В. Д. Конаков, В. И. Питербарг, Скорость сходимости распределений максимальных уклонений гауссовских процессов и эмпирических плотностей. II, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1983, том 28, выпуск 1, 164–169

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ МАКСИМАЛЬНЫХ УКЛОНЕНИЙ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ И ЭМПИРИЧЕСКИХ ПЛОТНОСТЕЙ. II

КОНАКОВ В. Д., ПИТЕРБАРГ В. И.

В настоящей заметке результаты, полученные в [1], применяются для уточнения распределения ширины доверительных полос при оценивании эмпирической функции плотности (э.ф.п.), т. е. решается задача В (см. введение в [1]).

1. Погрешность аппроксимации гауссовским процессом. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих плотность распределения $f(x)$. Относительно $f(x)$ предположим, что она непрерывна, ограничена и положительна в рассматриваемой области, а также что $\sqrt{f(x)}$ — абсолютно непрерывная функция с ограниченной по абсолютной величине производной $1/2 f'(x)(f(x))^{-1/2}$. В качестве оценок $f_n(x)$ плотности $f(x)$ рассмотрим оценки М. Розенблатта [2]

$$f_n(x) = n^{-1}h_n^{-1}\sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{x-X_j}{h_n}\right), \tag{1.1}$$

где h_n — последовательность положительных чисел, $h_n \to 0$, $nh_n \to \infty$ при $n \to \infty$, а весовая функция $K(u)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$K(u) = K(-u), \int K(u)\,du = 1, \bigvee_{-\infty}^{\infty} K(u) < \infty, \int K^2(u)\,du < \infty \tag{1.2}$$

а также одному их двух условий:

(I) $K(u)$ равна нулю вне $[-A, A]$ и абсолютно непрерывна на $[-A, A]$ вместе со своей производной $K'(u)$,

(II) $K(u)$ абсолютно непрерывны на $(-\infty, \infty)$ вместе со своей производной $K'(u)$, $K^{(i)}(u) \in L_2(-\infty, \infty)$, $i = 1, 2$ и

$$\int_{|u|\geqslant 3} \sqrt{|u| \ln\ln|u|}\,(|K'(u)\,u| + |K(u)|)\,du < \infty. \tag{1.3}$$

Наша основная цель в этом пункте — показать, что функция распределения соответствующим образом нормированной случайной величины

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|\frac{f_n(x)-f(x)}{\sqrt{f(x)}}\right| \tag{1.4}$$

«сближается» (в смысле, который будет уточнен ниже) при $n \to \infty$ с функцией распределения случайной величины (также нормированной должным образом):

$$\max_{0\leqslant t\leqslant h_n^{-1}} |\Delta(h_n t) + X(t)|,$$

где

$$\Delta_n(x) = \frac{\sqrt{nh_n}\,(\mathbf{M}f_n(x) - f(x))}{\sigma\sqrt{f(x)}}, \quad \sigma^2 = \int K^2(u)\,du, \tag{1.5}$$

$X(t)$ — стационарный гауссовский процесс с непрерывными траекториями и ковариационной функцией

$$r(t) = \sigma^{-2}\int K(u+t)\,K(u)\,du, \tag{1.6}$$

а также дать оценку скорости этого «сближения».

Интервал $[0, 1]$ в (1.4) взят для удобства и может быть заменен любым конечным интервалом.

Пусть $\{w_n(t),\ t \in [0, 1],\ n = 1, 2, \ldots\}$ — последовательность независимых винеровских процессов, $\{W_n(s),\ s \in (-\infty, \infty),\ n = 1, 2, \ldots\}$ — последовательность независимых двусторонних винеровских процессов. Рассмотрим случайные процессы

$$\xi_n(x) = \sigma^{-1}(nh_n)^{1/2} f^{-1/2}(x)\,(f_n(x) - f(x)),$$

которые, очевидно, могут быть записаны в виде

$$\xi_n(x) = \Delta_n(x) - \sigma^{-1}(h_n f(x))^{-1/2} \int_0^1 \sqrt{n}\,(F_n(t) - t)\, dK\left(\frac{F^{-1}(t) - x}{h_n}\right),$$

где $F_n(t)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по «выборке» $F(X_1), \ldots, F(X_n)$, $F' = f$. Будем считать, что случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ заданы на том вероятностном пространстве, где существуют версии броуновских мостов $\mathscr{B}_n(t) = w_n(t) - tw_n(1)$, близкие к эмпирическим процессам $Y_n(t) = \sqrt{n}\,(F_n(t) - t)$, $t \in [0, 1]$ ([3], точная формулировка этого результата дана в лемме 1.2). Рассмотрим четыре случайных процесса $\xi_n^{(i)}(x)$, $\eta_n^{(i)}(x)$, $i = 1, 2$, $x \in [0, 1]$:

$$\xi_n^{(1)}(x) = \Delta_n(x) - \sigma^{-1}(h_n f(x))^{-1/2} \int_0^1 w_n(t)\, dK\left(\frac{F^{-1}(t) - x}{h_n}\right),$$

$$\xi_n^{(2)}(x) = \sigma^{-1}(h_n f(x))^{-1/2} \int_0^1 (w_n(1)\,t + \mathscr{B}_n(t) - Y_n(t))\, dK\left(\frac{F^{-1}(t) - x}{h_n}\right),$$

$$\eta_n^{(1)}(x) = \Delta_n(x) + \sigma^{-1} h_n^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{s - x}{h_n}\right) dW_n(s),$$

$$\eta_n^{(2)}(x) = \sigma^{-1} h_n^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{s - x}{h_n}\right)\left[\left(\frac{f(s)}{f(x)}\right)^{1/2} - 1\right] dW_n(s).$$

Легко видеть, что

$$\xi_n^{(1)}(x) + \xi_n^{(2)}(x) = \xi_n(x),$$

а распределения, порождаемые в $C[0, 1]$ процессами $\eta_n^{(1)}(x) + \eta_n^{(2)}(x)$ и $\xi_n^{(1)}(x)$, $x \in [0, 1]$, совпадают. Ниже приводятся необходимые вспомогательные утверждения.

Лемма 1.1. *Пусть ξ и η — случайные величины, причем для некоторых ε, $\delta \geqslant 0$*

$$\mathbf{P}(|\xi - \eta| > \varepsilon) < \delta.$$

Тогда для любого x

$$\mathbf{P}(\xi < x) \lesseqgtr \mathbf{P}(\eta < x \pm \varepsilon) \pm \delta.$$

Доказательство очевидно.

Лемма 1.2. [(3)]. *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые, распределенные равномерно на $[0, 1]$ случайные величины, $F_n(t)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $\mathscr{B}_n(t)$ — броуновский мост.*

Тогда существуют такие версии $F_n(t)$ и $\mathscr{B}_n(t)$, что

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |n(F_n(t) - t) - n^{1/2}\mathscr{B}_n(t)| > C \log n + x\right) < Ke^{-\lambda x}$$

для всех x, где C, K, λ — абсолютные положительные константы.

Лемма 1.3. 1. *Если плотность $f(x)$ и ядро $K(u)$ удовлетворяют условиям, приведенным выше и для некоторого $\alpha > 0$*

$$\int |u|^{\alpha} |K(u)|\, du = C_{\alpha} < \infty,$$

то

$$\alpha_n = \sup_x |\mathbf{M} f_n(x) - f(x)| \leqslant C_{\alpha}\left(\sup_x |f'(x)| + \sup_x f(x)\right) h_n^{\min(\alpha, 1)}.$$

2. *Если дополнительно предположить, что f — k раз дифференцируемая функция и k-я производная удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\beta > 0$, константой g, не зависящей от x, y:*

$$|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)| \leqslant g\,|x - y|^{\beta},$$

а для $l = 2, \ldots, k$ имеет место равенство $\int u^l K(u)\, du = 0$, то

$$\alpha_n \leqslant C_{\alpha}\left(\sup_x f(x) + g\right) h_n^{\min(\alpha, k+\beta)}.$$

Доказательство этой леммы мало чем отличается от аналогичного результата в [6], где рассмотрен случай финитного ядра $K(u)$.

Лемма 1.4. *Для любого положительного* ε

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|\xi_n^{(2)}(x)|>\varepsilon\right)\leqslant C_1\exp\left(-C_2h_n^{-1}\varepsilon^2\right)+C_3\exp\left(-C_4\varepsilon\,(nh_n)^{1/2}+C_5\log n\right),$$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|\eta_n^{(2)}(x)|>\varepsilon\right)\leqslant C_6\exp\left(-C_7h_n^{-1}\varepsilon^2\right),$$

где C_i, $i=1,\ldots 7$,*— абсолютные положительные постоянные.*

Доказательство. Из определения $\xi_n^{(2)}(x)$ и условий на $f(x)$ и $K(u)$ следует, что

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|\xi_n^{(2)}(x)|\leqslant K_1|w_n(1)|h_n^{1/2}+K_2\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\mathscr{B}_n(t)-Y_n(t)|h_n^{-1/2},$$

поэтому, применяя лемму 1.2 с $x=x_n=-C\log n+(2K_2)^{-1}\varepsilon\,(h_nn)^{1/2}$, имеем:

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|\xi_n^{(2)}(x)|>\varepsilon\right)\leqslant \mathbf{P}\left(|w_n(1)|>\frac{\varepsilon}{2K_1h_n^{1/2}}\right)+$$
$$+\mathbf{P}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\mathscr{B}_n(t)-Y_n(t)|>\frac{\varepsilon h_n^{1/2}}{2K_2}\right)\leqslant C_1\exp\left(-C_2h_n^{-1}\varepsilon^2\right)+$$
$$+C_3\exp\left(-C_4\varepsilon\,(h_nn)^{1/2}+C_5\,\mathrm{loh}\,n\right).$$

Из условий на $f(x)$ и $\sqrt{f(x)}$ следует неравенство

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}f^{-1/2}(x)\,|f^{1/2}(x+h_nu)-f^{1/2}(x)|\leqslant K_3h_n|u|,$$

из которого, интегрируя по частям выражение для $\eta_n^{(2)}(x)$, нетрудно получить оценку

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|\eta_n^{(2)}(x)|\leqslant K_4h_n^{1/2}\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_{-\infty}^{\infty}|W_n(x+h_nu)|\,(|K'(u)\,u|+|K(u)|)\,du. \tag{1.7}$$

Второе неравенство леммы является следствием (1.7), условия (1.3) и приводимой ниже леммы 1.5, примененной к функции

$$H_n(u)=K_5h_n^{-1/2}\varepsilon\sqrt{2u\ln\ln u}.$$

Лемма 1.5. *Пусть* $W_+(u)$ *— стандартное броуновское движение на* $[0,\infty)$, *начинающееся в нуле,* $H(u)\in C\,[3,+\infty)$, $H(u)>0$, $H(u)\,u^{-1/2}$ *монотонно возрастает, а* $H(u)\,u^{-1}$ *монотонно убывает при* $u>u_0$.

Тогда для любого $C>u_0$

$$\mathbf{P}\left(W_+(u)\geqslant H(u)\ \textit{для некоторого}\ u>C\right)\leqslant\int_C^{\infty}\frac{H(s)}{\sqrt{2\pi s^3}}\exp\left(-\frac{H^2(s)}{2s}\right)ds.$$

Доказательство леммы непосредственно следует из ее локального варианта [4, с. 53, формула (1.5)].

Введем $G_n^2(y)$ — функцию распределения случайной величины

$$l_n\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|\xi_n(x)|-l_n^2$$

и $G_n^1(y)$ — функцию распределения случайной величины

$$l_n\max_{0\leqslant t\leqslant h_n^{-1}}|\Delta_n(h_nt)+X(t)|-l_n^2,$$

где $X(t)$ стационарный гауссовский процесс со средним нуль и ковариационной функцией (1.6), l_n — последовательность положительных чисел, которая будет выбрана ниже в зависимости от гладкости процесса $X(t)$, однако всегда

$$l_n=\sqrt{2\ln h_n^{-1}}\,(1+\gamma_n), \tag{1.8}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=0$. (Для случая, когда максимум в (1.4) берется по дискретной решетке (что приводит к гауссовской последовательности) нормировка указана в [5, формула (9)], где $p=1$, $s_n=h_n^{-1}$).

Теорема 1.1. *Пусть существует такое $m > 0$, что*

$$\varliminf_{n\to\infty} n^{1/2}h_n \ln h_n^{-1} \ln^{-1} n > m. \quad (1.9)$$

Тогда существует такое $C > 0$, что при достаточно больших n

$$G_n^2(x) \lesseqgtr G_n^1(x \pm Ch_n^{1/2} \ln^{3/2} h_n^{-1}) \pm Ch_n \quad (1.10)$$

при всех x.

Доказательство. Как отмечалось выше, $G_n^2(y)$ является функцией распределения случайной величины

$$l_n \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |\xi_n^{(1)}(x) + \xi_n^{(2)}(x)| - l_n^2,$$

а G_n^1 — функцией распределения случайной величины

$$l_n \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |\eta_n^{(1)}(x)| - l_n^2.$$

Согласно лемме 1.4 для любого положительного ε

$$\begin{gathered} \mathbf{P}(l_n | \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |\xi_n^{(1)}(x) + \xi_n^{(2)}(x)| - \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |\xi_n^{(1)}(x)|| > \varepsilon) \leqslant \\ \leqslant C_1 \exp(-C_2\varepsilon^2 l_n^{-2} h_n^{-1}) + C_3 \exp(-C_4 \varepsilon l_n^{-1} \sqrt{nh_n} + C_5 \ln n), \\ \mathbf{P}(l_n | \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |\eta_n^{(1)}(x) + \eta_n^{(2)}(x)| - \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |\eta_n^{(1)}(x)|| > \varepsilon) \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}(\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |\eta_n^{(2)}(x)| > \varepsilon l_n^{-1}) \leqslant C_6 \exp(-C_7 \varepsilon^2 l_n^{-2} h_n^{-1}). \end{gathered} \quad (1.11)$$

Положим $\varepsilon = \varepsilon_n = K l_n h_n^{1/2} \ln h_n^{-1}$, где постоянная K выбрана так, чтобы

$$C_4 K m > C_5 + 1.$$

Утверждение теоремы следует теперь из леммы 1.1, соотношений (1.8), (1.11) в силу совпадения функций распределения случайных величин

$$l_n \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |\xi_n^{(1)}(x)| - l_n^2$$

и

$$l_n \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |\eta_n^{(1)}(x) + \eta_n^{(2)}(x)| - l_n^2.$$

Соотношение (1.10) показывает, что задача нахождения слабого предела для G_n^2 сводится к той же задаче для G_n^1. Покажем, что при достаточно слабых ограничениях на $K(u)$ влияние «трендов» $\Delta_n(h_n t)$ процессов $X(t)$, $0 \leqslant t \leqslant h_n^{-1}$, на распределение максимума асимптотически пренебрежимо. Введем $G_n^0(y)$ — функцию распределения случайной величины

$$l_n \max_{0\leqslant t\leqslant h_n^{-1}} |X(t)| - l_n^2.$$

Если существуют $C < \infty$ и $\gamma > 0$ такие, что

$$\alpha_n \leqslant C h_n^{\gamma}, \quad (1.12)$$

то, поскольку $\inf\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x) > 0$, для некоторой $K < \infty$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant h_n^{-1}} |\Delta_n(h_n t)| \leqslant K h_n^{1/2+\gamma} n^{1/2}. \quad (1.13)$$

Поэтому если h_n выбрать так, чтобы

$$\varlimsup_{n\to\infty} n^{1/2} \ln h_n^{-1} h_n^{1/2+\gamma-\varepsilon} < \infty, \ \varepsilon > 0, \quad (1.14)$$

то из теоремы 1.1 следует, что для некоторой постоянной C

$$G_n^2(x) \lesseqgtr G_n^0(x \pm Ch_n^{\varepsilon}) \pm Ch_n. \quad (1.15)$$

Так например, если взять $h_n = n^{-\varkappa}$, то в условиях, сформулированных в начале параграфа, в силу леммы 1.3 (1.12) и (1.14) $\varkappa$ должно быть больше 1/3. Если же выполнены условия второй части леммы 1.3, то $\varkappa > 1/(2k+1+\beta)$.

Пусть $G(x)$ — слабый предел функций распределения $G_n^0(x)$. Результаты из [1] позволяют оценить скорость сходимости в равномерной метрике и получить асимптотические разложения для G_n^0 по степеням $\ln n$. Поэтому, если выполнено (1.15), то те же разложения и оценки справедливы и для оценок уклонения $G_n^2(x)$ от $G(x)$. Следующая лемма выделяет две группы условий на $K(u)$, приводящие к исследуемым в [1] классам случайных процессов.

Лемма 1.6. *Пусть $K(u)$ удовлетворяет условию* (I), *тогда $r(t)$, определенная формулой* (1.6), *имеет левую и правую производные в нуле и*

$$r'_+(0) = -r'_-(0) = -(2\sigma^2)^{-1}(K^2(A) + K^2(-A)).$$

Если же $K(u)$ удовлетворяет условию (II), *то $r(t)$ четырежды дифференцируема и*

$$r^{(\mathrm{IV})}(t) = \sigma^{-2}\int K''(u+t)\,K''(u)\,du.$$

Доказательство леммы просто и мы его опускаем

2. **Приложение к оцениванию плотности распределения в метрике** L_∞. В этом пункте результаты из[1] применяются к исследованию асимптотического поведения функции распределения максимального уклонения эмпирической плотности (1.1) от истинной плотности $f(x)$, предположения относительно которой сформулированы в начале п. I. Относительно весовой функции $K(u)$ будем предполагать выполненными условия (1.2). Положим $h_n = n^{-\varkappa}$, $\varkappa > 0$.

Теорема 2.1. *Пусть функция $K(u)$ удовлетворяет условию* (I), *причем $K(A) \neq 0$. Если $0 < \varkappa < 1/2$, то найдется постоянная C, $0 < C < \infty$, такая, что*

$$\sup_x \Big|\mathbf{P}\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant 1}\sigma^{-1}n^{(1-\varkappa)/2}f^{-1/2}(s)\,|f_n(s) - \mathbf{M}f_n(s)| < \hat{l}_n + (x+\ln\lambda)\,\hat{l}_n^{-1}\Big) - \exp(-2e^{-x})\Big| \leqslant C\left(\Theta_n + \frac{(\ln\ln n)^2}{\omega_n \ln n}\right), \tag{2.1}$$

где Θ_n, ω_n определены в [1, § 1], $\hat{l}_n$ — *корень уравнения*

$$(2\pi)^{-1/2}n^{\varkappa}l\exp(-l^2/2) = 1, \qquad \lambda = K^2(A)\Big/\int K^2(u)\,du.$$

Пример. Если $K(u) = \chi[-1/2, 1/2]$, то можно положить $\omega_n \equiv 1$; тогда $\Theta_n \equiv 0$, и правая часть неравенства (2.1) не превосходит $C(\ln\ln n)^2/\ln n$.

Теорема 2.2. *Пусть функция $K(u)$ удовлетворяет условию* (II), *и кроме того, и $K(u) \in L_1(-\infty, \infty)$. Если $0 < \varkappa < 1/2$, то найдутся такие константы C_1, C, $\delta(\varkappa) > 0$, что*

1.
$$\mathbf{P}\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant 1}\sigma^{-1}n^{(1-\varkappa)/2}f^{-1/2}(s)\,|f_n(s) - \mathbf{M}f_n(s)| < \tilde{l}_n + x\tilde{l}_n^{-1}\Big) = \exp\left(-2e^{-x}\exp\left(-\frac{x^2}{4\ln(\sqrt{\lambda_2}\,n^{\varkappa}/(2\pi))}\right)\right) + L(n,x), \tag{2.2}$$

где при $x > \tilde{l}_n(1-\tilde{l}_n)$, $n > (12/\sqrt{\lambda_2})^{-\varkappa}$, $|L(n,x)| < Cn^{-\delta}e^{-2x}x^2$.

2. *При* $n > (12/\sqrt{\lambda_2})^{-\varkappa}$

$$\frac{0{,}139}{2\ln(n^{\varkappa}/(2\pi)) + \ln\lambda_2} - C_1n^{-\delta} \leqslant \sup_x \Big|\mathbf{P}\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant 1}\sigma^{-1}n^{(1-\varkappa)/2}f^{-1/2}(s)\,|f_n(s) - \mathbf{M}f_n(s)| < \tilde{l}_n + x\tilde{l}_n^{-1}\Big) - \exp(-2e^{-x})\Big| \leqslant \frac{1{,}01}{2\ln(n^{\varkappa}/(2\pi)) + \ln\lambda_2} + C_1n^{-\delta}, \tag{2.3}$$

где $\lambda_2 = \sigma^{-2}\int (K'(u))^2\,du$, $\tilde{l}_n = \sqrt{2\ln\dfrac{n^{\varkappa}}{2\pi}}$.

Теоремы 2.1 и 2.2 непосредственно следуют из (1.15) и теорем 1.1 и 2.3 из [1] соответственно.

З а м е ч а н и е 2.1. Если выполнены условия первой части леммы 1.3 и $\varkappa > 1/_3$, то в (2.1), (2.2) и (2.3) величину $\mathrm{M}f_n$ можно заменить на f. Если дополнительно выполнены условия второй части леммы 1.3, то это можно сделать при $\varkappa > 1/(2k+1+\beta)$.

З а м е ч а н и е 2.2. Из теоремы 2.2 и замечания 2.1 следует, что при построении доверительной полосы для плотности с помощью квантилей распределения $e^{-2e^{-x}}$ относительная погрешность ширины полосы имеет порядок $1/\ln^2 n$, тогда как ширина полосы убывает степенным образом. Если же строить доверительную полосу с помощью приведенной в теореме 2.2 сопровождающей последовательности функций, то порядок точности резко возрастает до $n^{-\delta}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Конаков В. Д., Питербарг В. И.* Скорость сходимости распределений максимальных уклонений гауссовских процессов и эмпирических плотностей. I,— Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. XXVII, в. 4, с. 707—724.
2. *Rosenblatt M.* Remarks on some nonparametric estimates of density functions.— Ann. Math. Statist., 1956, v. 27, № 5, p. 832—837.
3. *Komlós J., Major P., Tusnády G.* An approximations of partial sums of independent RV's and sample DF. I.— Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1975, B. 32, H. 2, S. 111—131.
4. *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории, М.: Мир, 1968, 394 с.
5. *Конаков В. Д.* Полные асимптотические разложения для максимального уклонения эмпирической функции плотности.— Теория вероятн. и ее примен., 1978, т. XXIII, в. 3, с. 495—509.
6. *Алексеев В. М.* Об оценке плотности вероятности и ее производных.— Матем. заметки, 1972, т. 2, № 5, с. 621—626.

Поступила в редакцию
10.XI.1978

RATE OF CONVERGENCE OF MAXIMAL DEVIATION DISTRIBUTIONS FOR GAUSSIAN PROCESSES AND EMPIRICAL DENSITY FUNCTIONS. II

KONAKOV V. D., PITERBARG V. I. (MOSCOW)

The results of the first part of the paper are applied to the construction of confidence regions for the unknown probability density in the case of nonparametric Parzen — Rosenblatt's estimation.

О ВЫХОДЕ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ ЗА КРИВОЛИНЕЙНУЮ ГРАНИЦУ

ГАФУРОВ М. У., РОТАРЬ В. И.

0. Пусть $n = 0, 1, 2, \ldots$; $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, где X_i — независимые случайные величины (с.в.) с одной и той же функцией распределения (ф. р.) $F(x)$. Введем в рассмотрение определенную на $[0, \infty)$ строго возрастающую функцию $g(x)$ и с. в.

$$N_g = \inf\{n;\ S_n > g(n)\},\quad S_g = S_{N_g},\quad \chi_g = S_g - g(N_g),$$

а также

$$\bar{N}_g = \inf\{n;\ |S_n| > g(n)\},\quad \bar{S}_g = S_{\bar{N}_g},\quad \bar{\chi}_g = \bar{S}_g - g(\bar{N}_g).$$