A. G. Reiman, Relativistisch und galileisch-invariante klassische mechanische systeme, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1973, Volume 37, 47–52

А.Г.Рейман

РЕЛЯТИВИСТСКИ И ГАЛИЛЕЕВО-ИНВАРИАНТНЫЕ КЛАССИЧЕСКИЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

В работах Б.Костанта [2] и А.А.Кириллова [I] содержится метод описания всех однородных симплектических пространств произвольной связной группы Ли. В данной статье с этой общей точки зрения изучаются группы Пуанкаре и Галилея. В рамках гамильтоновой механики получается простая и естественная классификация фазовых пространств элементарных релятивистских и галилеевых систем.

Фазовое пространство в общем случае оказывается восьмимерным. Для систем ненулевой вещественной массы оно устроено как $\mathbb{R}^6 \times S^2$; сомножитель S^2 ответственен за спин системы. Обсуждаются также координаты релятивистских систем со спином. Близкие результаты были получены Ренуаром [5] и Аренсом [6]-[8].

Построенные классические системы можно проквантовать по схеме Костанта (см. [I],[2],[5]). Помимо неприводимых унитарных представлений группы Пуанкаре, изученных Вигнером, при этом можно получить операторы спина и координат. Для группы Галилея квантование приводит к проективным представлениям, рассматривавшимся Баргманом [4].

Автор благодарит Л.Д.Фаддеева за постановку задачи и внимание к работе.

I. Однородные симплектические пространства групп Ли.

I.I. В этом параграфе сформулированы используемые в дальнейшем определения и результаты из [I] и[2]. Здесь G обозначает связную группу Ли, $\mathfrak{g}$ – ее алгебру Ли.

Определение I. Симплектическим многообразием называется пара (M,ω), где M – гладкое многообразие, а ω – замкнутая невырожденная 2-форма на нем.

Определение 2. Симплектическое многообразие называется однородным симплектическим пространством (о.с.п.) группы G , если G действует на M гладко, транзитивно и сохраняя форму ω .

Пусть (M_1,ω_1) и (M_2,ω_2) – два о.с.п. группы G . Накрытием назовем гладкое отображение $f: M_1 \to M_2$, коммутирующее с действием G и такое, что $\omega_1 = f^*\omega_2$.

Определение 3. О.с.п.(M_1,ω_1) и (M_2,ω_2) называются эквивалентными, если существует третье о.с.п. (M,ω), накрывающее как (M_1,ω_1), так и (M_2,ω_2).

I.2. Примерами о.с.п. группы G служат орбиты коприсоединенного представления Ad^* в $\mathfrak{g}^*$. Эти орбиты определяются, по существу, алгеброй $\mathfrak{g}$. Рассмотрим $\exp tX$, $X\in\mathfrak{g}$, как однопараметрическую группу диффеоморфизмов орбиты. Гамильтонианом соответствующего векторного поля является X, рассматриваемый как функция на орбите.

I.3. Определим операторы $d_1 : \mathfrak{g}^* \to \overset{2}{\Lambda}\mathfrak{g}^*$ и $d_2 : \overset{2}{\Lambda}\mathfrak{g}^* \to \overset{3}{\Lambda}\mathfrak{g}$ формулами

$$d_1\theta(X,Y)=\theta([X,Y])$$

$$d_2\omega(X,Y,Z)=\omega([X,Y],Z)+\omega([Y,Z],X)+\omega([Z,X],Y).$$

Обозначения:

$$H^1(\mathfrak{g}) = \ker d_1$$
$$H^2(\mathfrak{g}) = \ker d_2 / \operatorname{im} d_1 .$$

Фиксируем некоторое линейное сечение $\sigma: H^2(\mathfrak{g}) \to \ker d_2$ проекции $\ker d_2 \to H^2(\mathfrak{g})$. Снабдим теперь пространство $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}\oplus H^2(\mathfrak{g})^*$ структурой алгебры Ли. Для этого обозначим через $\varphi(X,Y)$, $X,Y\in\mathfrak{g}$, элемент $H^2(\mathfrak{g})^*$, такой, что

$$\varphi(X,Y)(\omega)=\sigma\omega(X,Y), \quad \omega\in H^2(\mathfrak{g}).$$

Скобка Ли в $\mathfrak{g}_1$

$$[(X,\alpha),(Y,\beta)]=([X,Y],\varphi(X,Y))$$

превращает $\mathfrak{g}_1$ в центральное расширение $\mathfrak{g}$.

Если G односвязна, то орбиты в $\mathfrak{g}_1^*$ – о.с.п. группы G.

Теорема. Пусть G односвязна. Тогда всякое о.с.п. группы G эквивалентно орбите в $\mathfrak{g}_1^*$.

Хотя для групп Пуанкаре и Галилея $\pi_1(G)=\mathbb{Z}_2$, утверждение теоремы для них верно.

Предложение. Две орбиты в $\mathfrak{g}_1^*$ эквивалентны тогда и только тогда, когда одна получается из другой сдвигом на $\theta\in H^1(\mathfrak{g}_1)$.

2. Группа Пуанкаре

2.I. Преобразования из $GL(4,\mathbb{R})$, сохраняющие квадратичную форму в $\mathbb{R}^4$ с сигнатурой (+ ––), образуют группу Лоренца $O(1.3)$. Группой Пуанкаре называется полупрямое произведение $O(1,3)*\mathbb{R}^4$ относительно естественного действия $O(1.3)$ в $\mathbb{R}^4$. Компонента связности группы Пуанкаре, содержащая единицу, в дальнейшем обозначается через $\mathcal{P}$, ее алгебра Ли – через $\mathfrak{p}_3$.

Фиксируем разложение $\mathbb{R}^4=\mathbb{R}^1\oplus\mathbb{R}^3$ в сумму положительного и отрицательного подпространств. Это разложение выделяет максимальную компактную подгруппу $SO(3)$ группы $\mathcal{P}$. Присоединенное представление $SO(3)$ в $\mathfrak{p}$ разлагается в сумму неприводимых компонент, из которых три эквивалентны стандартному представлению $SO(3)$ в $\mathbb{R}^3$, а одна тривиальна:

$$\mathfrak{p}=so(3)\oplus\mathfrak{f}\oplus\mathbb{R}^3\oplus\mathbb{R}^1$$

, где $\mathfrak{f}$ –

ортогональное дополнение $so(3)$ в $so(1,3)$. Употребляя в дальнейшем "трехмерные" обозначения, мы имеем в виду указанное разложение .

Выберем в каждом из подпространств разложения базисы J_i, K_i, P_i, P_0 соответственно, так, чтобы действие $so(3)$ в этих базисах было стандартным. Скобки Ли в p таковы:

$$[J_i, J_j] = \varepsilon^{ijk} J_k \qquad [K_i, K_j] = -\varepsilon^{ijk} J_k$$
$$[J_i, K_j] = \varepsilon^{ijk} K_k \qquad [K_i, P_j] = \delta^i_j P_0$$
$$[J_i, P_j] = \varepsilon^{ijk} P_k \qquad [K_i, P_0] = P_i$$

здесь $\varepsilon^{ijk} = \mathrm{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$.

2.2. Известно ([4]), что $H^2(p)=0$. Поэтому однородные симплектические пространства группы $\mathcal{P}$ исчерпываются с точностью до эквивалентности орбитами коприсоединенного представления $\mathcal{P}$ в p^*. Опишем эти орбиты.

Алгебра инвариантных многочленов на p^* порождена двумя образующими f_1 и f_2,

$$f_1 = P_0^2 - \|P\|^2$$
$$f_2 = \|P_0 J - P \wedge K\|^2 - (P,J)^2.$$

Большинство орбит – 8-мерные компоненты многообразий уровня $f_1 = \mathrm{Const}$, $f_2 = \mathrm{Const}$.

Алгебра Ли τ подгруппы $\mathbb{R}^4 \subset \mathcal{P}$ – коммутативный идеал в p. В частности, $\mathrm{Ad}\,\mathcal{P}$ действует в τ, и определено сопряженное представление $\mathcal{P}$ в τ^*. Проекция $\pi: p^* \to \tau^*$ коммутирует с действием $\mathcal{P}$, и орбита Ω в p^* проектируется на орбиту ω в τ^*. Имеем гладкое расслоение $\pi_1: \Omega \to \omega$.

Обозначим 6-мерное афинное пространство $\pi^{-1}(a)$, $a \in \tau^*$, через C_a. Орбита ω описывается уравнением $f_1 = \mathrm{Const}$, а слой $\Omega \cap C_a$ выделяется в C_a уравнением $f_2 = \mathrm{Const}$. Воспользуемся теперь леммой из [3]. В нашей ситуации она утверждает, что $\mathbb{R}^4 \subset \mathcal{P}$ переводит C_a в себя и действует там афинными сдвигами. Если $a \neq 0$, то орбита этого действия трехмерна. Таким образом, $\Omega \cap C_a$ расслаивается на параллельные трехмерные плоскости – орбиты подгруппы сдвигов $\mathbb{R}^4$.

2.3. Пусть $a \in \omega$. Если $f_1(a) > 0$, то ω – ветвь двуполостного гиперболоида в τ^*, а $\Omega \cap C_a$ – либо $\mathbb{R}^3 \times S^2$ (при $f_2 > 0$), либо $\mathbb{R}^3$ (при $f_2 = 0$).

Если $f_1(a) = 0$, то либо $a = 0$, либо ω – ветвь конуса в τ^*. В первом случае орбиты в C_0 – это орбиты связной компоненты группы Лоренца в $so(1,3)^*$. Алгебра инвариантных многочленов порождается двумя образующими $\|J\|^2 - \|K\|^2$ и (J,K). Орбиты, за исключением точки 0, 4-мерны.

При $a \neq 0$, $\Omega \cap C_a$ имеет структуру $\mathbb{R}^3$ при $f_2 = 0$ и $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1 \times S$ при $f_2 > 0$. В последнем случае расслоение $\pi_1: \Omega \to \omega$ нетривиально.

4 571

Наконец, при $f_1(a)<0$,могут представиться случаи $f_2<0$ - при этом $\Omega\cap C_a$ есть $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^2$; $f_2=0$ - при этом $\Omega\cap C_a$ есть $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^1\times S^1$; $f_2>0$ - при этом $\Omega\cap C_x$ есть $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^1\times S^1$. В последних двух случаях расслоения $\mathcal{X}_1:\Omega\to\omega$ нетривиальны.

Заметим еще, что, поскольку $H^1(p)=0$, орбиты в p^* попарно неэквивалентны.

2.4. Рассмотрим более подробно орбиты Ω , на которых $f_1 = m^2>0$. Они лежат над ветвью ω гиперболоида $P_0^2-\|P\|^2=m^2$ в τ^*. Пусть, для определенности, $P_0>0$ на ω .

Введем три функции φ_i , линейные на C_a при каждом a :

$$m\cdot\varphi=P_0 J+P\wedge K-\frac{(J,P)}{m+P_0}P.$$

Тогда $f_2=m^2\sum\varphi_i^2=m^2\|\varphi\|^2$, и трехмерные плоскости $\varphi=Const$ в C_a - в точности орбиты $\mathbb{R}^4$. Введем функции X_i , дополняющие φ_i до системы линейных координат C_a :

$$mX=K-\frac{P\wedge J}{m+P_0}-\frac{(K,P)}{P_0(m+P_0)}P.$$

Функции $\{P_0,P,\varphi,X\}$ образуют систему координат в области $\{P_0^2-\|P\|^2>0,\ P_0>0\}$ пространства p^* . Старые координаты J,K выражаются через новые так:

$$J=\varphi-P\wedge X;\ K=P_0X+\frac{P\wedge X}{P_0+m}.$$

Орбита Ω в новых координатах задается уравнениями $P_0^2-\|P\|^2=m^2$, $\|\varphi\|^2=R^2$. В качестве координат на Ω возьмем P,X и φ . Симплектическая форма ω в них имеет вид

$$\omega=dX\wedge dP+\frac{1}{2R^2}\varepsilon^{ijk}\varphi_i\, d\varphi_j\wedge d\varphi_k \qquad (R>0)$$

и $\omega=dX\wedge dP$ при $R=0$.

При $R=0$ $\Omega=\mathbb{R}^6$. При $R>0$ Ω 8-мерна, и дополнительные переменные φ_i естественно истолковать как спиновые. При квантовании они порождают квантовомеханические операторы спина. Скобки Пуассона координат $\{P,X,\varphi\}$ на Ω таковы:

$$\{X_i,P_i\}=1;\ \{\varphi_i,\varphi_j\}=\varepsilon^{ijk}\varphi_k,$$

остальные - нули.

Группа $\mathcal{P}$ действует следующим образом. Динамика, то есть действие подгруппы временных сдвигов, натянутой на P_0 - это динамика свободной частицы. Движение прямолинейно и равномерно, спин не меняется:

$$\{X_i,P_0\}=\frac{P_i}{P_0};\ \{P_i,P_0\}=0;\ \{\varphi_i,P_0\}=0.$$

Подгруппа $SO(3)$ действует трехмерными вращениями по всем наборам координат P,X и φ . Приведем также скобки координат с лоренцевыми моментами K_j :

$$\{X_i,K_j\}=\frac{P_i}{P_0}y_j-\varepsilon^{ijk}\frac{\varphi_k}{m+P_0} \qquad ,\text{где } y=X-\frac{P\wedge\varphi}{(P_0+m)^2}.$$

$$\{\varphi_i, K_j\} = \frac{1}{m+P_0}\left(P_i\varphi_j - \delta^i_j\sum_{k=1}^{3}P_k\varphi_k\right).$$

Введенные координаты X обладают некоторыми естественными для координат частицы свойствами:

I) они коммутируют между собой и со спиновыми переменными и имеют стандартные скобки с импульсами;

2) действие $SO(3)\subset\mathcal{P}$ на Ω в координатах $\{P,X,\varphi\}$ стандартно.

Нетрудно доказать, что любая система координатных функций X', удовлетворяющая I) и 2), связана с X соотношением $X'=X+f(P^2)P$, где f – гладкая функция.

3. Группа Галилея

3.I. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы Галилея отличается от алгебры Пуанкаре $\mathfrak{p}$ лишь тем, что

$$[K_i,K_j]=0,\quad [K_i,P_j]=0.$$

Известно ([4]), что $\dim H^2(\mathfrak{g})=1$. Пусть ω – замкнутая, но не точная 2-форма на $\mathfrak{g}$. Например, $\omega(K_i,P_i)=1,\ i=1,2,3$, а на остальных базисных парах значения ω -нуль. Построим с помощью ω центральное расширение $\mathfrak{g}_1$ алгебры $\mathfrak{g}$.

Положим $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}\oplus\mathbb{R}^1$, и скобку Ли в $\mathfrak{g}_1$ определим так:

$$[(X,t),(Y,s)]=([X,Y],\omega(X,Y)).$$

Результаты § I показывают, что всякое однородное симплектическое пространство группы Галилея эквивалентно орбите в $\mathfrak{g}_1^*$. Опишем эти орбиты.

3.2. Обозначим единицу $\mathbb{R}^1$, рассматриваемую как элемент алгебры $\mathfrak{g}_1$, через m.

Алгебра инвариантных многочленов на $\mathfrak{g}_1^*$ порождена тремя образующими

$$m,$$
$$f_1=2P_0m-\|P\|^2,$$
$$f_2=\|mJ-P\wedge K\|^2.$$

Соображения, использовавшиеся при описании орбит группы Пуанкаре, приводят к следующему результату.

Введем на дополнении гиперплоскости $m=0$ в $\mathfrak{g}_1^*$ координаты $\{m,P_0,P,X,\varphi\}$:

$$X=\frac{1}{m}K;\quad \varphi=J+\frac{P\wedge K}{m}.$$

В этих координатах орбита $\Omega_{m,R,c}$ задается уравнениями

$$m=\mathrm{Const},\ \|\varphi\|=R,$$
$$P_0-\frac{1}{2m}\|P\|^2=c.$$

При $R>0$ $\dim\Omega_{m,R,c}=8$: спин появляется и в классической механике.

Две орбиты Ω_{m_1,k_1,c_1} и Ω_{m_2,k_2,c_2} эквивалентны тогда и только тогда, когда $m_1=m_2$ и $k_1=k_2$. В этом случае одна орбита переводится в другую сдвигом, коммутирующим с действием группы. Постоянная c демонстрирует, таким образом, произвол в выборе начального уровня энергии. В релятивистском случае такого произвола нет!

Пространство $m=0$ – это $\mathfrak{g}^*$. Орбиты общего положения в $\mathfrak{g}^*$ устроены как $S^2\times S^1\times\mathbb{R}^5$ и соответствуют частицам нулевой массы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кириллов А.А., "Элементы теории представлений", § 15, М., 1972.
2. Костант Б., "Квантование и унитарные представления", УМН, т 29 N1.
3. Кириллов А.А., "Характеры унитарных представлений групп Ли", Функц. анализ 2, № 2(1968), 40-55.
4. Bargmann V., "On unitary ray representations of continuous groups", Ann.Math., 59, № 1 (1954), 1-46.
5. Renouard, R., These, Paris, 1969.
6. Arens R., "Hamiltonian structures for homogeneous spaces" Communs. Math. Phys., 1971, 21, № 2, 125-138.
7. Arens R., "Classical relativistic particles", Communs. Math. Phys., 1971, 21, № 2, 139-149.
8. Arens R., "Classical Lorentz-invariant particles", J.Math. Phys., 1971, 12, № 12, 2415-2422.