N. A. Alimova, A. M. Tsirlin, Extraction of capital in microeconomic systems,
Program Systems: Theory and Applications, 2011, Volume 2, Issue 2, 67–88

https://www.mathnet.ru/eng/ps35

ISSN 2079-3316 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ № 2(6), 2011, с. 67–88

УДК 517.977.5:33

Н. А. Алимова, А. М. Цирлин

Задача извлечения капитала в изолированных микроэкономических системах

Аннотация. В работе рассмотрены задачи извлечения базисного ресурса в замкнутых экономических системах, которые можно формулировать и решать в рамках моделей необратимой экономики. Дано определение *прибыльности* экономической системы. Сформулированы задачи о получении прибыльности экономических систем при различного рода ограничениях: продолжительность процесса, структура системы, заданные начальные состояния и пр. Для экономических систем различной структуры при неограниченном времени получены соотношения, позволяющие найти численное значение прибыльности при заданных начальных данных. Получено условие минимальной диссипации капитала в процессах ресурсообмена. Введено понятие скорректированной цены и показано, что оптимальные закупки подчинены условиям минимальной диссипации и равенству скорректированных цен в конечный момент времени.

Ключевые слова и фразы: экономические системы, прибыльность, минимальная диссипация.

Введение

Экономические системы состоят из большого числа элементарных агентов экономической деятельности, каждый из которых свободен в своих действиях и подчинён общим для совокупности таких агентов ограничениям. Между экономическими системами существуют потоки обмена товарными и денежными ресурсами, причём в результате таких обменов системы приходят к некоторому стационарному состоянию, если они изолированы от внешних воздействий. Все это говорит об аналогии экономических и термодинамических систем.

Для реализации этой аналогии, для применения к экономическим системам термодинамического подхода нужно было ввести параметры состояния, охарактеризовать необратимость процессов. Первые шаги в реализации этой аналогии были сделаны в работах Джона фон Неймана [1]. Дальнейшие исследования Самуэльсона [2,3], Лихнеровича [4], Розоноэра [5], Цирлина [6–8] дополнили и расширили эту аналогию. М. Лихнерович дал описание поведения экономических агентов и потоков обмена ресурсами в термодинамических терминах. Наиболее полно анализ обмена и распределения ресурсами в равновесной экономике был проведён Л. И. Розоноэром. Не менее заманчиво и перспективно распространить аналогию между термодинамикой и экономикой на процессы, протекающие ограниченное время или имеющие заданную интенсивность. То есть распространить на экономику методологию термодинамики при конечном времени.

Действительно, в экономике особенно важен фактор времени, важны не только, а иногда и не столько объём капитала или количество использованного ресурса, а интенсивность извлечения прибыли или потребления ресурса.

Большую роль в описании макросистем играет величина, изменение которой характеризует необратимость протекающих в них процессов. Эта величина при приближении макросистемы к равновесному состоянию растёт и в равновесии достигает максимума. В термодинамике такой величиной является энтропия. В экономике роль энтропии играет функция благосостояния, доказательство существования которой основано на невозможности извлечения капитала при контакте лишь с одним экономическим агентом [9,10].

Аналогия между равновесными термодинамическими и экономическими системами детально изучена в [11–13]. Термодинамический подход к анализу экономических систем Л. И. Розоноэр предложил называть ресурсодинамикой.

При таком подходе любая экономическая система рассматривается как совокупность экономических агентов (ЭА), каждый из которых может представлять собой множество индивидуумов (элементарных ЭА), усреднённое поведение которых определяет состояние ЭА. В некоторых случаях по аналогии с термодинамикой говорят о системе ЭА, тогда каждый из них оказывается подсистемой.

Экономические агенты характеризуются набором переменных (интенсивными и экстенсивными) и функцией благосостояния. Они взаимодействуют друг с другом, в результате чего происходит обмен ресурсами. При этом каждый из ЭА стремится максимизировать свою осознанную или не осознанную полезность, сознательно выбирая, какой ресурс и в каком количестве обменивать.

Как известно, основной из задач в термодинамике является задача извлечения работы. В экономике аналогом этой задачи об оптимальной работе является задача об извлечении базисного ресурса в системах, различные части которых обладают как наличным капиталом, так и капиталом, овеществленным в форме того или иного ресурса. Базисным можно считать ресурс, который для любого из ЭА полезен, т.е. оценка которого положительна. Далее будем предполагать, что таким ресурсом является наличный капитал в той или иной форме.

Так же как в термодинамике, из экономической системы невозможно извлечь капитал без активной подсистемы. Роль активной подсистемы здесь играет посредническая или производственная фирма.

При взаимодействии экономических агентов через посредника необратимость процессов ресурсообмена уменьшается. Цены, устанавливаемые посредником, являются управляющими воздействиями в задачах оптимизации экономических систем.

1. Прибыльность

Среди различных видов ресурсов в экономике особое место занимает капитал (базисный ресурс), который свободно принимается в обмен на любой другой. Базисный ресурс аналогичен работе.

Определение: будем называть *прибыльностью* экономической системы максимальное количество базисного ресурса, которое может быть получено из системы в процессе ресурсообмена при тех или иных ограничениях.

При этом система может содержать некоторое число экономических агентов и не более одного рынка с постоянными ценами (экономического резервуара). Аналогично тому, как диссипация в термодинамике уменьшает эксергию тепла, диссипация капитала уменьшает прибыльность системы.

Ограничения, наложенные на систему, уменьшают значения прибыльности. К ним можно отнести ограничение на продолжительность процесса, на множество конечных состояний экономических агентов, требование неотрицательности значений тех или иных переменных системы.

Для системы, которая содержит несколько рынков, задача о расчёте прибыльности при отсутствии ограничений не имеет решения, так как посредник в такой системе может извлечь сколь угодно большое количество базисного ресурса. Если ограничение на продолжительность процесса отсутствует, в системе имеется один экономический резервуар и задано начальное состояние ЭА-ов, то прибыльность является аналогом эксергии, которая используется при анализе термодинамических систем. Далее решим задачи о нахождении значений предельной прибыльности экономических систем при различных условиях и разных конфигурациях систем.

2. Постановка задачи о получении максимальной прибыли в экономике. Условие минимальной диссипации

Рассмотрим экономическую систему, состоящую из k ЭА, каждый из которых располагает некоторым запасом ресурса N_i $(i = \overline{1,k})$ и базисного ресурса M_i. Оценка ресурса p_i, (минимальная стоимость, за которую экономический агент согласен продать ресурс, и максимальная, за которую он согласен его купить) зависит от N_i и M_i. Одной из подсистем может быть рынок совершенной конкуренции, для которого оценка ресурса p_- постоянна [2].

Будем предполагать, что система замкнута, то есть может обмениваться с окружением только капиталом, но не ресурсом. При контакте i-ой и j-ой подсистем возникают потоки ресурса n_{ij} и капитала n^0_{ij}. При этом поток ресурса направлен от подсистемы с меньшей оценкой к подсистеме с большей оценкой, а поток капитала направлен навстречу потоку ресурса.

В системе имеется фирма (посредник), её целью является такая организация ресурсообмена, при которой фирма извлекает из системы максимальное количество капитала M. В дальнейшем мы будем предполагать, что непосредственный обмен ресурсами между экономическими агентами невозможен, что фирма назначает цены покупки и продажи ресурса, стремясь при этом добиться максимума M, а потоки закупок и продаж зависят от цены c_i, предложенной фирмой i-ой подсистеме, и оценки p_i подсистемой i-го ресурса, то есть

$$n_i = n_i(p_i, c_i), \quad n_i = 0 \quad \text{при} \quad p_i = c_i, \tag{1}$$

$$\operatorname{sign}(n_i) = \operatorname{sign}(c_i - p_i), \quad i = \overline{1,k}.$$

Для рынка

$$n_0 = n_0(p_-, c_0). \tag{2}$$

Знак потока будем считать положительным, если он направлен в сторону фирмы. Очевидно, что поток капитала

$$n_i^0(p_i, c_i) = -c_i n_i(p_i, c_i), \quad i = \overline{0, k}. \tag{3}$$

Запасы ресурса и капитала в i-ой подсистеме изменяются как

$$\begin{gathered} \dot{N}_i = -n_i(p_i, c_i), \quad N_i(0) = N_{i0}, \\ \dot{M}_i = c_i n_i(p_i, c_i), \quad M_i(0) = M_{i0}, \\ \frac{dM_i}{dN_i} = -c_i, \quad i = \overline{1, k}. \end{gathered} \tag{4}$$

Будем предполагать, что оценки $p_i(N_i, M_i)$ монотонно уменьшаются с ростом N_i при фиксированном M_i и, как правило, растут с ростом M_i при фиксированном N_i. Впрочем, оценка ресурса может быть и независимой от объёма капитала в подсистеме.

Ниже мы найдём, какой объём базисного ресурса может извлечь фирма за сколь угодно большое и за конечное время для случаев, когда в системе имеется рынок и когда он отсутствует.

3. Продолжительность процесса не ограничена

3.1. В системе имеется рынок совершенной конкуренции

Обозначим через p_{j-} стоимость j-ого ресурса на рынке, тогда фирма сможет извлекать капитать до тех пор, пока оценки j-ого ресурса в любой из подсистем не окажутся равными p_{j-}. Процесс ресурсообмена заканчивается в состоянии равновесия, когда оценки всех подсистем равны оценкам рынка:

$$p_{ji}(\overline{N_i}, \overline{M_i}) = p_{j-}, \qquad i = \overline{1, k}, \quad j = \overline{1, m}. \tag{5}$$

Здесь через $\overline{N_i}$, $\overline{M_i}$ обозначены равновесные запасы ресурса и капитала. Начальные запасы капитала ЭА-ов заданы, запас капитала экономического резервуара изменяется как

$$\Delta M_- = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \left(\overline{N_{ji}} - N_{ji}(0)\right) p_{j-}. \tag{6}$$

Фирма при отсутствии ограничения на продолжительность процесса закупает ресурс по самой низкой цене p_i, а продаёт по самой высокой, поэтому

$$\frac{dM_i}{dN_i} = -p_i(N_i, M_i), \qquad M_i(N_{i0}) = M_{i0}. \tag{7}$$

Эти уравнения позволяют найти $M_i(N_i, N_{i0}, M_{i0})$. Если задана функция благосостояния для подсистемы, то её прирост в процессе обмена равен нулю

$$S_i(\overline{N_i}, \overline{M_i}) = S_i(N_i(0), M_i(0)), \qquad i = \overline{1, k}, \tag{8}$$

и состояние равновесия определяется условиями (5), (8). Прибыльность при контакте с i-ым ЭА равна разности между суммарным начальным и конечным капиталом ЭА, как следует из (7):

$$E_i = M_{i0} - \overline{M_i} = -\int_{N_{i0}}^{\overline{N_i}} p_i(N_i, M_i(N_i))dN_i. \tag{9}$$

Прибыльность системы в целом равна сумме разностей между начальным и конечным капиталом ЭА за вычетом приращения капитала экономического резервуара (6):

$$E_\infty = \sum_{i=1}^{k}(M_{i0} - \overline{M_i}) - \Delta M_-. \tag{10}$$

Условия (5), (7) (или (8)) определяют $2n$ неизвестных $\overline{N_i}$, $\overline{M_i}$, а значит и E_∞.

Следует отметить, что функция E_∞ является функцией начального состояния, то есть зависит от начального распределения ресурсов, и не зависит от кинетики. Она всегда больше или равна нулю. Случай, когда $E_\infty = 0$, соответствует равновесной системе.

Пример 1. Рассмотрим систему, состоящую из двух ЭА-ов, экономического резервуара и фирмы. Заданы начальные запасы ресурса и капитала для ЭА-ов – N_{i0}, M_{i0} $(i = 1, 2)$, и стоимость ресурса на рынке p_-.

Пусть оценки ресурса для агентов имеют вид:

$$p_i = \gamma_i \frac{M_i}{N_i}, \qquad i = 1, 2. \tag{11}$$

Система (7) перепишется как

$$\frac{dM_i}{dN_i} = -\gamma_i \frac{M_i}{N_i}, \qquad M_i(N_{i0}) = M_{i0},$$

отсюда находим $M_i(N_i)$:

$$M_i = \frac{M_{i0} \cdot N_{i0}^{\gamma_i}}{N_i^{\gamma_i}}, \qquad i = 1, 2. \tag{12}$$

Равновесные запасы ресурса $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ определим из условия (5), которое с учётом (11), (12) примет вид

$$\gamma_i \frac{M_{i0} \cdot N_{i0}^{\gamma_i}}{\overline{N_i}^{\gamma_i+1}} = p_-, \qquad i = 1, 2.$$

Получим

$$\overline{N_i} = \left(\frac{\gamma_i}{p_-} M_{i0} \cdot N_{i0}^{\gamma_i} \right)^{\frac{1}{\gamma_i+1}}, \qquad i = 1, 2, \tag{13}$$

и соответствующие им равновесные запасы капитала:

$$\overline{M_i} = \frac{p_-}{\gamma_i} \overline{N_i}, \qquad i = 1, 2. \tag{14}$$

Из условий (10), (14) получим предельное количество извлечённого капитала E_∞ для рассматриваемой системы. Прибыльность системы определяется равенством (10) и с учётом (13) равна

$$E_\infty = \sum_{i=1}^{2} \left(M_{i0} + p_- \left[N_{i0} - \frac{(\gamma_i + 1)}{\gamma_i} \left(\frac{\gamma_i}{p_-} M_{i0} N_{i0}^{\gamma_i} \right)^{\frac{1}{\gamma_i+1}} \right] \right). \tag{15}$$

Построим зависимость прибыльности от оценки ресурса на рынке $E_\infty(p_-)$. Зададим следующие начальные данные:

$$N_{10} = 50, \qquad M_{10} = 500, \qquad \gamma_1 = 0.6,$$
$$N_{20} = 200, \qquad M_{20} = 100, \qquad \gamma_2 = 0.2.$$

На рис. 1 представлен график прибыльности в зависимости от оценки $E_\infty(p_-)$ для заданного начального состояния системы. Здесь точка A соответствует минимально возможному значению прибыльности $E_{\infty\,\min} = 250.822$. А значение оценки ресурса на рынке, при котором прибыльность системы минимальна, равно $p_{-\,\min} = 0.621$.

Пример 2. Рассмотрим экономическую систему, состоящую из экономического резервуара, подсистемы конечной емкости (ЭА) и посредника. Пусть функция благосостояния для подсистемы имеет форму функции Кобба-Дугласа [14]:

$$S = M^{1/3} N_1^{1/2} N_2^{1/6}. \tag{16}$$

Заданы начальные запасы ресурсов и капитала

$$M(0) = 150, \quad N_1(0) = 20, \quad N_2(0) = 30, \quad S(0) = 42,$$

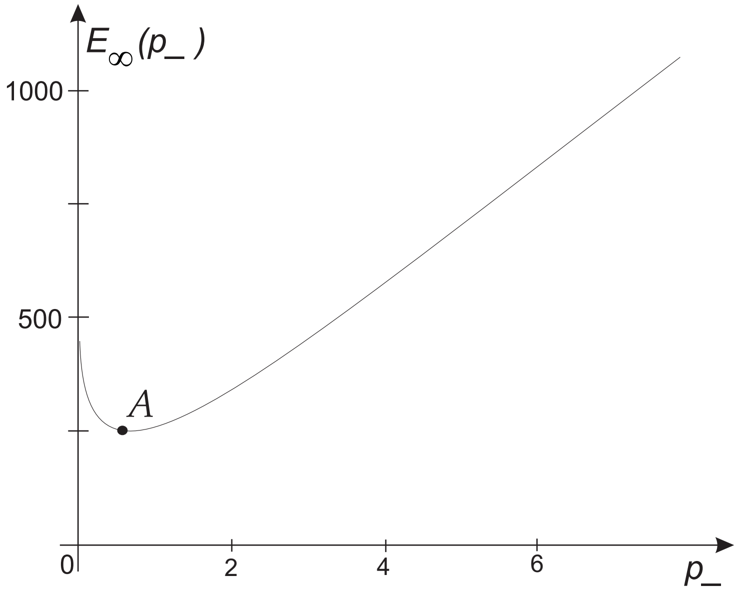

Рис. 1. Зависимость извлеченного капитала от оценки ресурса экономического резервуара

и равновесные цены экономического резервуара

$$p_{1-} = 5, \quad p_{2-} = 2.$$

В этом случае из условия (16) оценки ресурсов для ЭА имеют вид:

$$p_1(M, N_1) = \frac{3}{2}\frac{M}{N_1}, \qquad p_2(M, N_2) = \frac{1}{2}\frac{M}{N_2}. \tag{17}$$

Из уравнений (5), (8) с учётом (17) и начальных данных получаем систему уравнений, из которой определяем равновесное состояние подсистемы:

$$\overline{M}^{1/3}\overline{N}_1^{1/2}\overline{N}_2^{1/6} = 42, \tag{18}$$

$$\frac{3}{2}\frac{\overline{M}}{\overline{N}_1} = 5, \qquad \frac{1}{2}\frac{\overline{M}}{\overline{N}_2} = 2. \tag{19}$$

Подставляя найденные значения $\overline{M}, \overline{N}_1, \overline{N}_2$ в уравнения (10), получаем максимум извлечённого базисного ресурса. Он равен $E_\infty = 20,95$. Введем коэффициент a, изменения цен экономического резервуара, т.е. $p_{1-} = 5a$, $p_{2-} = 2a$, и построим зависимость $E_\infty(a)$ извлеченного капитала от масштаба цен (рис. 2).

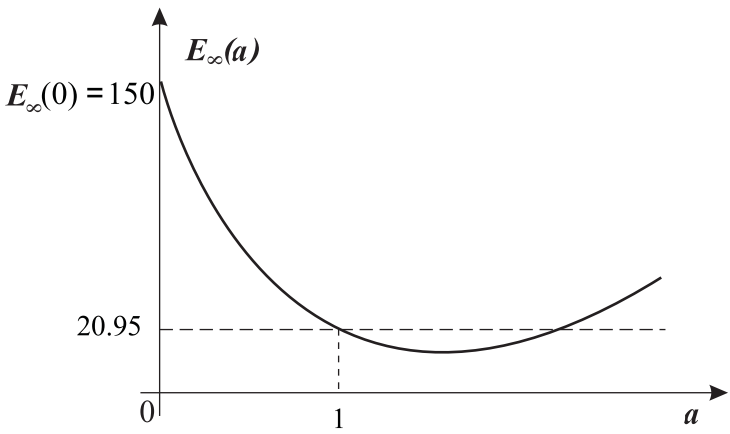

Рис. 2. Зависимость извлеченного капитала от масштаба цен экономического резервуара

3.2. В системе отсутствует рынок совершенной конкуренции

В этом случае при $t \to \infty$ оценки ресурса в подсистеме оказываются одинаковыми и равными некоторому значению $\overline{p}$. Вместо равенства (5) имеем

$$p_i(\overline{N_i}, \overline{M_i}) = \overline{p}, \qquad i = \overline{1, k}. \tag{20}$$

Значение $\overline{p}$ определено условием равенства нулю изменения запаса ресурса фирмы (она продаёт всё, что покупает), то есть

$$\sum_{i=1}^{k} (\overline{N_i} - N_{i0}) = 0. \tag{21}$$

Равенства (20), (21) наряду с уравнениями (7), (8) позволяют найти векторы $\overline{N}$, $\overline{M}$ и $\overline{p}$, определяющие прибыльность системы E_∞ в этом случае:

$$E_\infty = \sum_{i=1}^{k} (M_i(0) - \overline{M}_i). \tag{22}$$

Пример 3. Рассмотрим ту же систему, что в примере 1, только без рынка. Начальные запасы ресурса и капитала заданы – N_{10}, N_{20}, M_{10}, M_{20}. Зависимости оценок от текущих запасов M_i и N_i $(i = 1, 2)$ имеют вид:

$$p_1 = \alpha \frac{M_1}{N_1}, \qquad p_2 = \beta \frac{M_2}{N_2}. \tag{23}$$

С учётом этих зависимостей уравнения (7) примут вид:

$$\frac{dM_1}{dN_1} = -\alpha \frac{M_1}{N_1}, \quad M_1(N_{10}) = M_{10},$$
$$\frac{dM_2}{dN_2} = -\beta \frac{M_2}{N_2}, \quad M_2(N_{20}) = M_{20}.$$

Решая эти уравнения, находим $M_1(N_1)$ и $M_2(N_2)$:

$$M_1 = \frac{M_{10} \cdot N_{10}^{\alpha}}{N_1^{\alpha}}, \quad M_2 = \frac{M_{20} \cdot N_{20}^{\beta}}{N_2^{\beta}}. \tag{24}$$

Пользуясь условиями (20) и (21), найдём количество ресурса $\overline{N}_i$ у каждого агента после завершения обмена. Эти условия перепишутся как

$$\begin{cases} N_{10} + N_{20} = \overline{N}_1 + \overline{N}_2, \\ \alpha \dfrac{M_{10} N_{10}^{\alpha}}{\overline{N}_1^{\alpha+1}} = \beta \dfrac{M_{20} N_{20}^{\beta}}{\overline{N}_2^{\beta+1}}. \end{cases} \tag{25}$$

Для частного случая, когда $\alpha = \beta = \gamma$, получим аналитическое решение этой системы:

$$\overline{N}_1 = \frac{(N_{20} + N_{10}) \cdot (M_{10} N_{10}^{\gamma})^{\frac{1}{1+\gamma}}}{(M_{10} N_{10}^{\gamma})^{\frac{1}{1+\gamma}} + (M_{20} N_{20}^{\gamma})^{\frac{1}{1+\gamma}}},$$
$$\overline{N}_2 = \frac{(N_{20} + N_{10}) \cdot (M_{20} N_{20}^{\gamma})^{\frac{1}{1+\gamma}}}{(M_{10} N_{10}^{\gamma})^{\frac{1}{1+\gamma}} + (M_{20} N_{20}^{\gamma})^{\frac{1}{1+\gamma}}}.$$

Значения $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ определяют равновесные запасы капитала:

$$\overline{M}_1 = (M_{10} \cdot N_{10}^{\gamma})^{\frac{1}{1+\gamma}} \cdot W,$$
$$\overline{M}_2 = (M_{20} \cdot N_{20}^{\gamma})^{\frac{1}{1+\gamma}} \cdot W,$$

где

$$W = \left(\frac{(M_{10} N_{10}^{\gamma})^{\frac{1}{1+\gamma}} + (M_{20} N_{20}^{\gamma})^{\frac{1}{1+\gamma}}}{N_{20} + N_{10}} \right)^{\gamma}.$$

Подстановка этих выражений в (22) определяет прибыльность системы.

Расчитаем прибыльность системы без экономического резервуара для начальных данных из примера 1. Значение прибыльности в этом случае будет $E_\infty = 250.822$, что равно минимально возможному значению прибыльности в системе с рынком. На рис. 3 изображена зависимость прибыльности от оценки экономического резервуара, а пунктирной линией обозначено значение E_∞ для случая, когда резервуар в системе отсутствует.

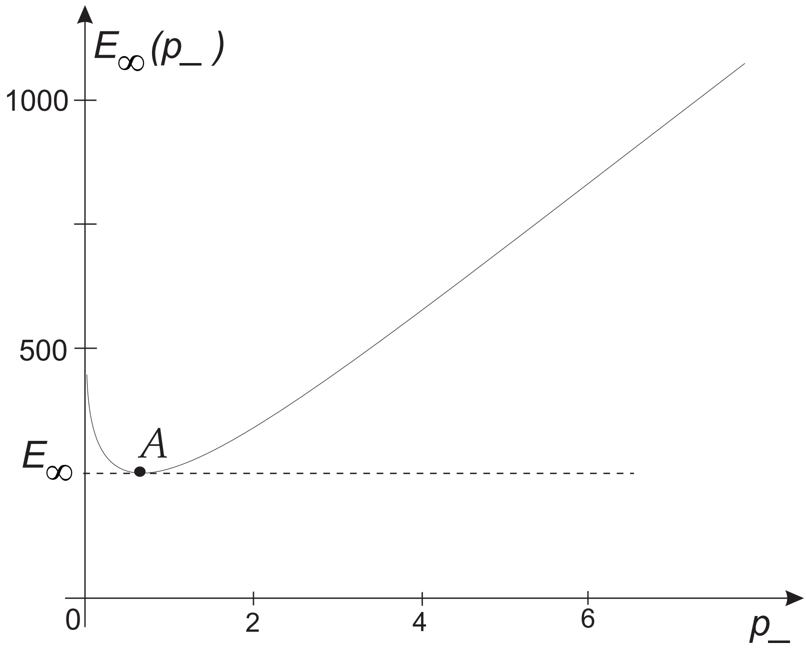

Рис. 3. Зависимость прибыльности от оценки экономического резервуара и значение прибыльности для случая, когда в системе резервуара нет

Проведём сравнение равновесного состояния в системе с посредником и в системе, где происходит обмен ресурсами между ЭА-ми через бесприбыльный аукцион. Обмен через бесприбыльный аукцион предполагает обмен по постоянной цене $\overline{p}$ такой, что суммарный капитал ЭА-ов не изменяется (то есть “аукционист” не извлекает прибыли). Уравнения (7) примут форму

$$\frac{dM_i}{dN_i} = -\overline{p}, \qquad i = \overline{1,k},$$

так что

$$\overline{M_i} = M_{i0} - \overline{p}(\overline{N_i} - N_{i0}), \qquad i = \overline{1,k}.$$

После подстановки этих выражений в условия (20), (21) они определяют $\overline{N_i}$ и $\overline{p}$.

Пример 4. Рассмотрим обмен через аукцион между двумя ЭА-ми и сравним этот процесс с обменом через посредника (пример 3). Пусть оценки ресурса имеют вид (23) и $\alpha = \beta = \gamma$. Начальное состояние системы задано. Тогда из условий (20), (21) получим значение цены аукциона $\overline{p}$

$$\overline{p} = \gamma \frac{M_{10} + M_{20}}{N_{10} + N_{20}} \tag{26}$$

и значения количества ресурсов у подсистем в конце процесса

$$\overline{N_i} = \gamma \frac{M_{i0+\overline{p}N_{i0}}}{\overline{p} + \gamma\overline{p}}, \qquad i = 1, 2. \tag{27}$$

Зададим следующие начальные данные:

$$M_{10} = 200, \quad M_{20} = 700, \quad N_{10} = 50, \quad N_{20} = 80, \quad \gamma = 3.$$

Для системы с посредником прибыльность $E = 13.852$, в системе без посредника $E = 0$. Конечные состояния также отличаются. В системе с посредником:

$$\overline{M}_1 = 228.51, \quad \overline{M}_2 = 657.638, \quad \overline{N}_1 = 33.523, \quad \overline{N}_2 = 96.477,$$

при обмене через аукцион:

$$\overline{M}_1 = 236.538, \quad \overline{M}_2 = 663.462, \quad \overline{N}_1 = 34.167, \quad \overline{N}_2 = 95.833.$$

Таким образом, присутствие в системе фирмы-посредника позволяет извлечь из неё базисный ресурс.

4. Продолжительность ресурсообмена ограничена

Будем предполагать, что продолжительность ресурсообмена задана и равна τ. В этом случае фирма вынуждена повышать цены закупки ресурса и снижать цену продажи по сравнению с равновесными оценками p_i. Это приведёт к необратимым потерям и уменьшит величину извлечённого капитала. Его максимально возможное значение E_τ окажется меньше, чем E_∞. Их различие

$$\Delta E = (E_\infty - E_\tau) > 0 \tag{28}$$

характеризует необратимость процесса ресурсообмена, а величина

$$\frac{d\Delta E}{dt} = \sigma(t) \tag{29}$$

характеризует диссипацию капитала.

4.1. Условие оптимальности закупок (продаж)

Рассмотрим обмен между фирмой и ЭА, в котором последний выступает как покупатель, и выясним, как следует менять цену продажи ресурса, чтобы за фиксированное время τ продать количество ресурса ΔN с максимальной выручкой. Ясно, что тем же условиям будет отвечать и цена покупки ресурса у ЭА, если фирма стремится затратить как можно меньше капитала. И в том и в другом случае объём капитала ЭА в конце процесса $M(\tau)$ при заданных граничных условиях должен быть минимален.

Задача формулируется как

$$\overline{M} = M(\tau) \to \min_c \tag{30}$$

при условиях

$$\overline{N} = N(\tau) = N_0 - \Delta N, \tag{31}$$

$$\frac{dN}{dt} = n(p, c), \qquad N(0) = N_0, \tag{32}$$

$$\frac{dM}{dt} = -cn(p, c), \qquad M(0) = M_0, \tag{33}$$

Перейдём от dt к dN, используя зависимость (32), в которой поток n на интервале $(0, \tau)$ не обращается в ноль. Ограничение на продолжительность и условие (33) перепишутся как

$$\int_0^\tau dt = \int_{\overline{N}}^{N_0} \frac{dN}{n(p(N,M),c)} = \tau, \tag{34}$$

$$\frac{dM}{dN} = -c. \tag{35}$$

В задаче (30), (34), (35) требуется найти такую зависимость $c^*(N)$, при которой капитал ЭА в момент τ окажется минимальным.

Условие оптимальности этой задачи получено в [15], оно имеет вид

$$\frac{d}{dN}\left[\frac{\partial n/\partial c}{n^2(p,c)}\right] = \frac{\partial n/\partial p \cdot (\partial p/\partial M)}{n^2(p,c)}. \tag{36}$$

Условие (36) – *условие минимальной диссипации капитала процесса ресурсообмена*, определяет $c(N, M)$ с точностью до константы, вычисляемой из равенства (34).

В случае, когда оценка ресурса p зависит только от его запаса N, $\partial p/\partial M = 0$ и условие (36) упрощается, принимая форму

$$\frac{\partial n/\partial c}{n^2(p,c)} = const. \tag{37}$$

Так, в случае, когда

$$n(p,c) = \alpha(c - p), \tag{38}$$

получим

$$\frac{\partial n}{\partial c} = \alpha$$

и тогда

$$\frac{1}{\alpha(c-p)^2} = const \Rightarrow c^* - p^* = r,$$

где r - постоянная. Так как из (34)

$$\int_{N_0}^{\overline{N}} \frac{dN}{r} = \alpha\tau,$$

получим

$$r = \frac{\Delta N}{\alpha\tau},$$

где $\Delta N = \overline{N} - N_0$. Из условия (37) при продаже ресурса получим

$$c_\tau^*(N, \overline{N}) = p(N) - \frac{\Delta N}{\alpha\tau}. \tag{39}$$

Максимум вырученного при продаже капитала

$$E_\tau(\overline{N}) = E_\infty(\overline{N}) - \frac{(\Delta N)^2}{\alpha\tau}, \tag{40}$$

где E_∞ – капитал, который фирма могла бы получить при $\tau \to \infty$, продавая ресурс по равновесным ценам $c(N) = p(N)$; чтобы её найти, надо воспользоваться формулами (10)–(22). Функция $E(\tau)$ показана на рис. 4. Здесь $\tau^0 = \frac{\Delta N^2}{\alpha E_\infty}$.

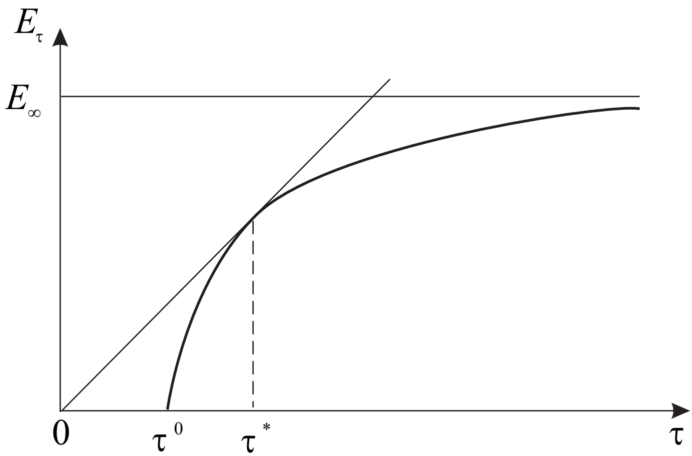

Рис. 4. Зависимость прибыльности системы от продолжительности процесса

Моменту $\tau = \tau^0$ соответствует бесприбыльная продажа ресурса. При $\tau < \tau^0$ фирма вынуждена доплачивать покупателю. При $\tau^* = 2\tau^0$ средняя интенсивность прибыли $e(\tau) = \frac{E(\tau)}{\tau}$ максимальна и с учётом равенства (40) равна

$$e^* = \frac{\alpha}{4}\left[\frac{E_\infty(\overline{N} - N_0)}{\overline{N} - N_0}\right]^2. \tag{41}$$

Потери капитала по сравнению с равновесным процессом оцениваются уменьшением прибыльности (диссипацией капитала)

$$\sigma = n(p, c)(p - c). \tag{42}$$

Величина диссипативных потерь определяется как

$$\Delta E(\tau) = \int_0^\tau \sigma(t)dt = \int_0^\tau n(p, c)(p - c)dt. \tag{43}$$

Для примера, рассмотренного выше, эти потери равны

$$\Delta E(\tau, \overline{N}) = \int_0^\tau \alpha(p(N) - c(N))^2 dt = \frac{(\overline{N} - N_0)^2}{\alpha\tau},$$

так что

$$E(\tau) = E_\infty(\overline{N}) - \Delta E(\tau, \overline{N}) = E_\infty(\overline{N}) - \int_0^\tau n(p, c)(p - c)dt. \tag{44}$$

Покажем, что выражение (44) справедливо для произвольной зависимости $n(p, c)$. Действительно, при переходе от dt к dN интеграл в (43) перепишется как

$$\Delta E(\overline{N}) = E(\overline{N}) - E(N_0) = \int_{N_0}^{\overline{N}} (p(N) - c_\tau(N, \overline{N}))dN.$$

В свою очередь, извлечённый капитал

$$E(\tau, \overline{N}) = \int_{N_0}^{\overline{N}} c_\tau(N, \overline{N})dN, \quad E_\infty(\overline{N}) = \int_{N_0}^{\overline{N}} p(N)dN. \tag{45}$$

Из сравнения этих равенств следует выражение (44).

4.2. Извлечение максимальной прибыли в системе ЭА

В этом случае задача сводится к закупке (продаже) ресурса у каждого из экономических агентов, так, чтобы получить максимальную прибыль. Это условие соответствует тому, что суммарный объём капитала ЭА-ов в конце процесса $M(\tau)$ при заданных граничных условиях должен быть минимальным.

Процесс закупки (продажи) должен протекать оптимально с точки зрения извлечения (затрат) капитала, так что цена c и оценка ресурса p должны в любой момент времени удовлетворять условиям (36), (37). Объёмы закупок ΔN_i у каждой из k подсистем должны выбираться оптимально и удовлетворять условию

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{N_i} = \sum_{i=1}^{k} N_{i0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \Delta N_i = 0. \tag{46}$$

Рынок совершенной конкуренции можно считать одной из подсистем, у которой оценка p_- не зависит от запасов ресурса и капитала, а значит для любых зависимостей $n(c, p_-)$ оптимальная цена c при закупке и продаже на таком рынке должна быть неизменна во времени.

Сформулируем задачу. Критерий оптимальности

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{M}_i(\tau) \to \min_{c_i} \tag{47}$$

при условиях

$$\frac{dN_i}{dt} = -n_i(p_i, c_i), \qquad N_i(0) = N_{i0}, \qquad i = \overline{1, k}, \tag{48}$$

$$\frac{dM_i}{dt} = -c_i n_i(p_i, c_i), \qquad M_i(0) = M_{i0}, \qquad i = \overline{1, k} \tag{49}$$

и условии (46).

Перейдём от dt к dN_i, используя зависимости (48), в которых потоки n_i на интервале $(0, \tau)$ не обращаются в ноль. Условия (48), (49) перепишутся как

$$\int_0^{\tau} dt = \int_{\overline{N_i}}^{N_{i0}} \frac{dN_i}{n_i(p_i(N_i, M_i), c_i)} = \tau, \qquad i = \overline{1, k}, \tag{50}$$

$$\frac{dM_i}{dN_i} = -c_i, \qquad i = \overline{1, k}. \tag{51}$$

Решим задачу (46), (49), с учётом (50)–(51) в два этапа. На первом этапе задача об извлечении максимума капитала за ограниченное время в замкнутой микроэкономической системе сводится к решению k задач (30)–(35) об оптимальных закупках (продажах) для каждой из подсистем при фиксированных начальных и конечных запасах ресурса (N_{i0} и $\overline{N_i}$). Максимальное количество полученного капитала (минимальное количество затраченного) $E_i(\tau)$ зависит от $\overline{N_i}$. На втором этапе найдём оптимальные значения $\overline{N_i}$ из условия

$$\sum_{i=1}^{k} E_i^*(\tau, \overline{N_i}) \to \max_{\overline{N_i}} \tag{52}$$

при условии (46), что приводит к равенству

$$\frac{\partial E_i^*(\tau, \overline{N_i})}{\partial \overline{N_i}} = \Lambda, \qquad i = \overline{1,k},$$

в котором значение Λ находят из (46).

С учётом выражения (45) получим

$$\frac{\partial E_i(\tau, \overline{N_i})}{\partial \overline{N_i}} = c_{i\tau}(\overline{N_i}, \overline{N_i}) + \int\limits_{N_{i0}}^{\overline{N_i}} \frac{\partial c_{i\tau}(N_i, \overline{N_i})}{\partial \overline{N_i}} dN_i = \overline{c_{i\tau}}(\overline{N_i}). \tag{53}$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой оптимальную цену в момент τ, второе слагаемое корректирует эту цену. Оно определяется усреднённым значением чувствительности оптимальной цены к количеству реализованного ресурса. Выражение (53) назовём *скорректированной ценой.* Условие оптимального выбора объёмов закупок (продаж) примет форму равенства скорректированных цен для всех подсистем

$$\overline{c_{i\tau}}(\overline{N_i}) = \Lambda, \quad i = \overline{1,k}. \tag{54}$$

Пример 5. Проиллюстрируем последовательность решения задачи на примере, когда для каждой из подсистем оценка ресурса

$$p_i(N_i) = \frac{h_i}{N_i}, \qquad i = \overline{1,k}, \tag{55}$$

$$n_i(c_i, p_i) = \alpha_i(c_i - p_i), \qquad i = \overline{1,k}. \tag{56}$$

Найдём капитал, который можно извлечь из i-ой подсистемы за сколь угодно большое время. Из выражения (45) с учётом (55) имеем

$$E_{i\infty}(\overline{N_i}) = h_i \int\limits_{N_{i0}}^{\overline{N_i}} \frac{dN_i}{N_i} = h_i \ln \frac{\overline{N_i}}{N_{i0}}, \quad i = \overline{1,k}.$$

Согласно равенству (40)

$$E_i(\tau, \overline{N_i}) = h_i \ln \frac{\overline{N_i}}{N_{i0}} - \frac{(\overline{N_i} - N_{i0})^2}{\alpha_i \tau}. \tag{57}$$

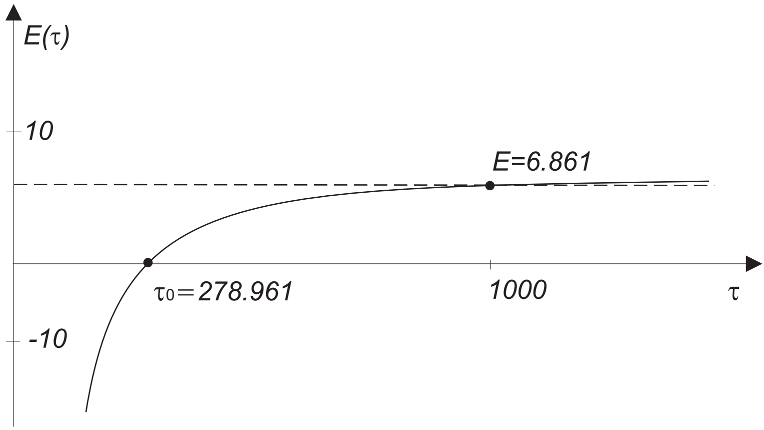

Рис. 5. Зависимость прибыльности от продолжительности процесса

Условие (54) оптимального выбора $\overline{N_i}$ примет форму (см. (39))

$$\overline{c_{i\tau}}(\overline{N_i}) = \left[p_i(\overline{N_i}) - \frac{\overline{N_i} - N_{i0}}{\alpha_i \tau}\right] - \frac{\overline{N_i} - N_{i0}}{\alpha_i \tau} = \Lambda. \tag{58}$$

Таким образом, из уравнения (58) и условия ненакопления ресурсов (46) получаем оптимальные значения количества ресурсов у подсистем в конце процесса $\overline{N_i^*}$. Прибыльность системы

$$E_\tau^* = \sum_{i=1}^{k} \left[h_i \ln \frac{\overline{N_i^*}}{N_{i0}} - \frac{(\overline{N_i}^* - N_{i0})^2}{\alpha_i \tau}\right]. \tag{59}$$

Найдём прибыльность системы, состоящей из 3-х ЭА и фирмы-посредника для следующих начальных данных:

$$N_{10} = 300, \quad N_{20} = 200, \quad N_{30} = 500,$$
$$h_1 = 10, \quad h_2 = 0.2, \quad h_3 = 0.5,$$
$$\alpha_1 = 100, \quad \alpha_2 = 200, \quad \alpha_3 = 500, \quad \tau = 1000.$$

Решая систему (58), (46) для заданного начального состояния, получим значение прибыльности $E^* = 6.861$. На рис. 5 построена зависимость $E_\tau^*(\tau)$, отмечено значение прибыльности для заданной продолжительности и значение $\tau_0 = 278.961$, соответствующее нулевой прибыльности.

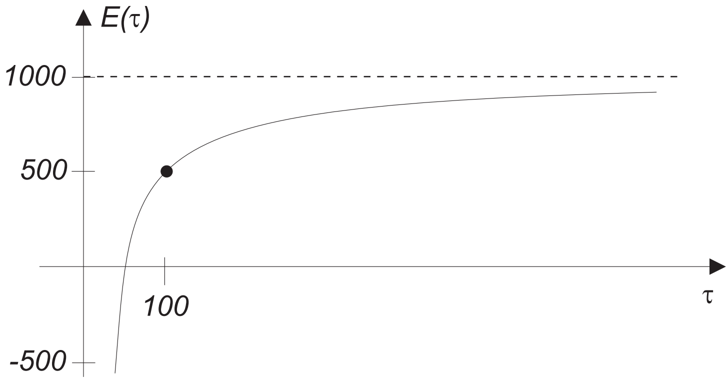

Рис. 6. Зависимость прибыльности от продолжительности процесса для случая, когда $p_i = const$

Задача сильно упрощается, когда все подсистемы имеют постоянные оценки $p = const$, то есть являются экономическими резервуарами. Тогда условие оптимальности (58) приводит к равенствам

$$p_i - \frac{2}{\alpha_i \tau}(\overline{N_i} - N_{i0}) = \Lambda \to \Delta N_i = \frac{\alpha_i \tau}{2}(p_i - \Lambda). \tag{60}$$

Здесь приведенная цена $\overline{c}_{i\tau} = p_i - \frac{2}{\alpha_i \tau}(\overline{N_i} - N_{i0})$. Из условия (46) значение Λ равно средневзвешенной оценке ресурса

$$\Lambda = \frac{\sum_{i=1}^k \alpha_i p_i}{\sum_{i=1}^k \alpha_i},$$

а

$$\overline{N_i^*} = \frac{\tau \alpha_i}{2}\left(p_i - \frac{\sum_{\nu=1}^k \alpha_\nu p_\nu}{\sum_{\nu=1}^k \alpha_\nu}\right) + N_{i0}. \tag{61}$$

После подстановки в (60) $\overline{N_i^*}$ получим значение максимально возможного капитала $E_i(\tau, \overline{N_i^*})$, который может быть извлечён из подсистемы за время τ. Прибыльность системы (см. (40))

$$E_\tau^* = \sum_{i=1}^k \left[p_i(\overline{N_i^*} - N_{i0}) - \frac{(\overline{N_i}^* - N_{i0})^2}{\alpha_i \tau}\right] = E_\infty^* - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^k \frac{\Delta N_i^{*2}}{\alpha_i}. \tag{62}$$

Пусть заданы начальные данные для системы из 3-х ЭА и фирмы-посредника:

$$p_1 = 10, \quad p_2 = 15, \quad p_3 = 12,$$
$$N_{10} = 300, \quad N_{20} = 200, \quad N_{30} = 500,$$
$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = 5, \quad \tau = 100.$$

По формуле (61) получим значения количества ресурса в конце процесса у каждого ЭА:

$$\overline{N_1^*} = 175, \overline{N_2^*} = 450, \overline{N_3^*} = 375.$$

Прибыльность в этом случае будет $E^* = 500$. На рис. 6 построен график прибыльности в зависимости от продолжительности процесса для заданных начальных данных и значение прибыльности в случае неограниченной продолжительности процесса $E_\infty = 1000$.

Список литературы

[1] Von Neumann J. A. *Model of general economic equilibrium* // Review of Economic Studies, 1945. **3**, p. 1–9. ↑[]

[2] Самуэльсон П. А. Экономика. М. : Прогресс, 1964. ↑[], 2

[3] Samuelson P. A. *Maximum principle in analytical economics* // Amer. Econ. Rev., 1972. **2**, p. 249–262. ↑[]

[4] Lichnerowicz M. *Un modele dechange economique: Economie et thermodynamique* // Ann. Inst. Henri Poincare, 1970. **2**. ↑[]

[5] Розоноэр Л. И., Малишевский А. В. *Модель хаотического обмена ресурсами и аналогии между термодинамикой и экономикой* // Всесоюз. совещ. по пробл. управления: Реф. докл.. — М., 1971, с. 207–209. ↑[]

[6] Цирлин А. М. Оптимальные процессы в необратимой термодинамике и экономике. М. : Физматлит, 2002. ↑[]

[7] Цирлин А. М. *Термодинамика экономических систем* // Труды ИПС РАН, 1994. Т. **1**, с. 64–78. ↑

[8] Цирлин А. М. *Оптимальное управление обменом ресурсами в экономических системах* // Автоматика и телемеханика, 1995, № 3, с. 116–126. ↑[]

[9] Амелькин С. А, Цирлин А. М., Мартинаш К. *Оптимальные процессы в необратимых термодинамических и микроэкономических системах* // Автоматика и телемеханика, 2002, № 4, с. 3–25. ↑[]

[10] Цирлин А. М. Необратимые оценки предельных возможностей термодинамических и микроэкономических систем. М. : Наука, 2003. ↑[]

[11] Розоноэр Л. И. *Обмен и распределение ресурсов (обобщенный термодинамический подход), I* // Автоматика и телемеханика, 1973, № 5, с. 115–132. ↑[]

[12] Розоноэр Л. И. *Обмен и распределение ресурсов (обобщенный термодинамический подход), II* // Автоматика и телемеханика, 1973, № 6, с. 65–79. ↑

[13] Розоноэр Л. И. *Обмен и распределение ресурсов (обобщенный термодинамический подход), III* // Автоматика и телемеханика, 1973, № 8, с. 82–103. ↑[]

[14] Петров А. А. Математическая модель рыночного равновесия. М. : Наука, 1966. ↑2

[15] Цирлин А. М., Колинько(Алимова) Н. А. *Задача извлечения максимальной прибыли в системах ресурсообмена* // «Интеллектуальные технологии в задачах управления». — Переславль-Залесский, 1999, с. 172–177. ↑4.1

N. A. Alimova, A. M. Tsirlin. *Extraction of capital in microeconomic systems.*

Abstract. In this work the problem about limiting possibilities of extraction of profit closed microeconomic systems is investigated. The extremal principle of minimal dissipation of capital is given.

Key Words and Phrases: microeconomic, extraction of profit, methods of finite-time thermodynamics.

Образец ссылки на статью:

Н. А. Алимова, А. М. Цирлин. *Задача извлечения капитала в изолированных микроэкономических системах* // Программные системы: теория и приложения : электрон. научн. журн. 2011. № 2(6), с. 67–88. URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2011_2_67-88.pdf