varepsilon)$  и  $T(\rho, \varepsilon)$ .

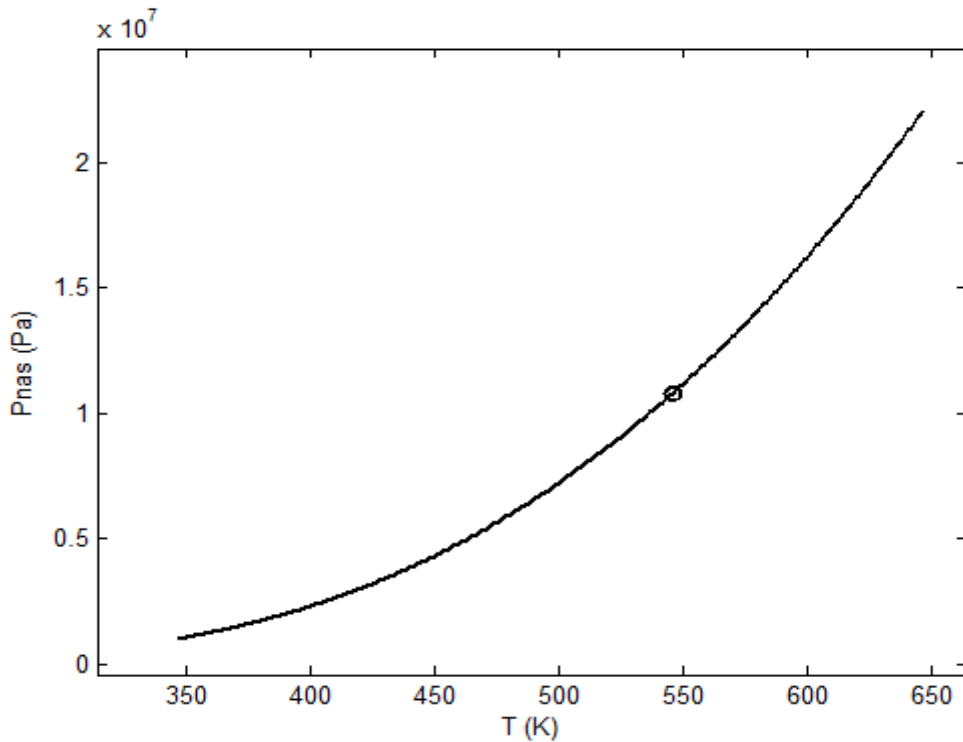


Рис. 3. Кривая насыщения в плоскости  $(P, T)$ .

Фазовый переход осуществляется в точке равенства химических потенциалов фаз, которая определяется соотношением

$$\left[ RT \ln(V - b) + \frac{a}{V} - PV \right]_{V_1}^{V_2} = 0, \quad (23)$$

где  $V_1$  и  $V_2$  — наибольший и наименьший корни уравнения (22) соответственно. Так как корни  $V_1$  и  $V_2$  являются функциями  $P$  и  $T$ , то уравнение (23) неявно задаёт кривую зависимости давления насыщения  $P_{\text{насыщ}}(T)$  в плоскости  $(P, T)$ . Для воды эта кривая изображена на рис. 3. В плоскости  $(\varepsilon, V)$  ей соответствуют две кривые, соответствующие левому и правому корням уравнения (см. рис. 4), которые соответствуют жидкой и паровой фазе:

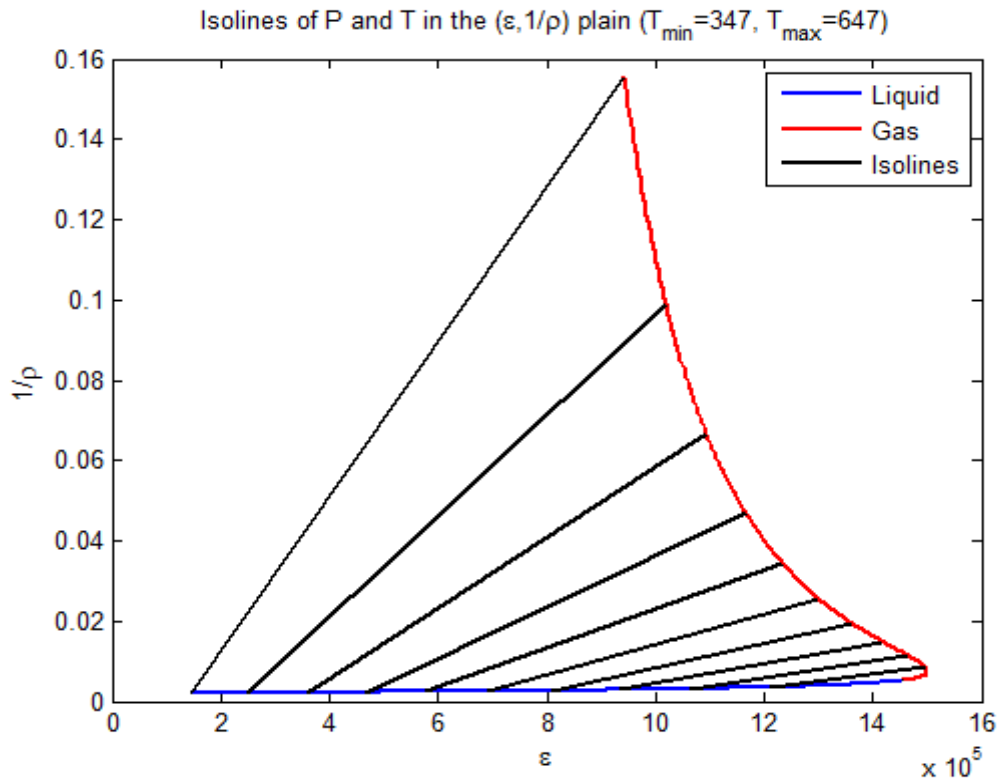


Рис. 4. Изолинии давления и температуры (черные) и линии насыщения в жидкости (синяя) и в газе (красная).

Прямые линии на рис. 4 соединяют точки на кривых фазового равновесия в жидкой и паровой фазах, соответствующие одинаковым значениям давления и температуры.

Определим функции  $P(\rho, \varepsilon)$  и  $T(\rho, \varepsilon)$  следующим образом.

Если точка  $(1/\rho, \varepsilon)$  лежит вне заштрихованной области на рис. 8 (точка чистой фазы), то  $P(\rho, \varepsilon)$  и  $T(\rho, \varepsilon)$  определяются как обратные к функциям  $\rho(P, T)$  и  $\varepsilon(P, T)$  для соответствующей фазы:

$$T(\varepsilon, \rho) = \frac{1}{c_v}(\varepsilon + a\rho), \quad P(\varepsilon, \rho) = \frac{\rho RT(\varepsilon, \rho)}{1 - \rho b} - a\rho^2.$$

А если точка  $(1/\rho, \varepsilon)$  лежит внутри заштрихованной зоны, то  $P(\rho, \varepsilon)$  и  $T(\rho, \varepsilon)$  подбираются так, чтобы прямая, проходящая через точки  $(V_1(P, T), \varepsilon_1(P, T))$  и  $(V_2(P, T), \varepsilon_2(P, T))$ , проходила через точку  $(1/\rho, \varepsilon)$ .

Таким образом, замкнутая модель для односкоростного двухфазного континуума с уравнением состояния типа Ван-дер-Ваальса построена.

## Список литературы

1. Ю. Г. Рыков, Н. А. Зайцев, В. В. Кабанов, В. Г. Лысов, Р. Ф. Хабибуллин. *Возможная термодинамическая модель для использования в схеме прямого моделирования двухфазных потоков* // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2012, № 40. 19 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-40>
2. Р. И. Нигматулин, *Динамика многофазных сред*. Ч. I и II. М.: Наука, 1987, 464 с. и 360 с.
3. Wendroff В. Two-fluid models: A critical survey, REPORT of Los Alamos Scientific Laboratory (1979)
4. Drew D.A. Mathematical modeling of two-phase flow, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **15**, 261-291 (1983).
5. Geurst J.A. Virtual mass in two-phase bubbly flow, *Physica* **129A**, 233-261 (1985).
6. Chen J.R., Richardson S.M., Saville G. Modelling of two-phase blowdown from pipelines I. A hyperbolic model based on variational principles, *Chem. Eng. Sci.*, **50**:4, 695-713 (1995).
7. Kolev N. *Multiphase flow dynamics. Fundamentals*, Springer (2005).
8. RELAP5/MOD3 Code Manual, v.6+, Idaho National Engineering Laboratory (1994).
9. ANSYS CFX Release 12.1, Ansys Inc. (2009).
10. Верификационный Отчет базовой версии расчетного комплекса СОКРАТ/В1, ИБРАЭ РАН (2007).
11. Radvogin Yu.B. Non-hyperbolicity of the two-phase flow equations and Kelvin-Helmholtz instability, *Keldysh Inst. Appl. Math. Preprint No. 125*, 11 p. (1995).
12. Bouchut F., Brenier Y., Cortes J., Ripoll J.-F. A hierarchy of models for two-phase flows, *J. Nonlinear Sci.*, **10**, 639-660 (2000).
13. R. T. Lahey Jr., *The prediction of phase distribution and separation phenomena using two-fluid models*, *Boiling Heat Transfer*, R. T. Lahey Jr., Elsevier Science Publ., Amsterdam, 85–122.
14. Evje S., Flatten T. On the wave structure of two-phase flow models, *SIAM J. Appl. Math.*, **67**:2, 487-511 (2007).
15. Murrone A., Guillard H. A five equation reduced model for compressible two phase flow problems, *J. Comp. Phys.*, **202**, 664-698 (2005).
16. Allaire G., Clerc S., Kokh S. A five equation model for the simulation of interfaces between compressible fluids, *J. Comp. Phys.*, **181**, 577-616 (2002).
17. Saurel R., Abgrall R. A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows, *J. Comp. Phys.*, **150**, 425-467 (1999).
18. Dal Maso G., LeFloch P.G., and Murat F. (1995), Definition and weak stability of nonconservative products, *J. Math. Pure Appl.* 74, 483–548.



19. Gallouet T., Herard J.-M., Seguin N. Numerical modeling of two-phase flows using the two-fluid two-pressure approach, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **14:5**, 663-700 (2004).
20. Kurganov A. Well-balanced central-upwind scheme for compressible two-phase flows, European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECCOMAS CFD), TU Delft, The Netherlands (2006).
21. Falcone G., Harrison B. Model predicts more accurate PI, *Oil & Gas Journal*, March 19, 41-45 (2001).
22. Andrianov N. Analytical and numerical investigation of two-phase flows, PhD Thesis, Otto-von-Guericke Universitat Mgdeburg (2003).
23. Ghiaasiaan S.M. *Two-phase flow, boiling and condensation in conventional and miniature systems*, Cambridge university press, New York, 2008, 613 pp.
24. Lahey R.T., Jr., Drew D.A. The analysis of two-phase flow and heat transfer using a multidimensional, four field, two-fluid model, *Nuclear Engineering and Design*, **204**, 29-44 (2001).
25. Lahey R.T., Jr. On the computation of multiphase flows, The 12th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics (NURETH-12) Log Number: KN4 Sheraton Station Square, Pittsburgh, Pennsylvania, U.S.A. September 30-October 4, 2007.
26. Tryggvasson, G., Bunner, B., Esmaeeli, Surk, D., Al-Rawahi, Tauber, J.N., Han, H., and Nas, S. A Front Tracking Method for Computation of Multiphase Flow, *J. Computational Physics*, Vol. 169, 708-751 (2001).
27. Nagrath, S., Jansen, K.E., Lahey Jr., R.T. Computation of incompressible bubble dynamics with a stabilized finite element level set method. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 194 (42-44), 4565-4587 (2005).
28. Galimov A.Yu., Drew D.A., Lahey Jr. R.T., Moraga F.J. The analysis of interfacial waves, *Nucl. Eng. Des.*, 235 (10-12), 1283-1292 (2005).
29. Lahey R.T., Jr. On the direct numerical simulation of two-phase flows, *Nuclear Engineering and Design*, **239**, 867-879 (2009).
30. Демьянов А.Ю., Динариев О.Ю., Евсеев Н.В. Основы метода функционала плотности в гидродинамике, М.: Физматлит, 2009.
31. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы, М.: Мир, 1974.
32. Итоговый отчет по научно-исследовательской работе «Разработка жидкометаллической версии расчетного кода СОКРАТ для моделирования аварийных режимов реакторов на быстрых нейтронах с жидкометаллическим охлаждением», ИБРАЭ РАН.
33. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics, *J. Comp. Phys.*, **228**, 7426-7451 (2009).
34. Karabasov S.A., Berloff P.S., Goloviznin V.M. CABARET in the ocean gyres, *Ocean modeling*, **30**, 155-168 (2009).
35. Базаров И.П. Термодинамика, М.: Физматлит, 1961.

36. J. M. Herard, O. Hurisse, Some recent numerical advances for two-phase flow modeling in NEPTUNE project, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **59**, 285–307 (2009).

## Оглавление

Основные обозначения .....	3
Вводные замечания .....	3
§1. Основная 3D система дифференциальных уравнений .....	4
§2. Одномерные системы дифференциальных уравнений .....	9
§3. О распространении разрывов.....	14
§4. Описание межфазных взаимодействий .....	15
Эффект присоединенных масс (virtual mass force) .....	17
§5. О едином описании режимов.....	19
Прямое моделирование двухфазной среды .....	20
§6. Односкоростная двумерная модель двухфазной среды.....	23
§7. Замкнутая модель двухфазного континуума для уравнения состояния типа Ван-дер-Ваальса .....	27
Список литературы.....	30