ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том 44 И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 3
1999

 РИНОТТ И.*, РОТАРЬ В. И.**

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЦПТ ДЛЯ МАРТИНГАЛОВ. II[1)]

Настоящая статья касается точности нормальной аппроксимации распределений случайных величин $S_n = \sum_1^n X_m$, где X_m — мартингал-разности. Известно, что в общем случае, даже если третьи моменты слагаемых конечны, точность аппроксимации не может иметь порядок лучший, чем $O(n^{-1/8})$. Если условные дисперсии $\mathbf{E}\{X_m^2|X_1,\ldots,X_{m-1}\} = \mathbf{E}X_m^2$, то скорость сходимости имеет порядок $O(n^{-1/4})$, в то время как при дополнительном условии независимости слагаемых точность аппроксимации имеет порядок $O(n^{-1/2})$. Настоящая статья представляет попытку объединить упомянутые выше случаи в одной оценке, а также рассмотреть ряд промежуточных ситуаций. Оценка дана в терминах определенных характеристик зависимости между слагаемыми, отражающих влияние различных факторов на скорость сходимости.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, мартингалы, скорость сходимости.

3. Доказательство теоремы 1

3.1. Предварительные построения. Зафиксируем целое n и предположим, что
$$\sum_{m=1}^{n} \overline{\sigma}_m^2 = 1. \qquad (3.1.1)$$

Шаг 1. Заметим, что если $\overline{\sigma}_{m'}^2 > \frac{1}{6}$ при некотором $m' \leqslant n$, то, как легко видеть, $\overline{\sigma}_n^* \geqslant \frac{1}{6\sqrt{6}}$. В этом случае теорема тривиальна, и без

* Department of Mathematics, UCSD, La Jolla, CA 92093; e-mail: yrinott@ucsd.edu
**Центральный экономико-математический институт РАН, Нахимовский просп., 47, 117428 Москва, Россия; e-mail: rotar@cemi.rssi.ru

[1)] Начало статьи опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения», 1988, т. 43, в. 4, с. 692–710. Работа выполнена при поддержке гранта NSF #DMS 95-04616; второй автор пользовался также поддержкой Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-0100358.

ограничения общности можно предположить, что $\overline{\sigma}_m^2 \leqslant \frac{1}{6}$ для всех m. В этом случае существует m_0, для которого

$$\frac{1}{3} \leqslant \sum_{j=1}^{m_0} \overline{\sigma}_j^2 \leqslant \frac{1}{2}, \tag{3.1.2}$$

и, как легко подсчитать, для любых положительных $a_1, \ldots, a_n$

$$a_m \leqslant a_m^* \text{ для всех } m \text{ и } a_m^* \leqslant 3a_n^* \text{ при } m \geqslant m_0. \tag{3.1.3}$$

Обратимся к доказательству при условии $\overline{\sigma}_m^2 \leqslant \frac{1}{6}$. Как и раньше, будем обозначать символом C абсолютные постоянные, различные в различных формулах, так что возможна запись типа $C + C = C$, $C < C$, и т.д. Символы $\xi, \xi_0, \xi_1, \ldots$ будут обозначать стандартные нормальные величины, не зависимые от с.в. X_j и между собой.

Ш а г 2. По неравенству сглаживания (см., например, [1]) для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\sup_z &|\mathbf{P}\{S_n < z\} - \mathbf{P}\{\xi_0 < z\}| \\ &\leqslant C\Big\{\sup_z |\mathbf{P}\{S_n + \varepsilon\xi < z\} - \mathbf{P}\{\xi_0 + \varepsilon\xi < z\}| + \varepsilon\Big\}.\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Ш а г 3. Пусть $\tau = \max\{k\colon \sum_{j=1}^k \sigma_j^2 \leqslant 1\}$. Ясно, что τ — марковский момент относительно $\{\mathscr{F}^j\}$. Для $m < n$ положим

$$\theta_m^2 = \begin{cases} \sigma_m^2, & m \leqslant \tau, \\ 1 - \sum\limits_{j=1}^{m-1} \sigma_j^2, & m = \tau + 1, \\ 0, & m > \tau + 1, \end{cases} \qquad \theta_n^2 = \begin{cases} 1 - \sum\limits_{j=1}^{n-1} \sigma_j^2, & \tau \geqslant n - 1, \\ 0, & \tau < n. \end{cases}$$

Таким образом, хотя θ_j^2 «сходны» с σ_j^2, но $\sum_{j=1}^n \theta_j^2 = 1$. Отметим также, что θ_m^2 измеримо относительно $\mathscr{F}^{m-1}$.

При фиксированном ε, которое будет уточнено позже, положим $\lambda_m^2 = 1 - \sum_{j=1}^m \theta_j^2 + \varepsilon^2$. Имеем

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\{S_n + \varepsilon\xi < z\} - \mathbf{P}\{\xi_0 + \varepsilon\xi < z\} \\ &= \mathbf{P}\{S_n + \varepsilon\xi < z\} - \mathbf{P}\Big\{\sum_{m=1}^n \theta_m\xi_m + \varepsilon\xi < z\Big\} \\ &= \sum_{m=1}^n \Big[\mathbf{P}\Big\{S_m + \sum_{j=m+1}^n \theta_j\xi_j + \varepsilon\xi < z\Big\} - \mathbf{P}\Big\{S_{m-1} + \sum_{j=m}^n \theta_j\xi_j + \varepsilon\xi < z\Big\}\Big] \\ &= \mathbf{E}\sum_{m=1}^n \left[\Phi\left(\frac{z - S_{m-1} - X_m}{\lambda_m}\right) - \Phi\left(\frac{z - S_{m-1} - \theta_m\xi_m}{\lambda_m}\right)\right] \\ &= \mathbf{E}\sum_{m=1}^n \left[\Phi\left(T_m - \frac{X_m}{\lambda_m}\right) - \Phi\left(T_m - \frac{\theta_m\xi_m}{\lambda_m}\right)\right],\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

где $T_m = (z - S_{m-1})/\lambda_m$. Число z будем считать фиксированным в течение всего доказательства. Поскольку оно довольно громоздко, приведем

3.2. План дальнейшего доказательства. (I) Сначала мы заменим в последней сумме в (3.1.5) θ_m на σ_m. На шаге 1 п. 3.3 будет оценена ошибка при такой замене, т.е. разность $\mathbf{E}\{\Phi(T_m - \theta_m\xi_m/\lambda_m) - \Phi(T_m - \sigma_m\xi_m/\lambda_m)\}$.

(II) Таким образом мы придем к интегралу $\mathbf{E}\{\Phi(T_m - X_m/\lambda_m) - \Phi(T_m - \sigma_m\xi_m/\lambda_m)\}$, который будет разбит на два: по множеству $A_m = \{|\alpha_m| \leqslant \frac{1}{2}, \beta_m| \leqslant \frac{1}{2}\}$ и по его дополнению. Оценка последнего интеграла проста и будет осуществлена на шаге 2 п. 3.3. Оставшаяся часть доказательства посвящена

$$\mathbf{E}\sum_{m=1}^{n} I_m\left[\Phi\left(\frac{z - S_{m-1} - X_m}{\lambda_m}\right) - \Phi\left(\frac{z - S_{m-1} - \sigma_m\xi_m}{\lambda_m}\right)\right], \tag{3.2.1}$$

где I_m — индикатор A_m.

(III) Сперва мы перейдем от (3.2.1) к

$$\mathbf{E}\sum_{m=1}^{n} I_m\left[\Phi\left(\frac{z - S_{m-1} - \overline{\sigma}_m Y_m}{\overline{\lambda}_m}\right) - \Phi\left(\frac{z - S_{m-1} - \overline{\sigma}_m\xi_m}{\overline{\lambda}_m}\right)\right], \tag{3.2.2}$$

где $\overline{\sigma}_m^2 = \mathbf{E}\sigma_m^2$, $\overline{\lambda}_m^2 = 1 - \sum_{j=1}^m \overline{\sigma}_j^2 + \varepsilon^2$ и $Y_m = X_m/\sigma_m$. Заметим, что, по определению, $\mathbf{E}_m Y_m = 0$, и $\mathbf{E}_m Y_m^2 = 1$, где $\mathbf{E}_m(\,\cdot\,) = \mathbf{E}(\cdot \mid \mathscr{F}^{m-1})$. Указанный переход будет осуществлен в п. 3.4 в два этапа: сначала мы перейдем от λ_m к $\overline{\lambda}_m$, а затем — от σ_m к $\overline{\sigma}_m$.

(IV) В конце п. 3.4 мы «уберем» I_m из (3.2.2), т.е. перейдем от (3.2.2) к

$$\mathbf{E}\sum_{m=1}^{n}\left[\Phi\left(\frac{z - S_{m-1} - \overline{\sigma}_m Y_m}{\overline{\lambda}_m}\right) - \Phi\left(\frac{z - S_{m-1} - \overline{\sigma}_m\xi_m}{\overline{\lambda}_m}\right)\right]. \tag{3.2.3}$$

(V) Преимущество, которое мы получили, — в том, что теперь мы имеем дело с неслучайными масштабными характеристиками $\overline{\lambda}_m$ и $\overline{\sigma}_m$. Оценивание (3.2.3) приведет к основным членам в (1.5). Положим $Q_m(y) = \Phi((z-y)/\overline{\lambda}_m)$. Тогда (3.2.3) можно переписать в виде $\sum_{m=1}^n J_m$, где $J_m = \mathbf{E}[Q_m(S_{m-1} + \overline{\sigma}_m Y_m) - Q_m(S_{m-1} + \overline{\sigma}_m\xi_m)]$.

(VI) Оценивание $\sum_{m=1}^{m_0} J_m$ просто; мы проведем его на шаге 1 п. 3.5.

(VII) Перейдем к $m > m_0$. Пусть $\widetilde{Y}_m$, $m = 1, \ldots, n$, — независимые с.в. с теми же маргинальными распределениями, что и у Y_m. Обозначим N_m, $m = 1, 2, \ldots$, нормальную с.в. с теми же первыми двумя моментами, что и у S_m. Мы предполагаем, что все N_m независимы между собой и от остальных с.в. Имеем

$$\begin{aligned} J_m = {} & \mathbf{E}\left[Q_m(S_{m-1} + \overline{\sigma}_m Y_m) - Q_m(S_{m-1} + \overline{\sigma}_m\widetilde{Y}_m)\right] \\ & + \mathbf{E}\Big[Q_m(S_{m-1} + \overline{\sigma}_m\widetilde{Y}_m) - Q_m(N_{m-1} + \overline{\sigma}_m\widetilde{Y}_m) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- Q_m(S_{m-1} + \overline{\sigma}_m \xi_m) + Q_m(N_{m-1} + \overline{\sigma}_m \xi_m)\Big] \\
&+ \mathbf{E}\left[Q_m(N_{m-1} + \overline{\sigma}_m \widetilde{Y}_m) - Q_m(N_{m-1} + \overline{\sigma}_m \xi_m)\right] \\
= \ & J_{m1} + J_{m2} + J_{m3}.
\end{aligned} \tag{3.2.4}
$$

(VIII) Оценивание сумм $\sum_{m=m_0+1}^n J_{m2}$ и $\sum_{m=m_0+1}^n J_{m3}$ сходно с таким же оцениванием для случая независимых величин и осуществляется на шагах 2–3 п. 3.5.

(IX) Сумма $\sum_{m=m_0+1}^n J_{m1}$ отражает влияние конкретного типа зависимости на скорость. Эта сумма оценивается на шаге 4 того же раздела.

(X) Собирая все оценки, мы придем к рекуррентному соотношению между δ_n и δ_m при $m < n$. Индукция осуществляется в п. 3.6.

3.3. Предварительные оценки. Шаг 1. Согласно разложению Тейлора,

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\Phi\left(T_m - \frac{\theta_m \xi_m}{\lambda_m}\right) - \Phi\left(T_m - \frac{\sigma_m \xi_m}{\lambda_m}\right)\right] \\
&\quad = \int_0^1 \mathbf{E}\varphi\left(T_m - \frac{\sigma_m \xi_m + t(\theta_m - \sigma_m)\xi_m}{\lambda_m}\right)(\theta_m - \sigma_m)\,\lambda_m^{-1}\xi_m\,dt,
\end{aligned} \tag{3.3.1}
$$

где φ — стандартная нормальная плотность. Применяя теперь то же разложение к $\varphi(\cdot)$ под знаком интеграла и используя то, что $\lambda_m^2 \geqslant \varepsilon^2$, $\mathbf{E}\xi_m = 0$ и ξ_m не зависит от остальных с.в., нетрудно получить, что подынтегральное выражение не превосходит по абсолютной величине

$$
\left|\mathbf{E}\varphi\left(\frac{z - S_{m-1}}{\lambda_m}\right)\frac{\theta_m - \sigma_m}{\lambda_m}\,\xi_m\right| + C\mathbf{E}\,\frac{\theta_m + \sigma_m}{\lambda_m^2}\,|\theta_m - \sigma_m| \leqslant 0 + C\mathbf{E}\,\frac{|\theta_m^2 - \sigma_m^2|}{\varepsilon^2}.
$$

Так как $\sum_{m=1}^n |\theta_m^2 - \sigma_m^2| \leqslant |1 - \sum_{m=1}^n \sigma_m^2|$, из (3.3.1) получаем, что

$$
\mathbf{E}\left|\sum_{m=1}^n \left[\Phi\left(T_m - \frac{\theta_m \xi_m}{\lambda_m}\right) - \Phi\left(T_m - \frac{\sigma_m \xi_m}{\lambda_m}\right)\right]\right| \leqslant \frac{C}{\varepsilon^2}\mathbf{E}\left|1 - \sum_{m=1}^n \sigma_m^2\right|. \tag{3.3.2}
$$

Шаг 2. Ниже будем опускать индекс n в β_{mn}, т.е. $\beta_m = \beta_{mn}$. Разлагая по Тейлору и принимая во внимание (1.1), определение σ_m и то, что I_m измеримо относительно $\mathscr{F}^{m-1}$, имеем

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathbf{E}\sum_{m=1}^n (1 - I_m)\left[\Phi\left(T_m - \frac{X_m}{\lambda_m}\right) - \Phi\left(T_m - \frac{\sigma_m \xi_m}{\lambda_m}\right)\right]\right| \\
&\quad \leqslant C\sum_{m=1}^n \left[\mathbf{E}\,(1 - I_m)\,|X_m^3| + \mathbf{E}\,(1 - I_m)\,\sigma_m^3\right]\frac{1}{\lambda_m^3} \\
&\quad \leqslant \frac{C}{\varepsilon^3}\sum_{m=1}^n \mathbf{E}\,(1 - I_m)\,|X_m|^3 \leqslant \frac{C}{\varepsilon^3}\sum_{m=1}^n \mathbf{E}(|\alpha_m| + |\beta_m|)\,|X_m^3|.
\end{aligned} \tag{3.3.3}
$$

3.4. Переход от условных к безусловным дисперсиям. Наша следующая цель — перейти от (3.2.1) к (3.2.2).

Ш а г 1. Пусть $\overline{T}_m = (z - S_{m-1})/\bar{\lambda}_m$. Ниже U обозначает с.в., равномерно распределенную на [0,1] и не зависящую ни от каких иных с.в. Оценим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\sum_{m=1}^{n} I_m\left[\Phi\Big(T_m - \frac{X_m}{\lambda_m}\Big) - \Phi\Big(T_m - \frac{\sigma_m\xi_m}{\lambda_m}\Big)\right] \\
&\quad - \mathbf{E}\sum_{m=1}^{n} I_m\left[\Phi\Big(\overline{T}_m - \frac{X_m}{\bar{\lambda}_m}\Big) - \Phi\Big(\overline{T}_m - \frac{\sigma_m\xi_m}{\bar{\lambda}_m}\Big)\right] \\
&= \mathbf{E}\sum_{m=1}^{n} I_m\left[\varphi'\Big(T_m - \frac{U\sigma_m Y_m}{\lambda_m}\Big)\sigma_m^2 Y_m^2\lambda_m^{-2}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \varphi'\Big(T_m - \frac{U\sigma_m Y_m}{\lambda_m}\Big)\sigma_m^2\xi_m^2\lambda_m^{-2}\right] \\
&\quad - \mathbf{E}\sum_{m=1}^{n} I_m\left[\varphi'\Big(\overline{T}_m - \frac{U\sigma_m Y_m}{\bar{\lambda}_m}\Big)\sigma_m^2 Y_m^2\bar{\lambda}_m^{-2}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \varphi'\Big(\overline{T}_m - \frac{U\sigma_m Y_m}{\bar{\lambda}_m}\Big)\sigma_m^2\xi_m^2\bar{\lambda}_m^{-2}\right] \\
&= \mathbf{E}\sum_{m=1}^{n}\big[J_{Y_m} - J_{\xi_m} - \bar{J}_{Y_m} + \bar{J}_{\xi_m}\big]. \qquad (3.4.1)
\end{aligned}$$

Заметим, что последнее слагаемое равно нулю (так как $\lambda_n = \bar{\lambda}_n = \varepsilon$), и в последней сумме достаточно рассматривать $m = 1, \ldots, n-1$.

Нетрудно видеть также, что, поскольку $|\alpha_m| \leqslant \frac{1}{2}$ на множестве A_m, на том же множестве $\frac{1}{3} \leqslant \sigma_m/\overline{\sigma}_m \leqslant 3$. То же касается и условия $|\beta_m| \leqslant \frac{1}{2}$ и отношения $\sum_{j=m+1}^{n}\sigma_{jm}^2/\sum_{j=m+1}^{n}\overline{\sigma}_j^2$. Мы будем использовать это неоднократно.

Условимся, что любая сумма $\sum_m^k = 0$ при $m > k$.

Пусть $\varkappa = \min\{n-1, \tau+1\}$. Так как $\theta_m = \sigma_m$ при $m \leqslant \tau$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\sum_{m=1}^{n-1} J_{Y_m} &= \mathbf{E}\sum_{m=1}^{\varkappa} I_m\varphi'\Big(T_m - \frac{U\sigma_m Y_m}{\lambda_m}\Big)\theta_m^2 Y_m^2\lambda_m^{-2} \\
&\quad + \mathbf{E}I_\varkappa\varphi'\Big(T_\varkappa - \frac{U\sigma_\varkappa Y_\varkappa}{\lambda_\varkappa}\Big)\Big(\sigma_\varkappa^2 - \theta_\varkappa^2\Big)Y_\varkappa^2\lambda_\varkappa^{-2} \\
&\quad + \mathbf{E}\sum_{m=\varkappa+1}^{n-1} I_m\varphi'\Big(T_m - \frac{U\sigma_m Y_m}{\lambda_m}\Big)\sigma_m^2 Y_m^2\lambda_m^{-2} \\
&= K_1 + K_2 + K_3. \qquad (3.4.2)
\end{aligned}$$

Поскольку $\theta_m = 0$ при $m > \tau + 1$ и $\mathbf{E}_m Y_m^2 = 1$, получаем

$$|K_2 + K_3| \leqslant \frac{C}{\varepsilon^2}\left[\mathbf{E}|\sigma_\varkappa^2 - \theta_\varkappa^2|\, Y_\varkappa^2 + \sum_{m=\varkappa+1}^{n-1} \mathbf{E}\sigma_m^2 Y_m^2\right]$$
$$= \frac{C}{\varepsilon^2}\left[\mathbf{E}|\sigma_\varkappa^2 - \theta_\varkappa^2| + \mathbf{E}\sum_{m=\varkappa+1}^{n-1} \sigma_m^2\right] \leqslant \frac{C}{\varepsilon^2}\mathbf{E}\left|\sum_{m=1}^{n} \sigma_m^2 - 1\right|. \quad (3.4.3)$$

Далее,

$$K_1 = \mathbf{E}\sum_{m=1}^{\varkappa} I_m \varphi'\Big(T_m - \frac{U\sigma_m Y_m}{\lambda_m}\Big)\, \theta_m^2 Y_m^2 (\lambda_m^{-2} - \bar\lambda_m^{-2})$$
$$+ \mathbf{E}\sum_{m=1}^{\varkappa} I_m \varphi'\Big(T_m - \frac{U\sigma_m Y_m}{\lambda_m}\Big)\, \theta_m^2 Y_m^2 \bar\lambda_m^{-2} = K_{11} + K_{12}. \quad (3.4.4)$$

Заметим теперь, что

$$\sum_{j=1}^{m}(\theta_j^2 - \bar\sigma_j^2) = \mathbf{E}_m \sum_{j=1}^{m}(\theta_j^2 - \bar\sigma_j^2) = -\mathbf{E}_m \sum_{j=m+1}^{n}(\theta_j^2 - \bar\sigma_j^2)$$
$$= \mathbf{E}_m \sum_{j=m+1}^{n}(\bar\sigma_j^2 - \sigma_j^2) + \mathbf{E}_m \sum_{j=m+1}^{n}(\sigma_j^2 - \theta_j^2)$$
$$= \chi_{1m} + \chi_{2m}. \quad (3.4.5)$$

Отметим также, что с.в. χ_{1m} и χ_{2m} измеримы относительно $\mathscr{F}^{m-1}$ и

$$|\chi_{2m}| \leqslant \mathbf{E}_m\left|\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 - 1\right|. \quad (3.4.6)$$

Разлагая появляющееся ниже $\varphi'(\cdot)$, только когда оно умножается на χ_{1m}, имеем

$$K_{11} = \mathbf{E}\sum_{m=1}^{\varkappa} I_m \varphi'\Big(T_m - \frac{U\sigma_m Y_m}{\lambda_m}\Big)\, \theta_m^2 Y_m^2 (\chi_{1m} + \chi_{2m})\, \lambda_m^{-2}\bar\lambda_m^{-2}$$
$$= \mathbf{E}\sum_{m=1}^{\varkappa} I_m \varphi'(T_m)\, \theta_m^2 Y_m^2 \chi_{1m} \lambda_m^{-2}\bar\lambda_m^{-2} + R, \quad (3.4.7)$$

где R равно сумме остаточного члена в указанном разложении и части, содержащей χ_{2m}.

Примем во внимание теперь, что $I(m \leqslant \varkappa)$ измеримо относительно $\mathscr{F}^{m-1}$, и, следовательно, сумма в правой части (3.4.7) равна

$$\sum_{m=1}^{n} \mathbf{E} I_m I(m \leqslant \varkappa)\, \varphi'(T_m)\, \theta_m^2 Y_m^2 \chi_{1m} \lambda_m^{-2}\bar\lambda_m^{-2}$$
$$= \sum_{m=1}^{n} \mathbf{E} I_m I(m \leqslant \varkappa)\, \varphi'(T_m)\, \theta_m^2 \chi_{1m} \lambda_m^{-2}\bar\lambda_m^{-2}.$$

Нетрудно понять, что последнее выражение полностью совпадает с соответствующим выражением, которое возникнет, когда мы будем оценивать, следуя в точности той же схеме, члены J_{ξ_m}. Поэтому указанные выражения взаимно уничтожатся. В то же время

$$\begin{aligned}|R| &\leqslant \mathbf{E}\sum_{m=1}^{\varkappa} I_m\theta_m^2\sigma_m|Y_m^3|\,|\chi_{1m}|\,\lambda_m^{-1}\cdot\lambda_m^{-2}\bar\lambda_m^{-2}\\ &\quad+\mathbf{E}\sum_{m=1}^{\varkappa} I_m\theta_m^2 Y_m^2|\chi_{2m}|\,\lambda_m^{-2}\bar\lambda_m^{-2} = R_1+R_2. \qquad (3.4.8)\end{aligned}$$

В m-м слагаемом в R_2 все с.в., за исключением Y_m, измеримы относительно $\mathscr{F}^{m-1}$. Поэтому, ввиду (3.4.6),

$$R_2 \leqslant \mathbf{E}\left|\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2-1\right|\sum_{m=1}^{\varkappa}\frac{I_m\theta_m^2}{\lambda_m^2\bar\lambda_m^2}. \qquad (3.4.9)$$

(Мы воспользовались также тем, что $\varkappa \leqslant \tau+1$.) Полагая снова $\sum_m^k = 0$ при $m > k$, имеем

$$\sum_{m=1}^{\varkappa}\frac{I_m\theta_m^2}{\lambda_m^2\bar\lambda_m^2} \leqslant \sum_{m=1}^{m_0} + \sum_{m_0+1}^{\tau+1}. \qquad (3.4.10)$$

В силу (3.1.2) в первой сумме $\bar\lambda_m^2 \geqslant \frac{1}{2}$ и $\lambda_m^2 \geqslant \varepsilon^2$, так что первая сумма не превосходит $2\sum_{j=1}^{m_0}\theta_j^2/\varepsilon^2 \leqslant 2/\varepsilon^2$. Применяя ко второй сумме неравенства Коши–Буняковского–Шварца и учитывая, что $\theta_m^2 \leqslant \sigma_m^2 \leqslant 3\overline{\sigma}_m^2$ на множестве A_m, получаем, что указанная сумма ограничена выражением

$$C\left[\sum_{m_0+1}^{\varkappa} I_m\frac{\theta_m^2}{\lambda_m^4}\right]^{1/2}\left[\sum_{m_0+1}^{\varkappa} I_m\frac{\overline{\sigma}_m^2}{\lambda_m^4}\right]^{1/2}. \qquad (3.4.11)$$

Оценивая первый сомножитель с помощью (3.1.3), приходим к следующему:

$$\begin{aligned}\sum_{m_0+1}^{\varkappa} I_m\frac{\theta_m^2}{\lambda_m^4} &= \sum_{m_0+1}^{\tau+1} I_m\frac{\theta_m^2}{(1-\sum_{j=1}^{m-1}\theta_j^2+\varepsilon^2-\theta_m^2)^2}\\ &\leqslant \sum_{m_0+1}^{\varkappa}\frac{\theta_m^2}{(1-\sum_{j=1}^{m-1}\theta_j^2+\varepsilon^2-3\overline{\sigma}_m^2)^2}\\ &\leqslant \sum_{m_0+1}^{\tau+1}\frac{\theta_m^2}{(1-\sum_{j=1}^{m-1}\theta_j^2+\varepsilon^2-27\overline{\sigma}_n^{*2})^2}. \qquad (3.4.12)\end{aligned}$$

Воспользуемся теперь тем, что для любых $c_m \geqslant 0$ таких, что $\sum_{m=1}^n c_m = 1$, и любого $p > 1$,

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{c_m}{(1-\sum_{j=1}^{m-1}c_j+b)^p} \leqslant \frac{1}{(p-1)\,b^{p-1}}. \qquad (3.4.13)$$

(Оценивается сверху соответствующим интегралом.) Поэтому, полагая ε^2 большим, чем, скажем, $29(\overline{\sigma}_n^2)^*$, получаем, что правая часть (3.4.12) не больше чем C/ε^2 при достаточно большой абсолютной постоянной C. Второй сомножитель в (3.4.11) рассматривается аналогично, и окончательно

$$R_2 \leqslant C\mathbf{E}\left|\sum_{m=1}^{n} \sigma_m^2 - 1\right| \varepsilon^{-2}. \tag{3.4.14}$$

Вернемся к R_1. Нетрудно убедиться, что

$$R_1 \leqslant \frac{C}{\varepsilon^3} \sum_{m=1}^{n-1} \mathbf{E}\, I_m \left| X_m^3 \left\{ \mathbf{E}_m \sum_{j=m+1}^{n} \sigma_j^2 \Bigl(\sum_{j=m+1}^{n} \overline{\sigma}_j^2 \Bigr)^{-1} - 1 \right\} \right|.$$

Заметим, что $\mathbf{E}_m \sum_{j=m+1}^n \sigma_j^2 = \sum_{j=m+1}^n \sigma_{jm}^2$, и выражение в фигурных скобках равно $2\beta_m/(1-\beta_m)$, где $\beta_m = \beta_{mn}$. Следовательно, в силу последнего неравенства и определения I_m,

$$R_1 \leqslant \frac{C}{\varepsilon^3} \sum_{m=1}^{n-1} \mathbf{E}|\beta_m X_m^3|. \tag{3.4.15}$$

Обратимся к K_{12}. Полагая $\Psi_m = z - S_{m-1} - U\sigma_m Y_m$, имеем: $K_{12} = \mathbf{E}\sum_{m=1}^{\varkappa} I_m \varphi'(\Psi_m/\lambda_m)\,\theta_m^2 Y_m^2/\bar\lambda_m^2$. Рассмотрим разность между этим выражением и соответствующим выражением, возникающим при оценивании, в рамках той же схемы, членов с J_{Y_m}, иными словами, рассмотрим $\mathbf{E}\sum_{m=1}^{\varkappa} I_m D_m$, где $D_m = [\varphi'(\Psi_m/\lambda_m) - \varphi'(\Psi_m/\bar\lambda_m)]\theta_m^2 Y_m^2/\bar\lambda_m^2$.

Пусть I_{m1} и I_{m2} — индикаторы событий $A_{m1} := \{|\chi_{1m}| \leqslant \bar\lambda_m^2/10\}$ и $A_{m2} := \{|\chi_{2m}| \leqslant \bar\lambda_m^2/10\}$ соответственно. Разобьем последнее интересующее нас математическое ожидание на интегралы по области $A_{m1}A_{m2}$ и его дополнению. Заметим, что $\bar\lambda_m^2 - \lambda_m^2 = \chi_{1m} + \chi_{2m}$. На $A_{m1}A_{m2}$ верно соотношение $\bar\lambda_m^2 \asymp \lambda_m^2$ (т.е. отношение левой и правой частей лежит между двумя *абсолютными* постоянными), и можно выписать разложение

$$\begin{aligned}
\varphi'\Bigl(\frac{\Psi_m}{\lambda_m}\Bigr) - \varphi'\Bigl(\frac{\Psi_m}{\bar\lambda_m}\Bigr) &= \varphi''\Bigl(\frac{\Psi_m}{\widehat\lambda_m}\Bigr)\Psi_m(\lambda_m^{-1} - \bar\lambda_m^{-1}) \\
&= \varphi''\Bigl(\frac{\Psi_m}{\widehat\lambda_m}\Bigr)\frac{\Psi_m}{\lambda_m\bar\lambda_m}\cdot\frac{\bar\lambda_m^2 - \lambda_m^2}{\bar\lambda_m + \lambda_m} = \varphi''\Bigl(\frac{\Psi_m}{\widehat\lambda_m}\Bigr)\frac{\Psi_m}{\lambda_m}\cdot\frac{\chi_{1m}+\chi_{2m}}{\bar\lambda_m(\bar\lambda_m+\lambda_m)},
\end{aligned} \tag{3.4.16}$$

где $\widehat\lambda_m$ — «промежуточное» выражение, фигурирующее в разложении Тейлора. Ясно, что $\widehat\lambda_m^2 \asymp \lambda_m^2$, и, следовательно, $|\varphi''(\Psi_m/\widehat\lambda_m)$ $(\Psi_m/\lambda_m)| \leqslant C$.

Мы видим, что $\mathbf{E}\sum_{m=1}^{\varkappa} I_m I_{m1} I_{m2} D_m$ не превосходит суммы двух слагаемых, одно из которых связано с членом в (3.4.16), содержащим χ_{2m}, и ограничено выражением $C\mathbf{E}\sum_{m=1}^{\varkappa} I_m \chi_{2m}\theta_m^2 Y_m^2 \bar\lambda_m^{-4}$. Как было показано ранее, последнее выражение не больше чем правая часть (3.4.14).

Второе из означенных слагаемых, содержащее χ_{1m}, равно

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\sum_{m=1}^{\varkappa} I_m I_{m1} I_{m2} \theta_m^2 Y_m^2 \bar\lambda_m^{-2} \varphi''\Big(\frac{\Psi_m}{\widehat\lambda_m}\Big) \frac{\Psi_m \chi_{1m}}{\lambda_m \bar\lambda_m(\lambda_m+\bar\lambda_m)} \\
&\quad = \mathbf{E}\sum_{m=1}^{\varkappa} I_m I_{m1} I_{m2} \frac{\theta_m^2 Y_m^2}{\bar\lambda_m^2} \varphi''\bigg(\frac{\Psi_m}{\bar\lambda_m} + U_1 \Psi_m\Big(\frac{1}{\lambda_m} - \frac{1}{\bar\lambda_m}\Big)\bigg) \\
&\qquad\qquad \times \frac{(z - S_{m-1})\,\chi_{1m}}{\lambda_m \bar\lambda_m(\lambda_m+\bar\lambda_m)} \\
&\qquad - \mathbf{E}\sum_{m=1}^{\varkappa} I_m I_{m1} I_{m2} \frac{\theta_m^2 Y_m^2}{\bar\lambda_m^2} \varphi''\bigg(\frac{\Psi_m}{\bar\lambda_m} + U_1 \Psi_m\Big(\frac{1}{\lambda_m} - \frac{1}{\bar\lambda_m}\Big)\bigg) \\
&\qquad\qquad \times \frac{U \sigma_m Y_m \chi_{1m}}{\lambda_m \bar\lambda_m(\lambda_m+\bar\lambda_m)},
\end{aligned}
\tag{3.4.17}
$$

где U_1 — с.в., равномерно распределенная на $[0,1]$. Нетрудно видеть, что m-е слагаемое во второй сумме в правой части (3.4.17) не больше, по абсолютной величине, чем $CI_m\sigma_m^3|Y_m^3\chi_{1m}|/\bar\lambda_m^5$. Докажем, что та же оценка верна и для m-го слагаемого в первой сумме. Этого достаточно, так как $\mathbf{E}\sum_{m=1}^{\varkappa}\sigma_m^3|Y_m^3\chi_{1m}|/\bar\lambda_m^5$, как показано выше, не превосходит правой части (3.4.15).

По определению Ψ_m, если $|z-S_{m-1}| \leqslant 10|\sigma_m Y_m|$, то $|\Psi_m| \leqslant 11|\sigma_m Y_m|$, и доказываемая оценка очевидна (см. также определения I_{m1}, I_{m2}). Если же $|z-S_{m-1}| > 10|\sigma_m Y_m|$, разложим по Тейлору φ'' в (3.4.17) в окрестности $(z-S_{m-1})[1/\bar\lambda_m + U_1(1/\lambda_m - 1/\bar\lambda_m)]\, z-S_{m-1}$. Первый член указанного разложения равен

$$
I_m I_{m1} I_{m2} \frac{\theta_m^2 Y_m^2}{\bar\lambda_m^2} \varphi''\bigg((z-S_{m-1})\Big[\frac{1}{\bar\lambda_m} + U_1\Big(\frac{1}{\lambda_m} - \frac{1}{\bar\lambda_m}\Big)\Big]\bigg) \frac{(z-S_{m-1})\chi_{1m}}{\lambda_m \bar\lambda_m(\lambda_m+\bar\lambda_m)}.
$$

Математическое ожидание этого члена совпадает с математическим ожиданием соответствующего члена для J_{ξ_m}, так что эти члены взаимно уничтожаются.

Пусть $\widetilde\varphi(x) = \sup_{|t|>x}|\varphi'''(t)|$. Тогда, поскольку $|\sigma_m Y_m| \leqslant |z-S_{m-1}|/10$, остаточный член рассматриваемого разложения, при введенных условиях на χ_{1m} и χ_{2m}, не превосходит

$$
CI_m I_{m1} I_{m2} \frac{\sigma_m^3|Y_m^3\chi_{1m}|}{\bar\lambda_m^5}\bigg[\frac{|z-S_{m-1}|}{\bar\lambda_m}\,\widetilde\varphi\Big(\frac{9(z-S_{m-1})}{10\widehat\lambda_m}\Big)\bigg].
$$

Так как $\widehat\lambda_m^2 \asymp \bar\lambda_m^2$, выражение в квадратных скобках ограничено абсолютной постоянной, и математическое ожидание всего выражения не превосходит правой части (3.4.15).

Рассмотрим теперь $\mathbf{E}\sum_{m=1}^{\varkappa} I_m(1-I_{m1})D_m$. В этом случае, т.е. при $|\chi_{1m}| > \bar\lambda_m^2/10$, будем раскладывать в ряд Тейлора в окрестности $z - S_{m-1}$ каждый из членов $\varphi'(\Psi_m/\lambda_m)$ и $\varphi'(\Psi_m/\bar\lambda_m)$ отдельно. Нулевые члены взаимно уничтожатся с соответствующими членами для $J_{\xi_m} - \bar{J}_{\xi_m}$. Остаточный член не превосходит

$$CI_m \frac{\sigma_m^2 Y_m^2}{\bar{\lambda}_m^2} \left(\frac{\sigma_m |Y_m|}{\lambda_m} + \frac{\sigma_m |Y_m|}{\bar{\lambda}_m} \right) I\left(|\chi_{1m}| > \frac{\bar{\lambda}_m^2}{10} \right)$$
$$\leqslant C \frac{I_m \sigma_m^3 |Y_m^3|}{\bar{\lambda}_m^4} |\chi_{1m}| \left(\frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\bar{\lambda}_m} \right). \tag{3.4.18}$$

Математическое ожидание последнего выражения не больше правой части (3.4.15).

Наконец,

$$\mathbf{E} \sum_{m=1}^{\varkappa} I_m (1 - I_{m2}) D_m \leqslant C \mathbf{E} \sum_{m=1}^{\varkappa} \frac{\overline{\sigma}_m^2 Y_m^2 |\chi_{2m}|}{\bar{\lambda}_m^4},$$

что вновь приводит к правой части (3.4.14).

Просматривая уже проведенные выкладки, нетрудно прийти к выводу, что оставшиеся интегралы в (3.4.1), а именно J_{ξ_m}, $\bar{J}_{Y_m}$, $\bar{J}_{\xi_m}$, могут быть оценены совершенно аналогично, причем ряд соответствующих членов, как было выше объяснено, взаимно уничтожатся.

Собирая все оценки этого пункта, получаем, что абсолютное значение выражения (3.4.1) не превосходит

$$C \left\{ \frac{1}{\varepsilon^3} \sum_{m=1}^{n-1} \mathbf{E} |\beta_m X_m^3| + \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{E} \left| \sum_{m=1}^{n} \sigma_m^2 - 1 \right| \right\}. \tag{3.4.19}$$

Ш а г 2. Теперь перейдем от σ_m к $\overline{\sigma}_m$, точнее, оценим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E} \sum_{m=1}^{n} I_m \left[\Phi\left(\overline{T}_m - \frac{X_m}{\bar{\lambda}_m} \right) - \Phi\left(\overline{T}_m - \frac{\sigma_m \xi_m}{\bar{\lambda}_m} \right) \right] \\
&\qquad - \mathbf{E} \sum_{m=1}^{n} I_m \left[\Phi\left(\overline{T}_m - \frac{\overline{\sigma}_m Y_m}{\bar{\lambda}_m} \right) - \Phi\left(\overline{T}_m - \frac{\overline{\sigma}_m \xi_m}{\bar{\lambda}_m} \right) \right] \\
&\quad = \mathbf{E} \sum_{m=1}^{n} I_m \left[\varphi'\left(\overline{T}_m - \frac{U \sigma_m Y_m}{\bar{\lambda}_m} \right) \sigma_m^2 Y_m^2 \bar{\lambda}_m^{-2} \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \varphi'\left(\overline{T}_m - \frac{U \sigma_m Y_m}{\bar{\lambda}_m} \right) \sigma_m^2 \xi_m^2 \bar{\lambda}_m^{-2} \right] \\
&\qquad - \mathbf{E} \sum_{m=1}^{n} I_m \left[\varphi'\left(\overline{T}_m - \frac{U \overline{\sigma}_m Y_m}{\bar{\lambda}_m} \right) \overline{\sigma}_m^2 Y_m^2 \bar{\lambda}_m^{-2} \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \varphi'\left(\overline{T}_m - \frac{U \overline{\sigma}_m Y_m}{\bar{\lambda}_m} \right) \overline{\sigma}_m^2 \xi_m^2 \bar{\lambda}_m^{-2} \right].
\end{aligned} \tag{3.4.20}$$

Рассмотрим

$$I_m \left[\varphi'\left(\overline{T}_m - \frac{U \sigma_m Y_m}{\bar{\lambda}_m} \right) \sigma_m^2 Y_m^2 \bar{\lambda}_m^{-2} - \varphi'\left(\overline{T}_m - \frac{U \overline{\sigma}_m Y_m}{\bar{\lambda}_m} \right) \overline{\sigma}_m^2 Y_m^2 \bar{\lambda}_m^{-2} \right]$$

$$= I_m\varphi'\Big(\overline{T}_m - \frac{U\sigma_m Y_m}{\bar\lambda_m}\Big)(\sigma_m^2 - \overline{\sigma}_m^2)Y_m^2\bar\lambda_m^{-2}$$
$$+ I_m\Big[\varphi'\Big(\overline{T}_m - \frac{U\sigma_m Y_m}{\bar\lambda_m}\Big) - \varphi'\Big(\overline{T}_m - \frac{U\overline{\sigma}_m Y_m}{\bar\lambda_m}\Big)\Big]\overline{\sigma}_m^2 Y_m^2 \bar\lambda_m^{-2}. \quad (3.4.21)$$

Разлагая первое слагаемое в окрестности $\overline{T}_m$, легко увидеть, что вновь нулевой член взаимно уничтожится с соответствующим членом для величин ξ_i. Остаточный член ограничен выражением $I_m\sigma_m(\sigma_m^2 - \overline{\sigma}_m^2)|Y_m^3|/\bar\lambda_m^3$.

Разлагая второе слагаемое в (3.4.21), мы видим, что оно не превосходит $I_m\overline{\sigma}_m^2|\sigma_m - \overline{\sigma}_m||Y_m^3|/\bar\lambda_m^3$.

В силу определения I_m математические ожидания последних двух выражений не больше чем

$$C\,\frac{\overline{\sigma}_m^3}{\bar\lambda_m^3}\,\mathbf{E}I_m|Y_m^3|\,\Big|\frac{\sigma_m^2}{\overline{\sigma}_m^2} - 1\Big| \leqslant \frac{C}{\varepsilon^3}\,\mathbf{E}I_m|X_m^3|\,\Big|\frac{\sigma_m^2}{\overline{\sigma}_m^2} - 1\Big| \leqslant \frac{C}{\varepsilon^3}\,\mathbf{E}|\alpha_m X_m^3|.$$

Конечно, замена $\bar\lambda_m$ на ε груба, но мы все равно уже приходили к оценкам того же типа в (3.4.21). Таким образом, выражение в (3.4.20) не превосходит по абсолютной величине

$$\frac{C}{\varepsilon^3}\sum_{m=1}^{n}\mathbf{E}|\alpha_m X_m^3|. \quad (3.4.22)$$

Этим оценивание разности между (3.2.1) и (3.2.2) завершено.

Для последующего нам удобно теперь «убрать» I_m из (3.2.2), т.е. перейти от (3.2.2) к (3.2.3). Это делается аналогично выкладкам шага 4 п. 3.1, и погрешность при указанном переходе не превосходит

$$\frac{C}{\varepsilon^3}\sum_{m=1}^{n}\overline{\sigma}_m^3\mathbf{E}(|\alpha_m| + |\beta_m|)\,|Y_m^3|. \quad (3.4.23)$$

3.5. Оценивание при постоянных условных дисперсиях. Ш а г 1. Поскольку $\mathbf{E}_m Y_m = 0$ и $\mathbf{E}_m Y_m^2 = 1$, первые три члена разложения Тейлора выражений в (3.2.3) взаимно уничтожаются, и

$$\mathbf{E}|J_m| \leqslant \frac{\overline{\sigma}_m^3\mathbf{E}|Y_m^3|}{\bar\lambda_m^3} + \frac{\overline{\sigma}_m^3\mathbf{E}|\xi_m^3|}{\bar\lambda_m^3} \leqslant C\overline{\sigma}_m^3\mathbf{E}|Y_m^3| \quad \text{при } m \leqslant m_0, \quad (3.5.1)$$

где последнее неравенство следует из того, что $\mathbf{E}|Y_m^3| > 1$ и $\bar\lambda_m > C$ при $m \leqslant m_0$ ввиду (3.1.2).

Пусть $\nu_m = \mathbf{E}|Y_m^3|$. Из (3.5.1) и (3.1.3) следует, что

$$\sum_{m=1}^{m_0}|J_m| \leqslant C\sum_{m=1}^{m_0}\nu_m\overline{\sigma}_m^3 \leqslant C\sum_{m=1}^{n}\overline{\sigma}_m^2\max_{m\leqslant k\leqslant n}\nu_k\overline{\sigma}_k = C(\nu_n\overline{\sigma}_n)^*. \quad (3.5.2)$$

Случай $m > m_0$ рассмотрим, используя представление (3.2.4).

Ш а г 2. Легко проверить, что

$$|J_{m3}| \leqslant \mathbf{E}\left|\Phi\left(\frac{z-\overline{\sigma}_m\widetilde{Y}_m}{\sqrt{1-\overline{\sigma}_m^2+\varepsilon^2}}\right)-\Phi\left(\frac{z-\overline{\sigma}_m\xi_m}{\sqrt{1-\overline{\sigma}_m^2+\varepsilon^2}}\right)\right|$$
$$\leqslant \frac{C}{(1-\overline{\sigma}_m^2+\varepsilon^2)^{3/2}}\overline{\sigma}_m^3[\mathbf{E}|Y_m^3|+\mathbf{E}|\xi_m^3|]. \tag{3.5.3}$$

Так как $\overline{\sigma}_m^2 < \frac{1}{6}$ для всех m, получаем $|J_{m3}| \leqslant C\overline{\sigma}_m^3\nu_m$. Следовательно,

$$\sum_{m=m_0+1}^{n}|J_{m3}| \leqslant C\sum_{m=m_0+1}^{n}\nu_m\overline{\sigma}_m^3 \leqslant C(\nu_n\overline{\sigma}_n)^*. \tag{3.5.4}$$

Ш а г 3. Обращаясь к J_{m2}, имеем

$$J_{m2} = \int\Big(\int[\mathbf{P}\{S_{m-1}\leqslant z-x-y\}$$
$$-\mathbf{P}\{N_{m-1}\leqslant z-x-y\}]\,\mathbf{P}\{\bar{\lambda}_m\xi\in dy\}\Big)$$
$$\times[\mathbf{P}\{\overline{\sigma}_mY_m\in dx\}-\mathbf{P}\{\overline{\sigma}_m\xi_m\in dx\}]. \tag{3.5.5}$$

Заметим теперь, что для любых с.в. Y и Z с совпадающими первыми двумя моментами

$$\left|\iint g(x+y)\,\mathbf{P}\{\lambda\xi\in dy\}\,[\mathbf{P}\{Y\in dx\}-\mathbf{P}\{Z\in dx\}]\right|$$
$$\leqslant \sup_x|g(x)|\,\frac{1}{\lambda^3}\,[\mathbf{E}|Y^3|+\mathbf{E}|Z^3|], \tag{3.5.6}$$

см., например, [26]. Применяя (3.5.6), приходим к оценке

$$|J_{m2}| \leqslant \frac{\delta_{m-1}}{\bar{\lambda}_m^3}\,\overline{\sigma}_m^3(\mathbf{E}|Y_m^3|+\mathbf{E}|\xi_m^3|) \leqslant C\,\frac{\delta_{m-1}}{\bar{\lambda}_m^3}\,\overline{\sigma}_m^3\nu_m.$$

Отсюда и из (3.1.3) получаем, что

$$\sum_{m=m_0+1}^{n}|J_{m2}| \leqslant C(\nu_n\overline{\sigma}_n)^*\sum_{m=m_0+1}^{n}\frac{\delta_{m-1}\overline{\sigma}_m^2}{\bar{\lambda}_m^3}. \tag{3.5.7}$$

Ш а г 4. Обратимся к J_{m1}. В силу разложения Тейлора

$$J_{m1} = \mathbf{E}(1-U)\bigg[\varphi''\Big(\overline{T}_m-\frac{U\overline{\sigma}_mY_m}{\bar{\lambda}_m}\Big)\,\overline{\sigma}_m^3Y_m^3\bar{\lambda}_m^{-3}$$
$$-\varphi''\Big(\overline{T}_m-\frac{U\overline{\sigma}_m\widetilde{Y}_m}{\bar{\lambda}_m}\Big)\,\overline{\sigma}_m^3\widetilde{Y}_m^3\bar{\lambda}_m^{-3}\bigg]$$
$$= \overline{\sigma}_m^3\bar{\lambda}_m^{-3}\mathbf{E}\,(1-U)\iint x^3\varphi''\Big(\frac{z-y-U\overline{\sigma}_mx}{\bar{\lambda}_m}\Big)$$
$$\times[\mathbf{P}\{S_{m-1}\in dy\mid Y_m=x\}-\mathbf{P}\{S_{m-1}\in dy\}]\,\mathbf{P}\{Y_m\in dx\}. \tag{3.5.8}$$

Полагая $\Delta_m(y \mid x) := \mathbf{P}\{S_{m-1} \leqslant y \mid Y_m = x\} - \mathbf{P}\{S_{m-1} \leqslant y\}$ и интегрируя по частям относительно y, приходим к соотношению

$$|J_{m1}| = \overline{\sigma}_m^3 \bar{\lambda}_m^{-3} \mathbf{E}\left|(1-U) \iint x^3 \varphi'''\left(\frac{z - y - U\overline{\sigma}_m x}{\bar{\lambda}_m}\right)\right.$$
$$\left. \times \bar{\lambda}_m^{-1} \Delta_m(y \mid x)\, \mathbf{P}\{Y_m \in dx\}\, dy\right|$$
$$\leqslant \overline{\sigma}_m^3 \bar{\lambda}_m^{-3} \int |x^3| \left[\int \left|\varphi'''\left(\frac{z - y - U\overline{\sigma}_m x}{\bar{\lambda}_m}\right)\right| \bar{\lambda}_m^{-1} dy\right]$$
$$\times \sup_y |\Delta_m(y \mid x)|\, \mathbf{P}\{Y_m \in dx\} = C\,\overline{\sigma}_m^3 r_m \bar{\lambda}_m^{-3},$$

где $r_m = \int |x^3| \sup_y |\Delta_m(y \mid x)|\, \mathbf{P}\{Y_m \in dx\}$.

Отсюда и из (3.1.3) следует $\sum_{m=m_0+1}^n |J_{m1}| \leqslant C \sum_{m=m_0+1}^n \overline{\sigma}_m^3 r_m \times \bar{\lambda}_m^{-3} \leqslant C(\overline{\sigma}_n r_n)^* \sum_{m=m_0+1}^n \overline{\sigma}_m^2 \bar{\lambda}_m^{-3}$.

Заметим, что, ввиду (3.1.3) и (3.4.13),

$$\sum_{m=m_0+1}^n \frac{\overline{\sigma}_m^2}{\bar{\lambda}_m^3} = \sum_{m_0+1}^n \frac{\overline{\sigma}_m^2}{(1 - \sum_{j=1}^{m-1} \overline{\sigma}_j^2 + \varepsilon^2 - \overline{\sigma}_m^2)^{3/2}}$$
$$\leqslant \sum_{m_0+1}^n \frac{\overline{\sigma}_m^2}{(1 - \sum_{j=1}^{m-1} \overline{\sigma}_j^2 + \varepsilon^2 - \overline{\sigma}_n^{*2})^{3/2}} \leqslant \frac{C}{\varepsilon}, \tag{3.5.9}$$

если $\varepsilon^2 > 2\overline{\sigma}_n^{*2}$. Таким образом,

$$\sum_{m=m_0+1}^n |J_{m1}| \leqslant \frac{C}{\varepsilon} (\overline{\sigma}_n r_n)^*. \tag{3.5.10}$$

Все оценки завершены, и нам осталась

3.6. Индукция. Из неравенства сглаживания (3.1.4), представления (3.1.5) и оценок (3.3.2), (3.3.3), (3.4.19), (3.4.22), (3.4.23), (3.5.2), (3.5.4), (3.5.7) и (3.5.10) следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\delta_n \leqslant C\left\{\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{E}\left|1 - \sum_{m=1}^n \sigma_m^2\right| + \frac{1}{\varepsilon^3} \sum_{m=1}^n \mathbf{E}(|\alpha_m| + |\beta_{mn}|)\,(|X_m^3| + \overline{\sigma}_m^3 |Y_m^3|)\right.$$
$$\left. + (\nu_n \overline{\sigma}_n)^* + \frac{1}{\varepsilon}(\overline{\sigma}_n r_n)^* + (\nu_n \overline{\sigma}_n)^* \sum_{m=m_0+1}^n \frac{\delta_{m-1}\overline{\sigma}_m^2}{\bar{\lambda}_m^3}\right\}. \tag{3.6.1}$$

Положим

$$L_m = \frac{(\nu_m \overline{\sigma}_m)^*}{B_m} + \sqrt{\frac{(r_m \overline{\sigma}_m)^*}{B_m}} + (\Gamma_{1m}^*)^{1/3} + (\Gamma_{2m}^*)^{1/4}. \tag{3.6.2}$$

Предположим, что $\delta_m \leqslant C_0 L_m$ для всех $m \leqslant n-1$ и некоторой постоянной C_0, которая будет уточнена позже. (При $m = 1$ утверждение тривиально.) Заметим, что для $m > m_0$, ввиду (3.1.2), $B_m^2 \geqslant B_n^2/3 = \frac{1}{3}$. Следовательно, в силу (3.1.3) и индукционного предположения, для $m = m_0 + 1, \ldots, n-1$ верно $\delta_m \leqslant 9C_0L_n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\delta_n \leqslant C\left\{\varepsilon + \frac{\Gamma_{1n}^*}{\varepsilon^2} + \frac{\Gamma_{2n}^*}{\varepsilon^3} + (\nu_n\overline{\sigma}_n)^* + \frac{1}{\varepsilon}(r_n\overline{\sigma}_n)^* \right. \\ \left. + (\nu_n\overline{\sigma}_n)^* 9C_0L_n \sum_{m=m_0+1}^{n} \frac{\overline{\sigma}_m^2}{\overline{\lambda}_m^3}\right\}. \tag{3.6.3}$$

Из (3.6.3), (3.6.2) и (3.5.9) следует существование абсолютной постоянной $\overline{C} \geqslant 1$ такой, что

$$\delta_n \leqslant \overline{C}\left[\varepsilon + \frac{L_n^3}{\varepsilon^2} + \frac{L_n^4}{\varepsilon^3} + \frac{L_n^2}{\varepsilon} + \frac{9C_0L_n^2}{\varepsilon}\right]. \tag{3.6.4}$$

Положим теперь $\varepsilon = 30\overline{C}L_n$. Заметим, что, поскольку $\nu_n^* \geqslant 1$, так выбранное $\varepsilon \geqslant 30\overline{\sigma}_n^*$, т.е. ε удовлетворяет введенному ранее требованию. Тогда, окончательно,

$$\delta_n \leqslant L_n\left(30\overline{C}^2 + 3 + \frac{9}{30}C_0\right) \leqslant L_n\left(C_1 + \frac{1}{3}C_0\right), \tag{3.6.5}$$

где C_1 — некоторая абсолютная постоянная. Индукция завершается выбором $C_0 = \frac{3}{2}C_1$.

4. Дополнительные замечания

1. Как отмечалось в п. 1.2, оценки δ_n могут быть также получены в терминах не с.в. Y_m, а самих с.в. X_m. Точнее, верна следующая

Теорема 2. *Оценка теоремы* 1 *остается верной, если заменить в* (1.5) $(\nu_n\overline{\sigma}_n)^*$ *на* $(\mu_n\overline{\sigma}_n)^*$ *и* $(r_n\overline{\sigma}_n)^*$ *на* $(\widehat{r}_n\overline{\sigma}_n)^*$, *где* $\widehat{r}_n = \mathbf{E}\{|X_m^3|\Delta_{m-1}(X_m)\}/\overline{\sigma}_n^3$.

Доказательство повторяет доказательство теоремы 1 со следующими изменениями. Во-первых, на шаге 2 п. 3.4 мы должны оставить σ_m, как они есть, и перейти от $\mathbf{E}\sum_{m=1}^n I_m[\Phi(\overline{T}_m - X_m/\overline{\lambda}_m) - \Phi(\overline{T}_m - \sigma_m\xi_m/\overline{\lambda}_m)]$ к $\mathbf{E}\sum_{m=1}^n I_m[\Phi(\overline{T}_m - \widetilde{X}_m/\overline{\lambda}_m) - \Phi(\overline{T}_m - \widetilde{\sigma}_m\xi_m/\overline{\lambda}_m)]$, где $\widetilde{X}_m$ и $\widetilde{\sigma}_m$ имеют те же распределения, что и X_m и σ_m соответственно, и не зависят от остальных с.в. Оценивание разности между указанными выражениями проводится совершенно аналогично выкладкам шага 2, за исключением члена $\mathbf{E}I_m[\varphi'(\overline{T}_m - UX_m/\overline{\lambda}_m) - \varphi'(\overline{T}_m - U\widetilde{X}_m/\overline{\lambda}_m)]\,\widetilde{X}_m^2\overline{\lambda}_m^{-2}$, который должен оцениваться так же, как член J_{m1} на шаге 4 п. 3.5.

2. Полученные оценки относительно точны или когда σ_m не слишком близки к $\overline{\sigma}_m$, или, напротив, когда достаточно близки. Как уже отмечалось в п. 1.2, в промежуточных случаях, например, когда $|\sigma_m - \overline{\sigma}_m|$ мало только при больших m, последние члены в (1.5) могут иметь худший порядок, чем можно получить, рассматривая те или иные конкретные ситуации отдельно.

Указанное обстоятельство тесно связано с типом аппроксимации, принятом на первом шаге доказательства. Мы использовали приближение суммой $\sum_{m=1}^n \theta_m\xi_m$, т.е. суммой нормальных с.в. со «случайными» дисперсиями. Ясно, что без каких-либо дополнительных предположений о σ_j^2 приближение суммой $\sum_{m=1}^n \overline{\sigma}_m\xi_m$ не приведет к оценке даже порядка $O(n^{-1/8})$, так что, ставя цель охватить «крайние» случаи, мы должны были использовать первую из указанных аппроксимаций.

С другой стороны, вторая из указанных аппроксимаций, кажущаяся более грубой, в некоторых случаях может привести к более точным оценкам. К такому выводу можно прийти, анализируя, например, некоторые доказательства в [2], где указанная аппроксимация, будучи применена к ряду частных, но важных случаев, привела к достаточно точным результатам. Было бы интересно исследовать возможности этой аппроксимации систематически. Мы надеемся сделать в будущем.

3. Читатель, прошедший через доказательство, заметил, что при дополнительных требованиях на условные дисперсии оценка скорости сходимости может быть улучшена. Мы видели, что $|\overline{\lambda}_m^2 - \lambda_m^2| \leqslant |\sum_{j=m+1}^n(\overline{\sigma}_{jm}^2 - \sigma_j^2)| + |1 - B_m^{-2}\sum_{j=1}^m \sigma_j^2|$. Если второе слагаемое меньше по порядку, чем первое, т.е. если $\|1 - B_m^{-2}\sum_{j=1}^m \sigma_j^2\|_\infty$ достаточно мало при больших m, то $\overline{\lambda}_m^2 \asymp \lambda_m^2$ на A_m. Это дает возможность заменить λ_m на $\overline{\lambda}_m$ в вычислениях п. 3.4. В этом случае мы можем вместо грубой оценки $\lambda_m \geqslant \varepsilon$ прийти к выражению типа $\sum_{m=m_0+1}^n \overline{\sigma}_m^2/\overline{\lambda}_m^3 \leqslant C/\varepsilon$. Это, в свою очередь, позволит заменить член $\Gamma_{2n}^*/\varepsilon^3$ на $\Gamma_{2n}^*/\varepsilon$. Что касается интегрирования по A_m^c, т.е. члена (3.3.3), он может быть оценен проще, так как он мал, если $|\sigma_j^2 - \overline{\sigma}_j^2|$ не велико. Например, если $\min\{|\alpha_m|, |\beta_m|\} \geqslant \frac{1}{2}$, правая часть (3.3.3) равна нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bhattacharya R. N.*, *Ranga Rao R.* Normal Approximation and Asymptotic Expansion. Melbourne: Krieger, 1986.
2. *Bolthausen E.* Exact convergence rates in some martingale central limit theorems. — Ann. Probab., 1982, v. 10, p. 672–688.
3. *Bolthausen E.* The Berry–Esseen theorem for strongly mixing Harris recurrent Markov chains. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1982, B. 60, H. 3, S. 283–289.
4. *Bradley R.* Basic properties of strong mixing conditions. — Dependence in Probability and Statistics. Ed. by E. Eberlein, M. Taqqu. Boston: Birkhäuser. Progr. Probab. Statist., 1986, v. 11, p. 165–192.
5. *Dvoretzky A.* Asymptotic normality for sums of dependent random variables. — Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, v. 3. Berkeley: Univ. of California Press, 1972, p. 513–535.
6. *Erickson R. V.*, *Quine M. P.*, *Weber N. C.* Explicit bounds for the departure from normality of sums of dependent random variables. — Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1979, v. 34, p. 27–32.

7. *Евстигнеев И. В.* Регулярные условные математические ожидания случайных величин, зависящих от параметров. — Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. XXXI, в. 3, с. 586–589.
8. *Грамэ И. Г.* Нормальная аппроксимация для семимартингалов. — Успехи матем. наук, 1987, т. 42, № 6, с. 189–190.
9. *Haeusler E.* On the rate of convergence in the central limit theorem for martingales. — Ann. Probab., 1988, v. 16, p. 275–299.
10. *Haeusler E., Joos K.* A nonuniform bound on the rate of convergence in the central limit theorem for martingales. — Ann. Probab., 1989, v. 16, p. 1690–1720.
11. *Hall P., Heyde C. C.* Martingale Limit Theory and its Applications. New York: Academic Press, 1980, 308 p.
12. *Hall P., Heyde C. C.* Rates of convergence in martingale limit theorem. — Ann. Probab., 1981, v. 9, № 2, p. 395–404.
13. *Heyde C. C., Brown B. M.* On the departure from normality of a certain class of martingales. — Ann. Math. Statist., 1970, v. 41, p. 2161–2165.
14. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов, т. 2. М.: Физматлит, 1994, 368 с.
15. *Kato Y.* Rates of convergence in the central limit theorem for martingale differences. — Bull. Math. Statist., 1979, p. 1–8.
16. *Кирьянова Л. В., Ротарь В. И.* Оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для мартингалов. — Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 2, с. 301–312.
17. *Кубилюс К.* Скорость сходимости в функциональной центральной предельной теореме. — Лит. матем. сб., 1989, т. XXV, в. 1, с. 59–69.
18. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* О скорости сходимости в центральной предельной теореме для мартингалов. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. XXVII, в. 1, с. 3–14.
19. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Теория мартингалов. М.: Наука, 1986, 512 с.
20. *Mori T.* On the rate of convergence in the martingale limit theory. — Studia Sci. Math. Hungar., 1977, v. 12, № 3, p. 413–417.
21. *Нагаев С. В.* Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова. — Теория вероятн. и ее примен., 1961, т. VI, в. 1, с. 67–86.
22. *Peligrad M.* Recent advances in the central limit theorem and its weak invariance principle for mixing sequences of random variables (a survey). — Dependence in Probability and Statistics. Ed. by E. Eberlein, M. Taqqu. Boston: Birkhäuser. Progr. Probab. Statist., 1986, v. 11, p. 193–223.
23. *Rinott Y.* On normal approximation rates for certain sums of dependent random variables. — J. Comput. Appl. Math., 1994, v. 55, p. 135–143.
24. *Rinott Y., Rotar V.* A multivariate CLT for local dependence with $n^{-1/2}\log n$ rate, and applications to multivariate graph related statistics. — J. Multivariate Anal., 1996, v. 56, p. 333–350.
25. *Ротарь В. И.* Теория вероятностей. М.: Высшая школа, 1992, 368 с.
26. *Sazonov V. V.* Normal approximation — some recent advances. — Lecture Notes in Math., 1981, v. 879, p. 1–105.
27. *Stein C.* Approximate Computation of Expectations. Hayward, CA: IMS, 1986, 164 p.

Поступила в редакцию
12.VIII.1997