A. G. Kostyuchenko, A. A. Shkalikov, Summability of eigenfunction expansions of differential operators and convolution operators, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1978, Volume 12, Issue 4, 24–40

Функциональный анализ и его приложения,
т. 12, вып. 4, 1978, 24—40

УДК 517.43

О СУММИРУЕМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ

А. Г. Костюченко, А. А. Шкаликов

Рассматривается оператор L, порожденный обыкновенным дифференциальным выражением

$$l(y) = y^{(n)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y \tag{1}$$

и распадающимися нормированными краевыми условиями

$$\begin{aligned} U_j(y) &= y^{(\varkappa_j)}(0) + \sum_{k=0}^{\varkappa_j-1} \beta_{kj} y^{(k)}(0) = 0, \qquad j = 1, \ldots, l, \\ U_j(y) &= y^{(\varkappa_j)}(1) + \sum_{k=0}^{\varkappa_j-1} \beta_{kj} y^{(k)}(1) = 0, \qquad j = l+1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{2}$$

причем $\varkappa_1 < \varkappa_2 < \ldots < \varkappa_l$ и $\varkappa_{l+1} < \varkappa_{l+2} < \ldots < \varkappa_n$.

Известно [1], что собственные и присоединенные функции (с. п. ф.) оператора L образуют полную систему в пространстве $L_p[0, 1]$, $p \geqslant 1$. А. П. Хромовым [2], [3] показано, что в равномерно сходящиеся ряды по с. п. ф. оператора L могут разлагаться лишь некоторые операторно-аналитические по М. К. Фаге функции, удовлетворяющие бесконечному числу краевых условий на одном из концов отрезка [0, 1], если только $l \neq n - l$ (в случае $n - l = l$ рассматриваемые краевые условия регулярны, и в равномерно сходящиеся ряды разлагаются все функции из области определения оператора L (см., например, [4], стр. 98)).

В связи с этим возникает вопрос о возможности суммирования рядов по с. п. ф. оператора L в случае $l \neq n - l$ каким-либо методом. Естественным в данном случае является метод Абеля. А. П. Хромовым [5] было показано, что если $|2l - n| \leqslant 2$, то ряд Фурье по с. п. ф. всякой функции из области определения оператора L суммируется методом Абеля порядка α, где $1/n < \alpha < 1/2$. Эта возможность связана с тем, что в случае $|2l - n| \leqslant 2$ имеются лучи в комплексной плоскости, на которых резольвента оператора L убывает, благодаря чему возможно применение метода В. Б. Лидского [6]. Если же $|2l - n| > 2$, то резольвента оператора L имеет экспоненциальный рост по любому направлению в комплексной плоскости.

В настоящей работе, в предположении, что коэффициенты дифференциального выражения (1) постоянны, будет показано, что ответ на вопрос о возможности суммирования методом Абеля рядов по с. п. ф. оператора L не является односложным. А именно, в случае $|2l - n| \leqslant 4$ будет установлена теорема суммируемости методом Абеля порядка α, где $1/n < \alpha \leqslant 1/|2l - n|$ (границы для порядка суммируемости уточняют соответствующие границы, найденные А. П. Хромовым при $|2l - n| \leqslant 2$). Если же $|2l - n| > 4$, то мы покажем, что суммирование методом

Абеля какого бы ни было порядка, вообще говоря, невозможно. Кроме того, граница для порядков суммируемости $1/n < \alpha \leqslant 1/|2l - n|$, когда $|2l - n| \leqslant 4$, является точной.

Аналогичный вопрос ставится и для оператора свертки на конечном интервале

$$Kf = \int_0^1 k(x - \tau) f(\tau)\, d\tau \tag{3}$$

с ядром, определенным на всей вещественной оси как преобразование Фурье рациональной функции

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{-izt}\, dz, \tag{4}$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ — полиномы степеней m и n ($m < n$), причем $Q(z)$ не имеет корней на вещественной оси.

Операторы такого вида изучались в работах Б. В. Пальцева [7], [8] и Ю. И. Любарского [9]. В работе показано, что операторы свертки с рассматриваемым ядром весьма тесно связаны с дифференциальными операторами с распадающимися краевыми условиями, и их исследование проводится аналогично. Устанавливается соответствующая теорема суммируемости.

§ 1. Некоторые вспомогательные предложения

1. В дальнейшем предполагаем, что $l > n - l$, поскольку если $l < n - l$, то замена $\xi = 1 - x$ приводит к прежней ситуации, а в случае $l = n - l$ краевые условия регулярны.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — собственные значения (с. з.) оператора L. Через $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ обозначим системы собственных функций (с. ф.) оператора L и ему сопряженного оператора L^*, нормированные условием $(y_k, z_k) = 1$, $k = 1, 2, \ldots$

Фиксируем ветвь многозначной аналитической функции $(\sigma\lambda)^\alpha$, определяемую условием $(\sigma\lambda)^\alpha > 0$ при $\sigma\lambda > 0$ (здесь σ — число, которое выбирается в зависимости от расположения спектра оператора).

По некоторой функции $f(x) \in L_2[0, 1]$ построим ряд

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, z_k)\, e^{-(\sigma\lambda_k)^{\alpha} t} y_k(x). \tag{5}$$

Предположим, далее, что числа σ и α выбраны так, что ряд (5) при каждом $t > 0$ сходится по норме пространства L_2.

Будем говорить, что ряд Фурье по системе с. ф. оператора для функции $f(x)$ *суммируем методом Абеля порядка* α, если существует в смысле нормы пространства L_2 (или в $C[0,1]$)

$$\lim_{t \to +0} u(x, t) = f(x). \tag{6}$$

2. Рассмотрим полиномы

$$Q(z) = z^n + q_1 z^{n-1} + \ldots + q_n, \quad P(z) = z^m + p_1 z^{m-1} + \ldots + p_m;$$

при этом считаем $n - m = r > 0$.

В дальнейшем понадобится лемма Б. В. Пальцева (см. [7], стр. 600), которую мы приведем в удобном для нас виде.

Лемма 1. *При $\rho \to \infty$ полином $Q(z) - \rho^r P(z)$ имеет r корней $z_1, \ldots, z_r$, стремящихся к ∞ и допускающих разложение*

$$z_j = \omega^j \rho + \frac{p_1 - q_1}{r} + \sum_{s=1}^{\infty} c_s (\omega^j \rho)^{-s}, \quad j = 1, \ldots, r, \tag{7}$$

где ω^j — корни r-й степени из 1, и m корней $z_{r+1}, \ldots, z_n$, стремящихся к корням $b_1, \ldots, b_m$ полинома $P(z)$, причем, если b_τ — корень кратности k_τ полинома $P(z)$, то среди $z_{r+1}, \ldots, z_n$ существуют k_τ различных корней, стремящихся к b_τ и допускающих разложение

$$z_{j+t} = b_\tau + \left(\frac{Q(b_\tau)\, k_\tau!}{P^{(k_\tau)}(b_\tau)}\right)^{1/k_\tau} \frac{1}{\sigma^j_{k_\tau} \rho^{r/k_\tau}} + \sum_{s=2}^{\infty} \tilde{c}_s (\sigma^j_{k_\tau} \rho^{r/k_\tau})^{-s}, \tag{8}$$

$j = 1, \ldots, k_\tau$, $t = r + k_1 + \ldots + k_{\tau-1}$, $\sigma^j_{k_\tau}$ *— корни степени k_τ из 1.*

Очевидно, $z_1(\rho), \ldots, z_n(\rho)$ суть n ветвей алгебраической функции $z(\rho)$, определяемой уравнением $Q(z) - \rho^r P(z) = 0$.

3. Перед тем как перейти к изучению функции Грина оператора L, условимся о некоторых обозначениях.

А. Через J будем обозначать мультииндексы $J = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — упорядоченные множества различных натуральных чисел, изменяющихся от 1 до n, т. е. $1 \leqslant \alpha_1 < \ldots < \alpha_s \leqslant n$. Через $|J|$ будем обозначать число индексов в мультииндексе J. В рассматриваемом случае $|J| = s$.

Введем специальный мультииндекс $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Через J' будем обозначать мультииндекс, дополнительный к J относительно I_n, т. е. $J' = I_n \setminus J$. Операции суммирования и произведения по соответствующим мультииндексам будут обозначаться обычным образом:

$$\sum_{\alpha \in J} z_\alpha = z_{\alpha_1} + \ldots + z_{\alpha_s}, \quad \prod_{\alpha \in J} f(z_\alpha) = f(z_{\alpha_1}) \ldots f(z_{\alpha_s}).$$

Б. Для функции $A(\rho) = A + O(\rho^{-1})$, где A не зависит от ρ, введем обозначение $A(\rho) = [A]$.

Через W_1^p будем обозначать пространство функций

$$W_1^p = \{f(x) \colon f'(x) \in L_p[0, 1]\}.$$

Числа $\varkappa_j$, участвующие в (2), будем называть *порядками* краевых условий $U_j(y)$.

4. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$l(y) - \rho^n y = 0, \tag{9}$$

где $l(y)$ определено (1). Если $z_1(\rho), \ldots, z_n(\rho)$ — ветви алгебраической функции

$$z^n + p_2 z^{n-2} + \ldots + p_n - \rho^n = 0,$$

то функции $y_j(x, \rho) = e^{x z_j(\rho)}$, $j = 1, \ldots, n$, образуют фундаментальную систему решений уравнения (9), которая, согласно лемме 1 (при $m = 0$, $r = n$), удовлетворяет асимптотике

$$\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} y_j(x, \rho) = \rho^{k-1} [\omega_j^{k-1}]\, e^{\omega_j \rho x}, \tag{10}$$

$j, k = 1, \ldots, n$, ω_j — корни n-й степени из 1.

Кроме того, согласно (7), $y_j(x, \rho)$ — аналитические функции от ρ при $|\rho|$ достаточно большом.

Пусть $G(x, \xi, \lambda)$ — функция Грина оператора $L - \lambda I$ (через I обозначается единичный оператор).

Известна (см. [4], стр. 46) формула ($\lambda = \rho^n$)

$$G(x, \xi, \rho) = \frac{H(x, \xi, \rho)}{2\Delta(\rho)}, \tag{11}$$

где

$$\Delta(\rho) = \det \| U_k(y_j) \|_{k,\, j=1}^{n}, \tag{12}$$

$$H(x, \xi, \rho) = \begin{vmatrix} g(x, \xi) & y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ U_1(g) & U_1(y_1) & \ldots & U_1(y_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_n(g) & U_n(y_1) & \ldots & U_n(y_n) \end{vmatrix}, \tag{13}$$

$$g(x, \xi) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} y_j(x) V_j(\xi), & \text{если } x \geqslant \xi, \\ -\sum\limits_{j=1}^{n} y_j(x) V_j(\xi), & \text{если } x < \xi, \end{cases} \tag{14}$$

$$V_j(\xi) = \frac{W_j(\xi)}{W(\xi)}, \tag{15}$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{16}$$

— определитель Вронского фундаментальной системы решений $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ уравнения (9) и функции $W_j(\xi)$, $j = 1, \ldots, n$,— алгебраические дополнения элементов $y_j^{(n-1)}(x)$ определителя W.

Из асимптотики (10) и формул (15), (16) легко получить асимптотику функций $V_j(\xi)$, а именно,

$$V_j(\xi) = \rho^{-(n-1)} [c_j] e^{-\rho\omega_j \xi}, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{17}$$

где c_j — некоторые числа. Из (2), (10) также следует, что

$$\begin{gathered} U_j(y_k) = \rho^{\varkappa_j} [\omega_k^{\varkappa_j}], \quad j = 1, \ldots, l, \\ U_j(y_k) = \rho^{\varkappa_j} [\omega_k^{\varkappa_j}] e^{\rho\omega_k}, \quad j = l + 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{18}$$

Раскрывая определитель (12), получим

$$\Delta(\rho) = \rho^{\varkappa} \sum_{|J| = n-l} [a_J] e^{\rho \Omega_J}, \tag{19}$$

где $\varkappa = \sum\limits_{j=1}^{n} \varkappa_j$, $\Omega_J = \sum\limits_{\alpha \in J} \omega_\alpha$, a_J — некоторые числа и сумма распространяется по всем мультииндексам J, для которых $|J| = n - l$. Заметим, что числа a_J в формуле (19) отличны от нуля.

Умножим при $x \geqslant \xi$ ($x < \xi$) $j + 1$-й столбец определителя (13) на $V_j(\xi)$ ($-V_j(\xi)$), $j = 1, \ldots, n$, и сложим с первым столбцом. Тогда функция $H(x, \xi, \rho)$ легко преобразуется к виду

$$H(x, \xi, \rho) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} V_j(\xi) M_j(x), & \text{если } x \geqslant \xi, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} V_j(\xi) N_j(x), & \text{если } x < \xi, \end{cases} \tag{20}$$

где

$$M_j(x) = 2\begin{vmatrix} y_j(x) & y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ 0 & U_1(y_1) & \dots & U_1(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & U_l(y_1) & \dots & U_l(y_n) \\ U_{l+1}(y_j) & U_{l+1}(y_1) & \dots & U_{l+1}(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(y_j) & U_n(y_1) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}, \tag{21}$$

$$N_j(x) = -2\begin{vmatrix} 0 & y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ U_1(y_j) & U_1(y_1) & \dots & U_1(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_l(y_j) & U_l(y_1) & \dots & U_l(y_n) \\ 0 & U_{l+1}(y_1) & \dots & U_{l+1}(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & U_n(y_1) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Рассмотрим также функцию

$$G_1(x, \xi, \rho) = \frac{H_1(x, \xi, \rho)}{2\Delta(\rho)},$$

где

$$H_1(x, \xi, \rho) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} z_j^{-1}(\rho) V_j(\xi) M_j(x), & \text{если } x \geqslant \xi, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} z_j^{-1}(\rho) V_j(\xi) N_j(x), & \text{если } x < \xi. \end{cases} \tag{23}$$

Функция $H_1(x, \xi, \rho)$ не является непрерывной при $x = \xi$, однако при $x > \xi$ и $x < \xi$ из (17) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial \xi} G_1(x, \xi, \rho) = G(x, \xi, \rho). \tag{24}$$

5. В дальнейшем понадобятся следующие предложения.

Лемма 2. *Все нули характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ простые, за исключением, быть может, конечного числа, и асимптотически находятся в угле сколь угодно малого раствора, содержащем положительный (отрицательный) луч, если число $n - l$ четно (нечетно). Кроме того, существует бесконечная последовательность окружностей Γ_s радиуса R_s с общим центром в нуле, таких, что $R_s \to \infty$, между окружностями Γ_s и Γ_{s+1} находится ровно один полюс функции $G(x, \xi, \lambda)$ в λ-плоскости и при $\lambda \in \Gamma_s$, а также на всех лучах* $\arg \lambda \neq 0$ ($\arg\lambda \neq -\pi$), *при $|\lambda| > R_0$ выполняется оценка*

$$|G(x, \xi, \lambda)| \leqslant Ce^{\delta|\lambda|^{1/n}},$$

где постоянные C, δ не зависят от x, ξ, s.

Доказательство леммы 2 сразу следует из лемм 2, 3 работы А. П. Хромова [3].

Пусть $n - l$ четно. Обозначим через γ_0 луч $\arg\rho = \varepsilon$ и через γ_1 луч $\arg\rho = -\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 2\pi/n$.

Лемма 3. *При $x \geqslant \xi$ функция $G_1(x, \xi, \rho)$ на лучах γ_0, γ_1 представима в виде*

$$G_1(x, \xi, \rho) = \rho^{-n} \sum_{s, \alpha, j} \exp\{(\mu_s + \omega_\alpha x - \omega_j \xi)\rho\}[c_{s\alpha j}] + \hat{G}_1(x, \xi, \rho), \tag{25}$$

причем:

1) *функции* $[c_{s\alpha j}]$ *голоморфны при* $|\rho|$ *достаточно большом*;

2) *функция* $\hat{G}_1(x, \xi, \rho)$ *на луче* γ_0 (γ_1) *допускает оценку*

$$|G_1(x, \xi, \rho)| \leqslant Ce^{-\delta|\rho|}$$

при некотором $\delta > 0$;

3) *если* $2l - n \leqslant 4$, *то числа* μ_s, ω_α, ω_j, *участвующие в представлении* (25), *на луче* γ_0 (γ_1) *таковы, что для всех* $0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant 1$ *справедливы неравенства*

$$|\arg e^{i\pi/n}(\mu_s + \omega_\alpha x - \omega_j\xi)| \geqslant \frac{(n-l+1)\pi}{n}$$

$$\left(|\arg e^{-i\pi/n}(\mu_s + \omega_\alpha x - \omega_j\xi)| \geqslant \frac{(n-l+1)\pi}{n}\right).$$

Доказательство. Раскроем определитель (21) по минорам последних $n-l$ строк. Учитывая (10), (18), получим

$$M_j(x) = \rho^{\varkappa} \sum_{|J|=n-l} \sum_{\alpha\in J'} \exp\{(\Omega_J + \omega_\alpha x)\rho\}[a_{J\alpha}], \tag{26}$$

где $\varkappa = \sum_{s=1}^{n} \varkappa_s$, причем сумма в (26) распространена не по всем мультииндексам J, $|J| = n - l$, и индексам $\alpha \in J'$, а лишь по тем, для которых либо $\alpha = j$, либо $j \in J$, т. е. $j \in J \cup \alpha$. Это легко заметить из вида определителя (21), поскольку, если $j \notin J \cup \alpha$, соответствующий минор будет равен нулю.

Из формул (17), (25) получим

$$H_1(x, \xi, \rho) \underset{\xi<x}{=} \rho^{\varkappa-n} \sum_{|J|=n-l} \sum_{\alpha\in J'} \sum_{j=1,\, j\in J\cup\alpha} \exp\{(\Omega_J + \omega_\alpha x - \omega_j\xi)\rho\}[a_{J\alpha s}]. \tag{27}$$

Преобразуем теперь к нужному виду функцию $\Delta^{-1}(\rho)$. Рассмотрим специальный мультииндекс $J_0 = \left\{1, 2, \ldots, \frac{n-l}{2}, \frac{n+l}{2} + 1, \ldots, n\right\}$. Очевидно, $|J_0| = n - l$. Переписав формулу (19) в виде

$$\Delta(\rho) = \rho^{\varkappa}[a_{J_0}]\, e^{\Omega_{J_0}\rho}\left\{1 + \sum_{\substack{|J|=n-l,\\ J\neq J_0}} [a_J a_{J_0}^{-1}]\, e^{(\Omega_J - \Omega_{J_0})\rho}\right\},$$

получим

$$\Delta^{-1}(\rho) = \rho^{-\varkappa}[a_{J_0}^{-1}]\, e^{-\Omega_{J_0}\rho}\{1 - z(\rho) + \ldots + (-1)^k z^k(\rho)(1 + z(\rho))^{-1}\}, \tag{28}$$

где

$$z(\rho) = \sum_{\substack{|J|=n-l,\\ J\neq J_0}} [a_J a_{J_0}^{-1}]\, e^{(\Omega_J - \Omega_{J_0})\rho}.$$

Если $\arg\rho = \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 2\pi/n$, то для любого $J \neq J_0$, $|J| = n - l$, будет выполнено неравенство $\operatorname{Re}(\Omega_J - \Omega_{J_0})\rho \leqslant -\sigma|\rho|$ при некотором $\sigma > 0$, зависящем от ε. Поэтому найдется такое натуральное число k, что на луче γ_0 при некотором $\delta > 0$ будет выполнена оценка

$$|e^{-\Omega_{J_0}\rho} z^k(\rho)(1 + z(\rho))^{-1} H_1(x, \xi, \rho)| \leqslant Ce^{-\delta|\rho|}.$$

Тогда из (27), (28) сразу следует справедливость представления (25) на луче γ_0, причем утверждения 1), 2) леммы автоматически выполняются. Для доказательства утверждения 3) нужно показать, что

$$|\arg e^{i\pi/n}(\Omega_J - \Omega_{J_0} + \omega_\alpha x - \omega_j\xi)| \geqslant \frac{(n-l+1)\pi}{n}, \tag{29}$$

если $|J| = n - l$, $\alpha \in J'$, $j \in J \cup \alpha$, а также

$$|\arg e^{i\pi/n}(\Omega_J + \Omega_{J_1} + \ldots + \Omega_{J_{h-1}} - h\Omega_{J_0} + \omega_\alpha x - \omega_j\xi)| \geqslant \frac{(n-l+1)\pi}{n}, \tag{30}$$

где $J_1, \ldots, J_{h-1} \neq J_0$ $(h \leqslant k)$ — некоторые мультииндексы порядка $n - l$ и по-прежнему $|J| = n - l$, $\alpha \in J'$, $j \in J \cup \alpha$.

Заметим прежде всего, что

$$|\arg e^{i\pi/n}(\Omega_J - \Omega_{J_0})| \geqslant \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}, \qquad J \neq J_0, \ |J| = n - l; \tag{31}$$

и, если выполнено условие $2l - n \leqslant 4$, то

$$|\arg e^{i\pi/n}\omega_s| \geqslant \frac{(n-l+1)\pi}{n} \geqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}, \quad \text{если} \quad s \in J_0', \tag{32}$$

$$|\arg e^{i\pi/n}(\Omega_J + \omega_\alpha - \Omega_{J_0})| \geqslant \frac{(n-l+1)\pi}{n}, \quad |J| = n - l, \ \alpha \in J_0'. \tag{33}$$

В справедливости (31) легче всего убедиться, заметив, что все точки Ω_J лежат внутри или на границе n-угольника с вершинами $|\Omega_{J_0}| e^{(2k-1)i\pi/n}$, $k = 0, \ldots, n-1$, причем $\Omega_{J_0} = |\Omega_{J_0}| e^{-i\pi/n}$. Неравенство (32) следует из определения мультииндекса J_0.

Будем пользоваться следующим замечанием: если для некоторых чисел a, b выполнены условия $|\arg a| \geqslant (\pi/2) + \varphi$, $\varphi > 0$, и $|\arg b| \geqslant (\pi/2) - \psi$, $-\varphi \leqslant \psi \leqslant \varphi$, то $|\arg(a + b)| \geqslant (\pi/2) - \psi$. Тогда (33) следует из (31), (32). Это очевидно, если $\alpha \in J_0'$; при $\alpha \in J_0$ положим $\Omega_J + \omega_\alpha - \Omega_{J_0} = \Omega_J - \omega_s + \omega_\alpha - \Omega_{J_0} + \omega_s = (\Omega_J - \Omega_{J_0}) + \omega_s$ (здесь s выбрано так, что $s \in J \cap J_0'$) и воспользуемся предыдущим замечанием.

Из (31) следует, что $\arg e^{i\pi/n}(\Omega_{J_1} + \ldots + \Omega_{J_{h-1}} - (h-1)\Omega_{J_0}) \geqslant (\pi/2) + (\pi/n)$, поэтому, если справедливо (29), то справедливо также (30).

Для доказательства (29) рассмотрим различные случаи.

а) Пусть $\alpha = j$. Тогда неравенство (29) очевидно, если $|\arg e^{i\pi/n}\omega_\alpha| \geqslant (n - l + 1)\pi/n$. Если $|\arg e^{i\pi/n}\omega_\alpha| < (n - l + 1)\pi/n$, то $|\arg(-e^{i\pi/n}\omega_\alpha)| \geqslant (\pi/2) + (\pi/n)$, и требуемое утверждение получается из (33), поскольку

$$\Omega_J - \Omega_{J_0} + \omega_\alpha(x - \xi) = (\Omega_J + \omega_\alpha - \Omega_{J_0}) - \omega_\alpha(1 + x - \xi).$$

б) Пусть $|\arg e^{i\pi/n}\omega_\alpha| \geqslant (n - l + 1)\pi/n$, $\alpha \in J'$, $j \in J$. Тогда (29) следует из неравенства $|\arg e^{i\pi/n}(\Omega_J - \omega_j\xi - \Omega_{J_0})| \geqslant (\pi/2) + (\pi/n)$ при $j \in J$, которое доказывается аналогично (31) (достаточно заметить справедливость этого неравенства при $\xi = 0$ и $\xi = 1$).

в) Пусть $|\arg e^{i\pi/n}\omega_j| \geqslant (n - l + 1)\pi/n$, $j \in J$, и $|\arg e^{i\pi/n}\omega_\alpha| < (n - l + 1)\pi/n$, $\alpha \in J'$. Тогда

$$\Omega_J - \Omega_{J_0} + \omega_\alpha x - \omega_j\xi = (\Omega_J - \omega_j + \omega_\alpha - \Omega_{J_0}) - \omega_\alpha(1 - x) + \omega_j(1 - \xi) = (\Omega_{\tilde{J}} - \Omega_{J_0}) - \omega_\alpha(1 - x) + \omega_j(1 - \xi).$$

Остается заметить, что в рассматриваемом случае $|\arg(-e^{i\pi/n}\omega_\alpha)| \geqslant (\pi/2) + (\pi/n)$.

г) Пусть $|\arg e^{i\pi/n}\omega_j| < (n - l + 1)\pi/n$, $j \in J$, и $|\arg e^{i\pi/n}\omega_\alpha| < (n - l + 1)\pi/n$, $\alpha \in J'$. В этом случае (29) следует из представления $\Omega_J - \Omega_{J_0} + \omega_\alpha x - \omega_j\xi = (\Omega_J + \omega_\alpha - \Omega_{J_0}) - \omega_\alpha(1 - x) - \omega_j\xi$.

Таким образом, все утверждения леммы относительно представления функции $G_1(x, \xi, \rho)$ на луче γ_0 доказаны. Совершенно аналогично доказывается возможность соответствующего представления функции $G_1(x, \xi, \rho)$ на луче γ_1. Отличие состоит лишь в том, что вместо рассматриваемого в первом случае мультииндекса J_0 нужно рассмотреть мультииндекс

$$J_1 = \left\{1, 2, \ldots, \frac{n-l}{2}+1, \frac{n+l}{2}+2, \ldots, n\right\}.$$

Лемма 3, безусловно, справедлива и в случае, когда $n - l$ нечетно. Однако вместо лучей γ_0, γ_1 в этом случае следует рассмотреть, например, лучи γ_0': $\arg\rho = (\pi/n) + \varepsilon$, γ_1': $\arg\rho = (\pi/n) - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 2\pi/n$. В утверждении 3) леммы числа, стоящие под знаком аргумента, нужно умножить при этом на коэффициент $e^{i\pi/n}$.

Лемма 4. *При $x \leqslant \xi$ функция $G_1(x, \xi, \rho)$ на лучах γ_0, γ_1 представима в виде* (25), *причем для функций, участвующих в представлении, справедливы первые два утверждения леммы* 3, *и, кроме того, при всех $0 \leqslant x \leqslant \xi \leqslant 1$ справедливы неравенства*

$$\operatorname{Re}(\mu_s + \omega_\alpha x - \omega_j \xi)\rho \leqslant 0.$$

Доказательство следует из леммы 7 работы [3], если учесть представление (28) для функции $\Delta^{-1}(\rho)$.

Лемма 5. *Пусть $f(x) \in W_1^p$, $p \geqslant 1$, и $f(0) = f(1) = 0$. Тогда справедлива формула*

$$\int_0^1 G(x, \xi, \rho) f(\xi)\, d\xi = \rho^{-n}[\mathbf{1}]\boldsymbol{f}(x) - \int_0^1 G_1(x, \xi, \rho) f'(\xi)\, d\xi.$$

Доказательство. Согласно (23), (24) достаточно показать, что

$$\sum_{j=1}^{n} z_j^{-1}(\rho) V_j(x)(M_j(x) - N_j(x)) = \rho^{-n}[1]. \tag{34}$$

Из лемм 7, 9 работы [3] следуют оценки

$$|V_j(x) M_j(x)| \leqslant C|\rho|^{-(n-1)}, \quad |V_j(x) N_j(x)| \leqslant C|\rho|^{-(n-1)}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Отсюда, учитывая, что $z_j^n(\rho) = \rho^n[1]$, $j = 1, \ldots, n$, сразу получим (34). Лемма доказана.

§ 2. Доказательство теоремы суммируемости

Теорема 1. *Для всякой функции $f(x) \in W_1^p$ при некотором $p > 1$ и удовлетворяющей краевым условиям* (2) *нулевого порядка, ряд Фурье по системе с.п.ф. оператора L равномерно суммируется методом Абеля порядка $1/n < \alpha \leqslant 1/|2l - n|$, если только $|2l - n| \leqslant 4$.*

Доказательство. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы, то найдутся такие с. ф. $y_{k_1}(x)$, $y_{k_2}(x)$ оператора L, что $f(x) = \varphi(x) + c_1 y_{k_1}(x) + c_2 y_{k_2}(x)$, а для функции $\varphi(x)$ выполнено условие $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Поэтому, не ограничивая общности, считаем, что $f(0) = f(1) = 0$.

Для определенности полагаем число $n - l$ четным. Фиксируем ветвь многозначной функции λ^α так, что $\lambda^\alpha > 0$ при $\lambda > 0$.

Рассмотрим функцию

$$F(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{-\lambda^\alpha t} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) f(\xi)\, d\xi\, d\lambda, \tag{35}$$

где контур Γ ограничивает область $\mathscr{D}$, содержащую все с.з. оператора L и не содержащую точку 0, причем границей области $\mathscr{D}$ при $|\lambda| > R$ служат лучи $\arg \lambda = \pm \varepsilon_1$, $0 < \varepsilon_1 < \pi$, а направление интегрирования выбрано так, что область $\mathscr{D}$ при обходе контура остается слева.

Из леммы 2 следует, что функция $F(x, t)$ определена для любого $t > 0$, если $\alpha > 1/n$ и $\varepsilon_1 < \pi/2\alpha$, что будем считать выполненным. Справедлива следующая

Лемма 6. *Для того чтобы ряд Фурье для функции $f(x)$ по системе с.п.ф. оператора L суммировался методом Абеля порядка α, необходимо и достаточно, чтобы существовал в смысле L_2 предел*

$$\lim_{t\to+0} F(x, t) = F(x, 0), \tag{36}$$

при этом ряд суммируется равномерно, если предел (36) *существует равномерно по x.*

Доказательство. Вычисляя интеграл (35) по вычетам, получим представление $F(x, t)$ в виде ряда (5). Тогда доказательство леммы сразу следует из определения суммируемости и полноты с.ф. L^*.

Проведя в (35) замену $\lambda = \rho^n$, получим

$$F(x, t) = \frac{n}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \rho^{n-1} e^{-\rho^{\alpha n} t} \int_0^1 G(x, \xi, \rho) f(\xi)\, d\xi\, d\rho,$$

где контур Γ' ограничивает область $\mathscr{D}'$, границей которой при $|\rho| > R^{1/n}$ служат лучи γ_0, γ_1: $\arg \rho = \pm \varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon_1/n$.

В силу леммы 5 предел функции $F(x, t)$ при $t \to +0$ существует тогда и только тогда, когда существует предел при $t \to +0$ функции $F_1(x, t)$, где

$$F_1(x, t) = \int_{\Gamma'} \rho^{n-1} e^{-\rho^{\alpha n} t} \int_0^1 G_1(x, \xi, \rho) f'(\xi)\, d\xi\, d\rho.$$

Из лемм 3, 4 следует, что достаточно доказать существование предела у функций вида

$$\Phi_k(x, t) = \int_{\gamma_k} \rho^{-1} e^{-\rho^{\alpha n} t} \int_0^x \exp\{(\mu_s + \omega_\alpha x - \omega_j \xi)\rho\} [c_{s\alpha j}] f'(\xi)\, d\xi\, d\rho,$$

$$\Psi_k(x, t) = \int_{\gamma_k} \rho^{-1} e^{-\rho^{\alpha n} t} \int_x^1 \exp\{(\mu_s + \omega_\alpha x - \omega_j \xi)\rho\} [c_{s\alpha j}] f'(\xi)\, d\xi\, d\rho, \qquad k = 0, 1$$

(здесь интегрирование ведется по лучам γ_0, γ_1 при $|\rho| > R$).

Рассмотрим, например, функцию $\Phi_0(x, t)$. Для функции $\Phi_1(x, t)$ доказательство проводится аналогично и совсем просто для функций $\Psi_k(x, t)$, $k = 0, 1$.

Фиксируем x, $0 \leqslant x \leqslant 1$. При изменении ξ в пределах $0 \leqslant \xi \leqslant x$ аргумент числа $\mu_s + \omega_\alpha x - \omega_j \xi$ изменится не более чем на π. Учитывая утверждение 3) леммы 3, найдем такое φ,

$$-\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi(n-l+1)}{n}\right) \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\pi(n-l+1)}{n},$$

что

$$\operatorname{Re} e^{i(\pi/n+\varphi)} (\mu_s + \omega_\alpha x - \omega_j \xi) \leqslant 0 \tag{38}$$

для всех $\xi \leqslant x$. Полагая $\theta = (\pi/n) + \varphi$, получим, что

$$\frac{2\pi}{n} - \frac{(2l-n)\pi}{n} \leqslant \theta \leqslant \frac{(2l-n)\pi}{2n},$$

а функция

$$\mathcal{K}(x, \rho) = \int_0^x \exp\{(\mu_s + \omega_\alpha x - \omega_j \xi)\rho\}[c_{s\alpha j}] f'(\xi)\, d\xi$$

в силу (38) убывает на луче γ: $\arg \rho = \theta$, и, кроме того, $\mathcal{K}(x, \rho) \in L_{q'}(R, \infty)$, $q' < \infty$, поскольку $f'(\xi) \in L_p[0, 1]$, $p > 1$ (для проверки этого утверждения нужно воспользоваться либо неравенством Гёльдера, либо свойством преобразования Фурье, см., например, [10], стр. 381).

Пусть $\alpha \leqslant 2l - n$. Тогда функция $e^{-\rho^{\alpha n}t}$ не растет в угле между лучом γ_0 и лучом γ_1. Так же, как и в лемме Жордана, показывается, что при каждом $t > 0$

$$\int_{C_R} \rho^{-1} e^{-\rho^{\alpha n}t} \mathcal{K}(x, \rho)\, d\rho \to 0 \quad \text{при } R \to \infty,$$

где C_R — дуги окружностей радиуса R, заключенные между лучами γ_0 и γ. Так как функция $\mathcal{K}(x, \rho)$ голоморфна при $|\rho|$ достаточно большом, то

$$\Phi_0(x, t) = \int_{\gamma \cup S} \rho^{-1} e^{-\rho^{\alpha n}t} \mathcal{K}(x, \rho)\, d\rho,$$

где S — некоторая дуга конечной длины. На луче γ функция $\mathcal{K}(x, \rho) \in L_{q'}(R, \infty)$, поэтому $\rho^{-1}\mathcal{K}(x, \rho) \in L_1(R, \infty)$. Следовательно, существует $\lim\limits_{t \to +0} \Phi_0(x, t) = \Phi_0(x, 0)$. Элементарная проверка показывает, что предел существует равномерно по x, в частности, $\Phi(x, 0)$ непрерывна. Тогда справедливость утверждения теоремы сразу следует из леммы 6.

При $n - l$ нечетном вместо (35) следует рассмотреть функцию

$$F(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{-(-\lambda)^\alpha t} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) f(\xi)\, d\xi\, d\lambda,$$

где ветвь многозначной функции $(-\lambda)^\alpha$ выбрана так, что $(-\lambda)^\alpha > 0$ при $-\lambda > 0$, а контур Γ охватывает все с.з. оператора L и при $|\lambda| > R$ совпадает с лучами $\arg \lambda = \pi \pm \varepsilon_1$.

Отметим, что приведенный метод не может быть перенесен без изменения для доказательства теоремы суммируемости рядов по с.п.ф. дифференциальных операторов с произвольными переменными коэффициентами. Это связано с тем, что фундаментальная система решений уравнения (1), обладающая асимптотикой (10), в случае переменных коэффициентов аналитически зависит от параметра лишь в определенных секторах раствора π/n.

§ 3. Теорема суммируемости для оператора свертки

1. Рассмотрим интегральный оператор свертки K, определенный формулами (3), (4). Обозначим через n_+ (соответственно n_-) число корней полинома $Q(z)$ в верхней (нижней) полуплоскости.

В самосопряженном случае корни полиномов $P(z)$ и $Q(z)$ симметричны относительно действительной оси, следовательно, $n_+ = n_-$. Б. В. Пальцев [8] подробно рассмотрел случай $|n_+ - n_-| \leqslant m$, который был отмечен как «слабо» несамосопряженный. В этом случае при некоторых дополнительных условиях регулярности им, в частности, была установлена базисность в $L_p[0, 1]$ и базисность Рисса в $L_2[0, 1]$ корневых векторов оператора K. Случай $|n_+ - n_-| > m$ был характеризован Б. В. Пальцевым как «существенно» несамосопряженный. Далее будет рассматриваться именно этот случай. Ю. И. Любарским [9] анонсирована теорема полноты оператора K, если $|n_+ - n_-| > m$ и $n_+n_- \neq 0$. В случае $n_+n_- = 0$ оператор K вольтерров. Теорема полноты оператора K при $|n_+ - n_-| > m$ будет следовать также из дальнейших результатов этого параграфа и работы [1]. Кроме того, А. П. Хромовым было сообщено авторам, что оператор K можно представить в виде конечномерного возмущения вольтеррова оператора с ядром, зависящим от разности,

$$Kf(x) = \int_0^x k(x-\tau) f(\tau)\, d\tau + \sum_{k=1}^{n_-} (f, g_k)\, \varphi_k(x),$$

и теорема полноты при $|n_+ - n_-| > m$ получается как следствие одной его теоремы [2].

Не ограничивая общности, далее предполагаем, что $n_- - n_+ > m$.

2. В этом пункте мы укажем весьма простую связь между ядром резольвенты оператора K^{-1} и функцией Грина некоторого дифференциального оператора с распадающимися краевыми условиями.

Рассмотрим оператор $K_0 f(x) = \int_0^1 k_0(x-\tau) f(\tau)\, d\tau$, где

$$k_0(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{Q(z)}\, e^{-i\eta z} dz. \tag{39}$$

Пусть $Q(z) = Q_+(z)\, Q_-(z)$, причем полином $Q_+(z)$ ($Q_-(z)$) имеет корни только в верхней (нижней) полуплоскости. Обратным к оператору K_0 является оператор K_0^{-1}, порожденный дифференциальным выражением

$$Q\left(-i\frac{d}{dx}\right) y(x) \tag{40}$$

и распадающимися краевыми условиями

$$\begin{aligned} U_j(y) &= \frac{d^j}{dx^j} Q_+\left(-i\frac{d}{dx}\right) y(x)\Big|_{x=0} = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, n_- - 1, \\ U_{j+n_-}(y) &= \frac{d^j}{dx^j} Q_-\left(-i\frac{d}{dx}\right) y(x)\Big|_{x=1} = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, n_+ - 1. \end{aligned} \tag{41}$$

Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что ядро $k_0(x-\tau)$ является функцией Грина дифференциального оператора (40), (41), т. е. выполнены следующие условия:

а) $Q\left(-i\frac{d}{dx}\right) k_0(x-\tau) = \delta(x-\tau)$;

б) функция $k_0(x-\tau)$ удовлетворяет всем краевым условиям (41) в точке 0 при $0 < \tau \leqslant 1$ и в точке 1 при $0 \leqslant \tau < 1$.

Доказательство утверждений а), б) очевидно. В самом деле,

$$Q\left(-i\frac{d}{dx}\right) k_0(x-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{Q(z)}\, Q\left(-i\frac{d}{dx}\right) e^{-i(x-\tau)z}\, dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x-\tau)z}\, dz = \delta(x-\tau).$$

Далее, учитывая (39), имеем

$$\frac{d^j}{dx^j} Q_+\left(-i\frac{d}{dx}\right) k_0(x-\tau)\Big|_{x=0} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(-iz)^j}{Q_-(z)} e^{iz\tau} dz. \tag{42}$$

Если $j = 0, 1, \ldots, n_- - 1$, то функция $(-iz)^j Q_-^{-1}(z)$ убывает и голоморфна в верхней полуплоскости. Согласно лемме Жордана последний интеграл в равенствах (42) равен нулю, если $\tau > 0$. Аналогично

$$\frac{d^j}{dx^j} Q_-\left(-i\frac{d}{dx}\right) k_0(x-\tau)\Big|_{x=1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(-iz)^j}{Q_+(z)} e^{-iz(1-\tau)} dz = 0,$$

если $j = 0, 1, \ldots, n_+ - 1$ и $\tau < 1$.

Заметим, что из (4) и (39) следует, что $k(\eta) = P\left(-i\frac{d}{d\eta}\right) k_0(\eta)$, поэтому

$$Kf(x) = P\left(-i\frac{d}{dx}\right) K_0 f(x). \tag{43}$$

Рассмотрим оператор $L(\lambda)$, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y, \lambda) = Q\left(-i\frac{d}{dx}\right) y - \lambda P\left(-i\frac{d}{dx}\right)$$

и краевыми условиями (41). Области определения операторов $L(\lambda)$ и K_0^{-1} совпадают, поэтому из (40), (42) следует, что $L(\lambda) = (I - \lambda K) K_0^{-1}$. Но тогда $K_0(I - \lambda K)^{-1} = L^{-1}(\lambda)$ и, учитывая (43), получим

$$K(I-\lambda K)^{-1} = (K^{-1} - \lambda I)^{-1} = P\left(-i\frac{d}{dx}\right) L^{-1}(\lambda).$$

Таким образом, резольвента оператора K^{-1} есть интегральный оператор с ядром $G(x, \xi, \lambda) = P\left(-i\frac{d}{dx}\right)\Gamma(x, \xi, \lambda)$, где $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ — функция Грина дифференциального оператора $L(\lambda)$.

Известно также [6], что в окрестности простого полюса λ_k (λ_k^{-1} — с.з. оператора K) для оператора $K(I - \lambda K)^{-1}$ имеется представление

$$K(I-\lambda K)^{-1} = \frac{(\cdot, z_k) y_k}{\lambda - \lambda_k} + \tilde{K}(\lambda), \tag{44}$$

где $\tilde{K}(\lambda)$ — аналитическая оператор-функция в окрестности точки λ_k, y_k, z_k — с.ф. операторов K и K^*, отвечающие с.з. λ_k, $\overline{\lambda}_k^{-1}$ соответственно.

3. Положим $r = n - m$ и $\lambda = \rho^r$. Пусть $z_1(\rho), \ldots, z_n(\rho)$ — корни полинома $Q(-iz) - \rho^r P(-iz)$, которые, согласно лемме 1, имеют асимптотику (7), (8). Тогда функции $y_j(x, \rho) = e^{xz_j(\rho)}$, $j = 1, \ldots, n$, образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения

$$Q\left(-i\frac{d}{dx}\right) y - \rho^r P\left(-i\frac{d}{dx}\right) y = 0, \tag{45}$$

а функция Грина $\Gamma(x, \xi, \rho)$ оператора $L(\rho)$ находится по формулам (11) — (16).

Положим

$$v_j(x) = P\left(-i\frac{d}{dx}\right) y_j(x) = P(-iz_j) y_j(x), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тогда функция $G(x, \xi, \rho)$ будет находиться по тем же формулам, если только в (14) и в первой строке определителя (13) функции $y_j(x)$ заменить на $v_j(x)$.

Анализируя эти формулы с учетом (7), (8), нетрудно убедиться, что структура и асимптотика функции $G(x, \xi, \rho)$ такая же, как у функции Грина дифференциального оператора порядка r с распадающимися краевыми условиями, среди которых n_+ условий сосредоточено в точке 1 и $r - n_+$ в точке 0 (здесь существенно, что $n_- - n_+ > m$). Это достаточно ясно, поскольку среди функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ фундаментальной системы решений уравнения (45) только функции $y_1(x), \ldots, y_r(x)$ играют основную роль, а остальные по существу не участвуют в асимптотике. Этим, в частности, объясняется, что асимптотика с з. оператора K^{-1}, найденная в [7], совпадает с асимптотикой с.з. соответствующего дифференциального оператора с распадающимися краевыми условиями (см. работу [3]).

Метод, примененный для доказательства теоремы 1, полностью переносится для доказательства суммируемости рядов по корневым векторам оператора K. Доказательство лемм 2—5 проводится без существенных изменений, доказательство леммы 6 следует из (44) и полноты корневых векторов K^* (оператор K^* также представим в виде (3), (4)).

Заметим также, что порядки краевых условий (41) не равны нулю, поэтому справедлива

Т е о р е м а 2. *Для всякой функции $f(x) \in W_1^p$ при некотором $p > 1$ ряд Фурье по системе с.п.ф. оператора K равномерно суммируется методом Абеля порядка* $\frac{1}{n-m} < \alpha \leqslant \frac{1}{n-m-2n_+}$, *если только* $n_- - n_+ > m$ *и* $n - m - 2n_+ \leqslant 4$.

В случае $n_+ - n_- > m$ числа n_+, n_- в формулировке теоремы нужно поменять местами.

§ 4. Отрицательные результаты

1. Наиболее важным моментом при доказательстве теоремы 1 явилось утверждение леммы 3 о возможности представления функции Грина на лучах γ_0, γ_1 в виде (25), причем для чисел, участвующих в представлении (25), например на луче γ_0, имели место неравенства

$$|\arg e^{i\pi/n}(\mu_s + \omega_\alpha x - \omega_j \xi)| \geqslant \varphi_0, \tag{46}$$

где $\varphi_0 - (n - l + 1)\pi/n$, если только $2l - n \leqslant 4$.

Оказывается, что неравенства типа (46) в случае $|2l - n| > 4$ не будут выполнены ни при каком $\varphi_0 > 0$. Из следующих ниже предложений будет следовать, что соответствующая теорема суммируемости в этом случае не имеет места.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть при $t > 0$*

$$\Phi(t) = \int_1^\infty \rho^{-N} e^{\rho\Omega} e^{-\rho^\alpha t^\alpha} d\rho,$$

где $\alpha > 1$, $N \geqslant 1$ — натуральное, Ω — комплексное число. Если

$$|\arg \Omega| < \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right),$$

то не существует конечного предела функции $\Phi(t)$ при $t \to +0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию

$$E(t) = \int_1^\infty \rho^{-N} P(\rho) e^{-\rho^\alpha t^\alpha} d\rho,$$

где $P(\rho)$ — полином, совпадающий с первыми N членами тейлоровского разложения в нуле функции $e^{\rho\Omega}$, т. е.

$$P(\rho) = 1 + \Omega\rho + \ldots + \frac{\Omega^{N-1}\rho^{N-1}}{(N-1)!}.$$

Имеем

$$|E(t)| = \frac{1}{p}\left|\int_1^\infty \rho^{-N-\alpha+1} P(\rho)\, e^{-\rho^\alpha t^\alpha} d\rho^\alpha\right| \leqslant C\int_1^\infty e^{-\rho^\alpha t^\alpha} d\rho^\alpha \leqslant Ct^{-\alpha}. \tag{47}$$

Положим при $t > 0$

$$M(t) = \int_0^\infty \rho^{-N}(e^{\rho\Omega} - P(\rho))\, e^{-\rho^\alpha t^\alpha} d\rho \tag{48}$$

(здесь интегрирование от 0 до ∞ определено в силу специального выбора $P(\rho)$).

Заметим, что если существует конечный предел функции $\Phi(t)$ при $t \to +0$, то функция $\Phi(t) - E(t)$ имеет при $t \to +0$ оценку (47), поэтому при всех $t > 0$ справедлива оценка

$$|M(t)| \leqslant C_1 (1 + |t|^{-\alpha}). \tag{49}$$

Проведем в (48) замену $\rho t = \mu$. Полагая $z = t^{-1}$, получим

$$M(z^{-1}) = \int_0^\infty \mu^{-N} z^{-N+1}(e^{\Omega z\mu} - P(z\mu))\, e^{-\mu^\alpha} d\mu. \tag{50}$$

Очевидно, $M(z^{-1})$ — целая функция переменной z. Из представления (50) легко следует (достаточно провести оценку, аналогичную (47)), что в полуплоскости $\operatorname{Re} z\Omega \leqslant 0$ функция $M(z^{-1})$ растет не быстрее полинома, т. е.

$$|M(z^{-1})| \leqslant C(1 + |z|^\alpha). \tag{51}$$

Поскольку функция $e^{-\mu^\alpha}$ быстро убывает в угле $|\arg \mu| < \pi/2\alpha$, то интеграл по положительному лучу в формуле (50) равен интегралу по любому лучу, принадлежащему сектору $|\arg \mu| < \pi/2\alpha$. Отсюда легко следует, что оценка (51) в самом деле справедлива в секторе S раствора $\pi + (\pi/\alpha)$, биссектрисой которого служит луч $\arg z = -\arg \overline{\Omega}$.

Из неравенства

$$|\mu z\Omega| \leqslant \frac{\mu^\alpha}{\alpha} + \frac{|z\Omega|^\beta}{\beta}, \quad \beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1},$$

следует, что функция $M(z^{-1})$ имеет порядок роста, не больший чем $\beta = \alpha/(\alpha - 1)$.

Предположим, что на некотором луче γ, не принадлежащем сектору S, функция $M(z^{-1})$ имеет оценку (51). Тогда углы между лучом γ и лучами, являющимися границей сектора S, меньше чем $\pi(1 - \alpha^{-1})$. Так как порядок роста $M(z^{-1})$ не превышает $\alpha/(\alpha - 1)$, то из теоремы Фрагмена и Линделефа (см., например, [11], стр. 70) следует, что $M(z^{-1})$ — многочлен степени не выше $[\alpha]$ (здесь $[\alpha]$ — целая часть числа α). Следовательно, функция $M(z^{-1})$ не может иметь оценку (51) ни на каком луче, не принадлежащем сектору S.

Если $|\arg \Omega| < \pi(1 - \alpha^{-1})/2$, то положительный луч не входит в сектор S, поэтому для функции $M(t)$ не может выполняться оценка (49) для всех $t > 0$. Полученное противоречие доказывает справедливость предложения 1.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть при* $t > 0$

$$F(t) = \int_1^\infty \rho^{-N} \sum_{k=1}^{K} a_k e^{\rho\Omega_k} e^{-\rho^\alpha t} d\rho,$$

где $\alpha > 1$, $N \geqslant 1$ — *натуральное*, a_k, Ω_k, $k = 1, \ldots, K$, — *комплексные числа. Если при некотором* k_0 *выполнено неравенство*

$$|\arg \Omega_{k_0}| < \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right), \tag{52}$$

причем $a_{k_0}\Omega_{k_0} \neq 0$, $\Omega_{k_0} \neq \Omega_k$, $k \neq k_0$, *то не существует конечного предела функции* $F(t)$ *при* $t \to +0$.

Доказательство. Имеем $F(t^\alpha) = \sum_{k=1}^{K} a_k \Phi_k(t)$, где

$$\Phi_k(t) = \int_1^\infty \rho^{-N} e^{\rho\Omega_k} e^{-\rho^\alpha t^\alpha}\, d\rho. \tag{53}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что неравенство (52) выполнено для всех $k = 1, \ldots, K$, поскольку, если $|\arg \Omega_k| \geqslant \pi(1 - \alpha^{-1})/2$, существует конечный предел функции $\Phi_k(t)$ при $t \to +0$. В этом легко убедиться, заменяя интеграл по положительному лучу в формуле (53) интегралом по другому лучу, принадлежащему сектору $|\arg \rho| \leqslant \pi/2\alpha$.

Следуя рассуждениям, приведенным при доказательстве предложения 1, рассмотрим функции $M_k(t)$, определяемые аналогично (48). Полагая $z = t^{-1}$, получим, что $M(z^{-1}) = \sum_{k=1}^{K} a_k M_k(z^{-1})$ является целой функцией порядка не выше $\alpha/(\alpha - 1)$.

В секторе S_k раствора $\pi + (\pi/\alpha)$, биссектрисой которого является луч $\arg z = -\arg \overline{\Omega}_k$, справедлива оценка $|M_k(z^{-1})| \leqslant C_k(1 + |z|^\alpha)$.

Следовательно, в секторе $T = \bigcap_{k=1}^{K} S_k$ выполняется оценка

$$|M(z^{-1})| \leqslant C(1 + |z|^\alpha). \tag{54}$$

Если неравенства (52) выполнены для всех $k = 1, \ldots, K$, то сектор T содержит в себе сектор T_0 раствора, большего π/α, биссектрисой которого служит отрицательный луч. Предполагая, что оценка (54) выполнена на положительном луче, из теоремы Фрагмена и Линделефа получим, что $M(z^{-1})$ — многочлен, что противоречит условиям предложения 2. Отсюда следует, что функция $F(t^\alpha)$, а поэтому и функция $F(t)$ не имеют конечного предела при $t \to +0$.

2. Рассмотрим оператор L, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y) = y^{(n)}$$

и краевыми условиями

$$y'(0) = \ldots = y^{n-1}(0) = y(1) = 0.$$

В этом случае $2l - n = n - 2$, в частности, при $n \geqslant 7$ имеем $2l - n \geqslant 5$. Через $\mathscr{D}(L)$ будем обозначать область определения оператора L. Справедливо следующее

Предложение 3. *Если* $n \geqslant 7$, *то для любого числа* $\alpha > 0$ *найдутся такие функции* $f(x) \in \mathscr{D}(L)$, *что их ряды по с.п.ф. оператора* L *не суммируются методом Абеля порядка* α.

Доказательство. Пусть $\omega_j = e^{(2j-1)\pi/n}$, $j = 1, \ldots, n$, — корни n-й степени из -1. По формулам (11) — (16) легко найти функцию Грина оператора $L + \rho^n I$ (при $x \geqslant \xi$)

$$G(x, \xi, \rho) \underset{x \geqslant \xi}{=} \rho^{-(n-1)} \left(\sum_{s=1}^{n} e^{\omega_s (x-\xi)\rho} - \Delta^{-1}(\rho) \sum_{j=1}^{n} e^{\omega_j (1-\xi)\rho} \sum_{k=1}^{n} e^{\omega_k x\rho} \right), \tag{55}$$

где

$$\Delta(\rho)=\sum_{j=1}^{n} e^{\omega_j\rho}. \tag{56}$$

При $x\leqslant\xi$ вне кружков радиуса $\varepsilon>0$ с центрами в нулях функции $\Delta(\rho)$ известна (см. [3]) оценка

$$|G(x,\ \xi,\ \rho)|\leqslant C\,|\rho|^{-(n-1)}. \tag{57}$$

Из результатов работы [3] легко следует, что суммирование рядов по с.п.ф. оператора L методом Абеля порядка α при $\alpha\leqslant 1/n$ не определено в том смысле, что найдутся такие функции $f(x)\in\mathscr{D}(L)$, что ряд (5) не сходится при всех $t>0$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $\alpha>1/n$.

Легко убедиться в справедливости формулы ($\rho=0$ не есть с.з. оператора L, $f(x)\in\mathscr{D}(L)$)

$$\rho^{-n}f(x)-\int_0^1 G(x,\xi,\rho)\,f(\xi)\,d\xi=\rho^{-n}\int_0^1 G(x,\xi,\rho)\,Lf(\xi)\,d\xi.$$

Тогда из леммы 6 и оценки (57) следует, что для суммируемости ряда (5) методом Абеля порядка α необходимо и достаточно существование при $t\to+0$ предела функции

$$F(x,t)=\int_\Gamma \rho^{-n}e^{-\rho^{\alpha n}t}\int_0^x G(x,\xi,\rho)\,Lf(\xi)\,d\xi\,d\rho, \tag{58}$$

где контур Γ асимптотически направлен по лучам γ_0, γ_1: $\arg\rho=\pm\varepsilon$, $0<\varepsilon<\min(\pi/n,\ \pi/2\alpha)$.

На луче γ_0 имеется представление

$$G(x,\xi,\rho)\underset{x\geqslant\xi}{=}\sum_{k,s,j}c_{ksj}\exp\{(\mu_s+\omega_k x-\omega_j\xi)\rho\}+\hat G(x,\xi,\rho), \tag{59}$$

причем функция $\hat G(x,\ \xi,\ \rho)$ экспоненциально убывает. Учитывая, что $G(x,\ \xi,\ \rho)$ вещественна на вещественной оси, получим, что предел (58) при $t\to+0$ существует тогда и только тогда, когда существует предел при $t\to+0$ функции

$$M(x,t)=\int_0^\infty \rho^{-n}e^{-\rho^{\alpha n}t}\int_0^x\Big(\sum_{k,s,j}\bar c_{ksj}\exp\{(\bar\mu_s+\bar\omega_k x-\omega_j\xi)\rho\}-$$
$$-c_{ksj}\exp\{(\mu_k+\omega_k x-\omega_j\xi)\rho\}\Big)Lf(\xi)\,d\xi\,d\rho.$$

Из (55), (56) следует, что число

$$\mu_1+\omega_3x-\omega_1\xi=\omega_1-\omega_n-\omega_1\xi+\omega_3x=$$
$$=\left(x\cos\frac{3\pi}{n}-\xi\cos\frac{\pi}{n}\right)+i\left((2-\xi)\sin\frac{\pi}{n}-x\sin\frac{3\pi}{n}\right)$$

участвует в представлении (59).

Легко видеть, что при $n\geqslant 7$ для любого $\delta>0$ существуют такие числа $0\neq\xi_0<\xi_1<x_0<x_1$, что для всех $\xi\in[\xi_0,\ \xi_1]$, $x\in[x_0,\ x_1]$ выполнены условия

$$0<|\arg(\mu_1+\omega_3x-\omega_1\xi)|<\delta,$$
$$\mu_1+\omega_3x-\omega_1\xi\neq\mu_s+\omega_kx-\omega_j\xi,\qquad s,\ k,\ j\neq 1,3,1.$$

Полагая $\delta = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$ и $f(\xi) = L^{-1}h(\xi)$, где

$$h(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in [\xi_0, \xi_1], \\ 0, & \xi \notin [\xi_0, \xi_1], \end{cases}$$

из предложения 2 получим, что функция $M(x, t)$ не имеет предела при $t \to +0$ для всех $x \in [x_0, x_1]$.

Очевидно, предела не существует и в метрике пространства L_2, поскольку в противном случае для любой функции $g(x) \in L_2$ существовал бы $\lim\limits_{t\to+0} (M(t), g)$. Рассматривая в качестве $g(x)$, например, характеристическую функцию отрезка $[x_0, x_1]$, получим, что последнее невозможно в силу предложения 2. Тем самым предложение 3 доказано.

Рассмотрение конкретного дифференциального оператора было проведено для простоты изложения. Справедливость предложения 3 аналогично можно доказать для оператора L, порожденного дифференциальным выражением с постоянными коэффициентами и произвольными распадающимися краевыми условиями, когда $|2l - n| \geqslant 5$. Это предложение имеет место и для оператора свертки, если только $n - m - 2n_+ \geqslant 5$ $(n_- > n_+)$.

Отметим также, что неравенства типа (46) в утверждении леммы 3 являются точными, поэтому из предложения 2 следует, что граница для порядка суммируемости в теоремах 1, 2 является также точной.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 14 июня 1978 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ш к а л и к о в А. А., О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными распадающимися краевыми условиями, Функц. анализ **10**, вып. 4 (1976), 69—80.
2. Х р о м о в А. П., Конечномерные возмущения вольтерровых операторов, Докторская диссертация, Новосибирск, 1973.
3. Х р о м о в А. П., Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися краевыми условиями, Матем. сб. **70** (1966), 310—329.
4. Н а й м а р к М. А., Линейные дифференциальные операторы, М., «Наука», 1968.
5. Х р о м о в А. П., О суммировании разложений по собственным функциям краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с распадающимися краевыми условиями и об одном аналоге теоремы Вейерштрасса, Сб. «Обыкновенные дифференциальные уравнения и разложения в ряды Фурье», Саратовский ун-т, 1968.
6. Л и д с к и й Б. В., О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов, Труды Моск. матем. об-ва **XI** (1962), 3—35.
7. П а л ь ц е в Б. В., Асимптотическое поведение собственных значений интегральных операторов свертки на конечном интервале с ядрами, преобразование Фурье которых рациональны, ДАН СССР **194**, № 4 (1970), 774—777.
8. П а л ь ц е в Б. В., Разложение по собственным функциям интегральных операторов свертки на конечном интервале с ядрами, преобразование Фурье которых рациональны. «Слабо» несамосопряженные регулярные ядра, Изв. АН СССР, серия матем. **36** (1972), 591—634.
9. Л ю б а р с к и й Ю. И., Об операторе свертки на конечном интервале, УМН **XXXI**, вып. 3, (1976) 221.
10. З и г м у н д А., Тригонометрические ряды, т. 2, М., «Мир», 1965.
11. Л е в и н Б. Я., Распределение корней целых функций, М., Гостехиздат, 1956.