



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Лежнин, И. И. Мулляджанов, В. Е. Накоряков, Б. Г. Покусаев, Н. А. Прибатурин, Эволюция слабонелинейных возмущений в воздуховодяной смеси сн-рядной структуры, *Прикл. мех. техн. физ.*, 1989, том 30, выпуск 6, 91–98

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.82

25 января 2025 г., 14:52:17



3. Ламб Г. Гидродинамика.— М.; Л.: Гостехиздат, 1947.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели.— М.: Наука, 1973.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1987.
6. Бейкер Д., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде.— М.: Мир, 1986.
7. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости.— М.: Наука, 1977.
8. Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн.— Новосибирск: Наука, 1985.

г. Люберцы

Поступила 22/XII 1987 г.,  
в окончательном варианте — 24/VI 1988 г.

УДК 532.529

С. И. Лежнин, И. И. Мулладжанов, В. Е. Накоряков,  
Б. Г. Покусаев, Н. А. Прибатурич

### ЭВОЛЮЦИЯ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ВОЗДУХОВОДЯНОЙ СМЕСИ СНАРЯДНОЙ СТРУКТУРЫ

При движении газо- и парожидкостных смесей имеют место разнообразные режимы течения (пузырьковый, снарядный, стержневой и др.), существенно различающиеся по гидро- и газодинамическим характеристикам. К настоящему времени достаточно хорошо теоретически и экспериментально изучено формирование и распространение волн давления в смеси жидкости с пузырьками газа. Что касается снарядного режима течения газожидкостной смеси, то имеющейся сейчас информации [1—4] недостаточно для понимания общей картины процесса формирования волн. Впервые модель распространения волн давления независимо предложена в [3, 4], где предполагалось, что распространение волн в такой среде есть результат безынерционного сжатия — расширения газового снаряда и передачи импульса пробке жидкости. В [3, 5] показано, что математическое описание эволюции волн сводится, как и в пузырьковой среде, к уравнению типа Кортвега—де Вриза, высказано предположение о возможности формирования в такой среде волн давления, форма и закономерности распространения которых такие же, как и в газожидкостной пузырьковой смеси.

В настоящей работе выполнено теоретическое и экспериментальное исследование формирования и распространения слабонелинейных ( $\Delta p_0/p_0 < 1$ ) возмущений давления в реальной (с учетом аперодичности структуры и скольжения фаз) газожидкостной смеси снарядной структуры.

Рассмотрим распространение в одну сторону импульса конечной длительности малой амплитуды  $\Delta p_0/p_0 < 1$  ( $p_0$  — статическое давление). Согласно теоретическим оценкам [3], скорость распространения импульса по двухфазной смеси снарядной структуры должна определяться по той же формуле, что и для пузырьковой смеси:  $c_0 = [\gamma p_0/\rho_1 \varphi(1-\varphi)]^{1/2}$  ( $\gamma$  — показатель адиабаты газа,  $\varphi$  — объемное газосодержание смеси). Зададим начальную ширину импульса  $L = c_0 t_0$  и его начальную амплитуду  $\Delta p_0$ . При этом исследуем волны, для которых  $L > l$  ( $l$  — длина двухфазной ячейки пробка жидкости — газовый снаряд). Если ввести безразмерные параметры  $\tau = t c_0 M/L$ ,  $M = (\gamma + 1)\Delta p_0/2\gamma p_0$ ,  $\eta = x/L$ ,  $p^* = \Delta p/\Delta p_0$ , то, как показано в [5], эволюционное уравнение для волн в газожидкостной смеси снарядной структуры имеет точно такой же вид, как и в случае смеси жидкости с пузырьками газа:

$$(i) \quad \frac{\partial p^*}{\partial \tau} + \frac{\partial p^*}{\partial \eta} + p^* \frac{\partial p^*}{\partial \eta} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial^3 p^*}{\partial \eta^3} = 0$$

( $\sigma^2 = M(24L^2/l^2)$ ,  $\sigma$ ,  $M$  — безразмерные критерии подобия).

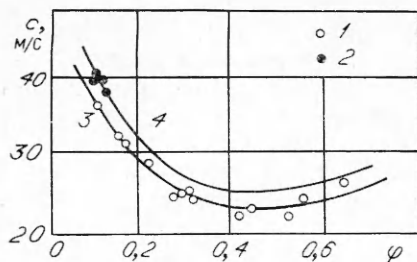
В [3] отмечено, что особенность снарядной структуры — появление пространственной дисперсии при распространении по ней возмущения давления. Предельная частота распространения сигнала  $2\omega_0 = 2c_0/l = 2[\gamma p_0/\rho_1 l^2 \varphi(1-\varphi)]^{1/2}$ . Из сравнения резонансных частот для пузырьковой среды [2] и для снарядной смеси  $\omega_0$  следует, что характерные частоты пульсаций в волнах, распространяющихся по рассматриваемой смеси, должны иметь низкое значение (несколько десятков герц, в пузырьковом потоке — килогерцы). Зная эти критерии, можно легко определить пути развития начального возмущения. Оценка показывает, что для снарядного

режима в трубах диаметром 8—30 мм значение  $\sigma$  мало, и поэтому вклад дисперсионных эффектов в формировании волны давления значительно больше, чем для пузырькового режима течения.

С точки зрения экспериментальной проверки теоретической модели распространения волн наиболее удобен метод ударной трубы. В наших исследованиях опыты проводились в трубе с вертикальным рабочим участком диаметром 25 и 8 мм в высотой 2,5 и 0,8 м соответственно. При этом двухфазная среда снарядной структуры образовывалась путем периодической подачи определенной порции газа в рабочий участок с неподвижной жидкостью, в качестве которой использовалась дистиллированная вода. Такой способ ввода газа позволял получать чистую (без пузырьков газа в жидкой пробке) снарядную структуру с регулируемыми характеристиками ( $\varphi = 0,1-0,7$ ,  $l_{20}/D \sim 1-10$ ,  $l_{20}$  — начальная длина газового снаряда,  $D$  — диаметр снарядов). Отметим, что увеличивать частоту прохождения снарядов (увеличить  $\varphi$ ) тем труднее, чем больше диаметр канала. При определенных условиях, связанных, как показано в [1], с турбулизацией жидкости, последующий снаряд попадает в след предыдущего и по мере всплытия догоняет его и сливается с ним. Для экспериментов с каналом 25 мм максимально достигаемые значения газосодержания 0,3—0,4. Волны давления генерировались путем открытия электромагнитного клапана, разделяющего камеры высокого и низкого давления. Необходимая длительность возмущения (в наших экспериментах 15—500 мс) получалась в результате открытия клапана на определенный промежуток времени. Амплитуда начальной волны менялась в диапазоне  $(0,015-3,4)p_c$  за счет изменения давления в камере высокого давления ударной трубы. Таким образом, в экспериментах варьировались критерии  $\sigma$  и  $M$ . Распространение возмущения давления по двухфазной среде регистрировалось пьезоэлектрическими датчиками давления. Газосодержание и размер снаряда измерялись времяпролетным методом, для чего были использованы два фотодиода, установленные на расстоянии 30 мм друг от друга. Управление экспериментальной установкой, сбор и обработка данных осуществлялись при помощи ЭВМ «Электроника-60» с расширенным комплектом КАМАК (АЦП, коммутатор, таймер, счетчик).

На рис. 1 приведены зависимости скорости слабых волн сжатия ( $\Delta p_0/p_0 < 1$ ) от  $\varphi$ . Точки 1 и 2 соответствуют опытам при  $D = 8$  и 25 мм, линия 3 — расчетная зависимость  $c_0$  от  $\varphi$  для идеальной структуры. На  $D = 25$  мм максимальное  $\varphi = 0,14$ , при этом существовал стабильный режим течения. На нашей установке не предусмотрена возможность варьирования разброса длин снарядов. В то же время при стационарном снарядном течении на трубке  $D = 8$  мм получалась существенно меньшая дисперсия в распределении длин снарядов ( $\delta l_{20} = 0,5$  мм при  $l_{20} = 50$  мм) по сравнению с трубкой  $D = 25$  мм ( $\delta l_{20} = 15$  мм при  $l_{20} = 50$  мм). Отклонения величины скорости распространения слабых волн сжатия при  $D = 25$  мм от значения  $c_0$  неплохо согласуются с расчетами, приведенными ниже (соотношение (21)), в которых учитывается влияние дисперсии в распределении длин снарядов.

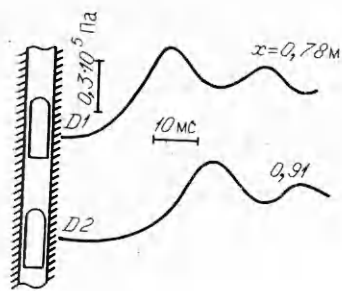
Измерения скорости распространения малых возмущений показали независимость результатов от длины снаряда при том же  $\varphi$ . При воздей-



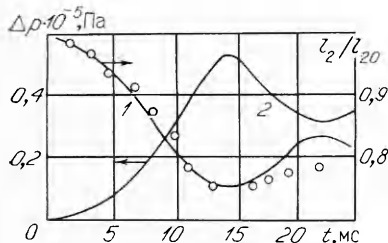
Р и с. 1

ствии на двухфазную среду высокочастотного возмущения с характерными частотами, большими, чем резонансная частота снаряда, не обнаружено возникновения предвестников, движущихся по смеси со скоростью, большей  $c_0$ . В этом случае первый же газовый снаряд выступает в качестве экрана для высокочастотных возмущений.

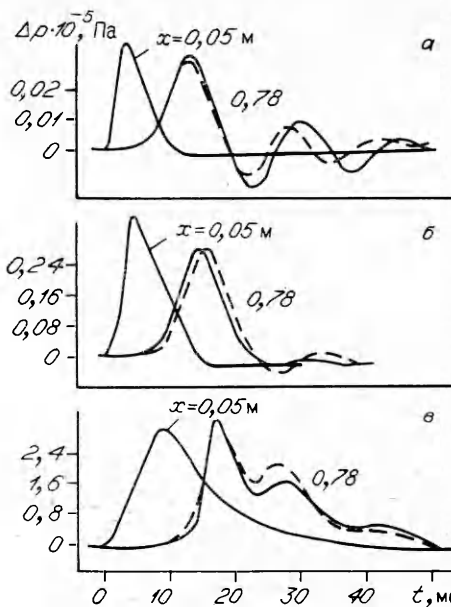
Наглядное представление о формировании волны давления в такой среде дают результаты синхронной



Р и с. 2



Р и с. 3

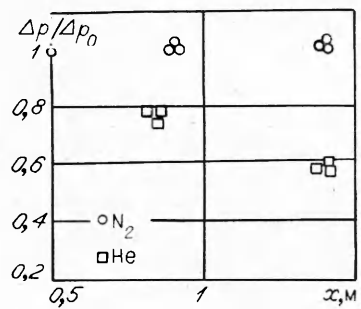


Р и с. 4

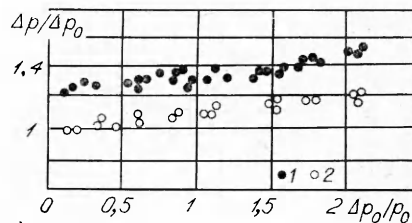
записи колебаний двух соседних снарядов (рис. 2,  $\Delta p_0/p_0 = 0,5$ ,  $\varphi = 0,3$ ,  $l_{20} = 40$  мм,  $D = 8$  мм) и возникающей в области газового снаряда волны давления, представленной на рис. 3. Из рис. 2 видно, что колебания двух соседних снарядов происходят с фазовым сдвигом относительно друг друга. Поведение воздушного снаряда в волне давления близко к адиабатическому  $p_2 = p_0(l_{20}/l_2)^\gamma$  (рис. 3, линия 1 — расчет, 2 — профиль давления в волне, точки — поведение снаряда в эксперименте,  $l_{20} = 60$  мм,  $D = 25$  мм). Здесь это вполне естественно, поскольку характерное время выравнивания температуры в снаряде диаметром  $D$  и теплопроводностью газа  $a_2 \tau = D^2/4\pi a_2 \approx 2$  с. Однако в общем случае анализа динамики волн необходимо рассматривать возможные тепловые потери. Для снарядного режима это прежде всего теплообмен между газом и жидкостью и между жидкостью и стенкой. Если толщина пленки жидкости между снарядом и стенкой канала очень мала, а стенка канала имеет низкую теплопроводность, условие термостатируемости газа может быть нарушено. При решении внутренней тепловой задачи в газовом снаряде в отличие от пузырька могут быть существенными конвективные течения.

Даже без их учета характерное время выравнивания температуры в снаряде мало и сопоставимо с длительностью волнового фронта. Так, для гелиевого снаряда в трубке  $D = 8$  мм  $\tau = 0,03$  с.

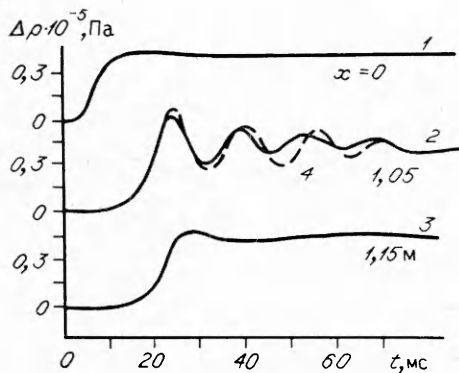
Рассмотрим распространение импульса давления в снарядном режиме воздуховодяного потока. Как видно из рис. 4 ( $\varphi = 0,18$ ,  $D = 25$  мм,  $l_{20} = 65$  мм), структура волн давления, возникающих в среде, действительно зависит от  $\sigma$  и  $M$ . Так же как и в пузырьковом режиме двухфазной смеси, существует такое значение  $\sigma = \sigma_*$ , определяемое формой начального возмущения (например, для возмущения гауссовой формы  $\sigma_* = 3,1$ , для треугольной волны  $\sigma_* = 13,1$ ), ниже которого образуется стационарный волновой пакет (рис. 4, а,  $\sigma = 2,9$ ). При  $\sigma = 7,4$  (в наших опытах  $\sigma_* \approx 6$ ) в среде возникает солитон (рис. 4, б), форма которого описывается выражением  $\Delta p = \Delta p_m \operatorname{sech}^2(x/\delta)$ ,  $\delta = l[(\Delta p_0/p_0)(\gamma + 1)/\gamma]^{-1/2}$ . Амплитуда солитона сохраняется практически неизменной (в случае азотных снарядов) на всей длине рабочего участка (рис. 5,  $D = 25$  мм,  $\varphi = 0,16$ ,  $l_{20} = 58-68$  мм,  $\sigma = 6,5$ ). Если же имеем более теплопроводный газ, например гелий, то в соответствии с вышесказанным при распространении волны происходит уменьшение ее амплитуды, что также наглядно видно



Р и с. 5



Р и с. 7



Р и с. 6

из рис. 5. Рис. 4, в ( $\sigma = 27$ ) иллюстрирует, что при  $\sigma > \sigma_*$  начальное возмущение эволюционирует в виде нелинейной волны с осциллирующим задним фронтом.

Рассмотрим распространение ударной волны (УВ) в среде. Как видно из рис. 2, 6 (линия 2,  $p_0 = 10^5$  Па,  $\varphi = 0,18$ ,  $l_{20} = 60$  мм,  $D = 25$  мм), в области газовых снарядов измеренный профиль давления имеет осцилляционную структуру. Для слабых волн  $\Delta p_0/p_0 \leq 0,2$  частота осцилляций примерно отвечает резонансной частоте  $\omega_0$ , а ширина переднего фронта — половине  $\omega_0$ .

При повышении интенсивности волны ширина переднего фронта уменьшается прежде всего за счет появления нелинейных эффектов. Амплитуда УВ увеличивается с ростом начальной интенсивности волны и при  $\Delta p_0/p_0 > 0,5$  может превышать начальную в 1,4 раза (рис. 7, точки 1,  $p_0 = 10^5$  Па,  $\varphi = 0,2$ ,  $l_{20} = 60$  мм,  $D = 25$  мм). Скорость УВ хорошо соответствует известному выражению  $u/c_0 = 1 + (\gamma + 1)\Delta p_0/p_0$ . В воздуховодной смеси УВ, зафиксированная в области газовых снарядов, сохраняет свои параметры на всей длине рабочего участка (для  $D = 25$  мм и  $H = 2,5$  м,  $H$  — длина рабочего участка). Поскольку в снарядной структуре двухфазной смеси имеем дело с дискретным пространственным распределением жидкости и газа, вполне естественно ожидать различия в форме волн внутри одной двухфазной ячейки: газовый снаряд — пробка жидкости. Так как два соседних снаряда колеблются со сдвигом фаз (см. рис. 2), а давление внутри жидкой пробки, разделяющей эти снаряды, линейно изменяется вдоль пробки от значения давления в одном снаряде до значения давления в другом, то осцилляции давления внутри жидкой пробки будут менее ярко выражены, чем в газовом снаряде. Как видно из представленных на рис. 6 (кривая 3) результатов опытов, УВ, зафиксированная в жидкой пробке, слабо осциллирует, а ее максимальная величина практически совпадает с давлением в падающей волне (рис. 7, точки 2).

Из представленных экспериментальных результатов следует, что основные положения математической модели, основанной на идеализированной схеме [3], подтверждаются на опыте. Однако в реальном течении газовые снаряды занимают не все поперечное сечение трубы и, более того, в цепочке снарядов их размер не сохраняется постоянным. Прежде чем сравнивать результаты экспериментов и расчетов, необходимо выяснить вопрос о влиянии «неидеальности» структуры на волновые характеристики. Рассматривая газ как идеальный с показателем адиабаты  $\gamma$ , пренебрегая трением жидкости о стенки канала и межфазным теплообменом, запишем уравнение движения для  $n$ -й жидкой пробки и уравнение состоя-

ния для  $n$ -го газового снаряда:

$$(2) \quad \rho_1 l_{1,n} \frac{d^2 x_{r_n}}{dt^2} = p_n - p_{n+1};$$

$$(3) \quad p_n = p(0) \left( 1 + \frac{x_n - x_{n-1} - l_{2,n-1}}{l_{2,n}} \right)^{-\gamma}.$$

Поскольку в реальном течении длина снарядов и пробок жидкости флуктуирует около среднего значения, то  $l_{1,n}$  и  $l_{2,n}$  представим в виде

$$(4) \quad l_{1,n} = (1 - \varphi)l(1 + \alpha_n);$$

$$(5) \quad l_{2,n} = \varphi l(1 + \beta_n)$$

( $\alpha_n, \beta_n$  — безразмерные малые случайные величины с нулевым средним значением,  $\varphi$  — усредненное по всей длине снарядной структуры значение объемного газосодержания).

Принимается следующая модель:  $\alpha_n, \beta_n$  — независимые случайные по натуральному аргументу  $n$  величины с нулевым радиусом корреляции:

$$(6) \quad \overline{\alpha_n \alpha_k} = \alpha^2 \delta_{nk}, \quad \overline{\beta_n \beta_k} = \beta^2 \delta_{nk}, \quad \overline{\alpha_n \beta_k} = 0.$$

С целью определения изменения основных характеристик сигнала при его распространении по реальной смеси выведем соответствующее волновое уравнение. Из системы (2)–(5) получаем цепочку разностных уравнений

$$(7) \quad \frac{d^2}{dt^2} \left[ \delta p_n - \frac{\gamma+1}{2\gamma p_0} (\delta p_n)^2 \right] = (1 + \beta_n)^{-1} \left[ \frac{\delta p_{n+1}}{\alpha_n + 1} + \frac{\delta p_{n-1}}{\alpha_{n-1} + 1} - \delta p_n \frac{2 + \alpha_n + \alpha_{n-1}}{(1 + \alpha_n)(1 - \alpha_{n-1})} \right].$$

Отсюда вытекает, что если при флуктуациях размеров снаряда и пробки жидкости общая длина ячейки сохраняется, то частота сигнала не изменится. Возмущение давления  $\delta p_n$  представим как сумму длинноволновой усредненной компоненты  $\bar{p}_n$  и случайной компоненты  $p'_n$ , значение которой может существенно изменяться при изменении  $n$  на единицу. Причем  $p'_n \ll \bar{p}_n$ , так как  $\alpha_n, \beta_n \ll 1$ . Исследуем в дальнейшем лишь эволюцию низкочастотных возмущений ( $\omega \ll \omega_0$ ). Разлагая уравнение (7) по малым параметрам  $\alpha_n, \beta_n$  и усредняя его по  $n$ , получим с учетом (5) с точностью до членов 2-го порядка малости

$$(8) \quad \frac{d^2}{dt^2} \left[ \bar{p}_n - \frac{\gamma+1}{2\gamma p_0} (\bar{p}_n)^2 \right] = (\bar{p}_{n+1} - 2\bar{p}_n + \bar{p}_{n-1})(1 + \alpha^2 + \beta^2) - \overline{p'_n(\alpha_n + \beta_n)} + \overline{p'_n(2\beta_n + \alpha_n + \alpha_{n-1})} - \overline{p'_{n-1}(\alpha_{n-1} + \beta_n)}$$

для усредненной величины  $\bar{p}_n$ ,

$$(9) \quad \frac{d^2}{dt^2} p'_n = p'_{n+1} - 2p'_n + p'_{n-1} - \beta_n (\bar{p}_{n+1} - 2\bar{p}_n + \bar{p}_{n-1}) + \alpha_n (\bar{p}_n - \bar{p}_{n+1}) - \alpha_{n-1} (\bar{p}_n - \bar{p}_{n-1})$$

для случайной компоненты  $p'_n$ . В решение линейного неоднородного уравнения (9) войдут неизвестные величины  $\bar{p}_n$ . Подставляя (9) в (8) и проводя операцию усреднения, имеем одно уравнение для функции  $\bar{p}_n$ . С помощью преобразования Фурье по времени соотношение (9) представим как

$$(10) \quad p'_{n+1} - (2 - \omega^2) p'_n + p'_{n-1} = A_n.$$

Легко найти частное решение уравнения (10):

$$p'_n = \sum_{-\infty}^n \chi \frac{\sin(n-m)\Psi}{\sin\Psi} A_m - \sum_n^{+\infty} (1 - \chi) \frac{\sin(n-m)\Psi}{\sin\Psi} A_m$$

$\omega^2 = 4 \sin^2(\Psi/2)$ ,  $\chi$  — произвольная постоянная).

Из формул (6), (10) получим

$$(11) \quad \overline{p'_n \beta_n} = 0, \quad \overline{p'_n \alpha_n} = \chi \alpha^2 (\overline{p_{n+1}} - \overline{p_n}), \quad \overline{p'_n \alpha_{n-1}} = (1 - \chi) \alpha^2 (\overline{p_{n-1}} - \overline{p_n}),$$

$$\overline{p'_{n-1} \alpha_{n-1}} = \chi \alpha^2 (\overline{p_n} - \overline{p_{n-1}}), \quad \overline{p'_{n-1} \beta_n} = \chi \beta^2 (-\overline{p_{n+1}} + 2\overline{p_n} - \overline{p_{n-1}}),$$

$$\overline{p_{n+1} \alpha_n} = (1 - \chi) \alpha^2 (\overline{p_n} - \overline{p_{n+1}}), \quad \overline{p'_{n+1} \beta_n} =$$

$$= (1 - \chi) \beta^2 (-\overline{p_{n+1}} + 2\overline{p_n} - \overline{p_{n-1}}).$$

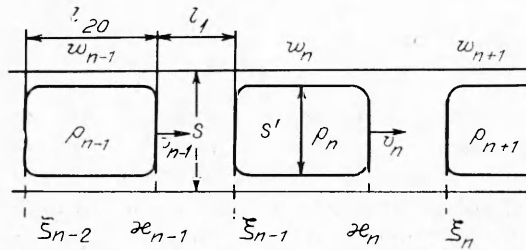
Так как  $\omega, \Psi \ll 1$  (низкочастотные возмущения), то при усреднении ядро  $\sin [(n - m)\Psi]$  и  $\overline{p_n}$  считали постоянными. Подставляя (11) в (8), находим

$$(12) \quad \left( \overline{p_n} - \frac{\gamma + 1}{2\gamma p_0} \overline{p_n^2} \right)_{\tau\tau} = (\overline{p_{n+1}} - 2\overline{p_n} + \overline{p_{n-1}})(1 + 2\alpha^2 + 2\beta^2).$$

Так же как и в [3], для перехода от дискретного аргумента к функции непрерывного аргумента будем применять математическую модель квази-континуума [6]. Тогда дифференциальное уравнение, соответствующее системе (12), для функции непрерывного аргумента в длинноволновом приближении запишется в виде уравнения Буссинеска

$$\left( \delta p - \frac{\gamma + 1}{2\gamma p_0} (\delta p)^2 \right)_{\tau\tau} - c_i^2 (1 + 2\alpha^2 + 2\beta^2) \left( \delta p_{xx} - \frac{l^2}{12} \delta p_{xxxx} \right) = 0.$$

Отсюда вытекает, что при «апериодической» снаряженной структуре течения волны распространяются со скоростью, в  $\sqrt{1 + 2\alpha^2 + 2\beta^2}$  раза большей, чем при «периодической» структуре с тем же объемным газосодержанием.



Р и с. 8

Следующая поправка к рассматриваемой модели распространения слабых волн связана с учетом тонкой пленки жидкости вокруг газового снаряда. Для вертикального потока существование этой пленки приводит к возникновению разницы в средних скоростях движения жидкости и газа, что прежде всего должно сказываться на изменении скорости распространения возмущения. Поскольку учет скольжения фаз ведет к сложной записи уравнения движения (1), основные особенности в изменении закономерностей распространения волны можно проанализировать через функцию Лагранжа.

Предположим, что из-за малой плотности газа (незначительные градиенты давления вдоль снаряда) в процессе распространения волны средние по сечению пленки скорость и толщина пленки  $\theta$  не меняются ( $\theta = (S - S')/S = \text{const}$  (рис. 8)). Обозначим через  $\xi_n$  смещения правой границы жидкой пробки,  $\kappa_n$  — смещение левой границы жидкой пробки,  $v_n$  — скорость течения в  $n$ -й пробке,  $w_n$  — скорость жидкости в  $n$ -й пленке вдоль  $n$ -го снаряда. Используя механическую аналогию [3], запишем функцию Лагранжа системы

$$(13) \quad \mathcal{L} = \sum_n \frac{m_n v_n^2}{2} + \frac{m_{fn} w_n^2}{2} \frac{p_0 S l_2}{\gamma - 1} (1 - \theta) \left( 1 + \frac{\xi_n - \kappa_{n-1}}{l_2} \right)^{1-\gamma}$$

( $m_n = \rho_1 S l_1 [1 + (\xi_n - \kappa_n)/l_1]$  — масса пленки  $n$ -го снаряда). Моделируя газовый снаряд цилиндром, из условия неразрывности жидкой фазы найдем связь между  $\dot{\xi}_n, \dot{\kappa}_n, v_n, w_n$ .

Перейдя в систему отсчета, связанную с движением межфазной границы, получаем

$$(14) \quad v_n - \dot{\xi}_n = \theta(w_n - \dot{\xi}_n);$$



$$(15) \quad v_n - \dot{\kappa}_n = \theta(w_{n+1} - \dot{\kappa}_n);$$

$$(16) \quad v_{n-1} - \dot{\kappa}_{n-1} = \theta(w_n - \dot{\kappa}_{n-1}).$$

Вычтем из (14) (16), а из (16) (14):

$$(17) \quad v_n = v_{n-1} + (1 - \theta)(\dot{\xi}_n - \dot{\kappa}_{n-1});$$

$$(18) \quad w_{n+1} = w_n + \frac{(1-\theta)}{\theta}(\dot{\xi}_n - \dot{\kappa}_n).$$

Выше сделано предположение, что скорость жидкости в пленке не меняется в волновом процессе ( $w_n = w_0 = \text{const}$ ). Следовательно, из (18) имеем  $\dot{\xi}_n = \dot{\kappa}_n$ ,  $\xi_n = \kappa_n$  (масса пробки не меняется). Используя формулу (17) как рекуррентную, запишем  $v_n = v_{-\infty} + (1 - \theta)(\dot{\xi}_n - \dot{\xi}_{-\infty})$ . Уравнение Лагранжа (13) представим в виде

$$(19) \quad \mathcal{L} = \sum_n \frac{\rho_1 S l_1}{2} (v_{-\infty} + (1 - \theta)(\dot{\xi}_n - \dot{\xi}_{-\infty}))^2 + \\ + \frac{\theta \rho_1 S l_2}{2} \left( 1 + \frac{\xi_n - \kappa_{n-1}}{l_2} \right) \frac{w_0^2}{2} - \frac{\rho_0 S l_2}{\gamma - 1} (1 - \theta) \left( 1 + \frac{\xi_n - \kappa_{n-1}}{l_2} \right)^{1-\gamma}.$$

Уравнение динамики механической системы, имеющей функцию Лагранжа  $\mathcal{L}(\xi_n, \dot{\xi}_n)$ , хорошо известно:

$$(20) \quad (d/dt)(\partial \mathcal{L} / \partial \dot{\xi}_n) = \partial \mathcal{L} / \partial \xi_n.$$

Считая  $v_{-\infty} = \dot{\xi}_{-\infty} = 0$  и рассматривая малые возмущения, из (19), (20) найдем

$$\ddot{\xi}_n = \frac{\gamma^2 \rho_0}{\rho_1 l_1 l_2 (1 - \theta)} (\xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1}).$$

Переходя к континуальному аналогу этого уравнения, определим скорость распространения возмущений

$$c_0' = \sqrt{\frac{\gamma \rho_0 (l_1 + l_2)}{\rho_1 l_1 l_2 (1 - \theta)}} = c_0 (1 - \theta)^{-1/2}.$$

С учетом аперидичности структуры

$$(21) \quad c_* \simeq c_0 (1 + \alpha^2 + \beta^2 + \theta/2).$$

Значение  $c_0'$  больше примерно на 3 % значения  $c_0$ , рассчитанного без учета наличия пленки жидкости. Эта добавка мала по сравнению с изменением, вносимым из-за разброса длин снарядов, и в экспериментах на воде не зафиксирована. Заметим, что в случае водоглицеринового раствора ( $\nu \simeq 0,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$  при  $T = 293 \text{ К}$ )  $\theta \simeq 0,2$  и вклад влияния пленки жидкости в  $c_0'$  достигает  $\simeq 11$  %. Увеличение скорости волн из-за разных длин снарядов составляет 18 % (точки 2 на рис. 1), что находится в рамках значения  $c_*$  (рис. 1, линия 4), определяемого по формуле (21).

Таким образом, при расчетах эволюции волн можно пользоваться уравнением (1) с соответствующей поправкой на  $c_0$ . Расчет уравнения (1) выполнялся по разностной схеме, предложенной в [7]. В качестве начальных условий задавался профиль начального возмущения давления. Расчетные значения волн давления определялись на расстояниях, отвечающих местоположениям датчиков давления на экспериментальной установке. Как видно из рис. 4 (штриховая линия — расчетные значения), согласование результатов опытов и расчетов удовлетворительное.

Расчет структуры УВ в области газового снаряда можно произвести, основываясь на модели Бюргера — Кортвега — де Вриза. К сожалению, на сегодня нет модели, позволяющей адекватно вычислить коэффициент эффективной вязкости в снарядном режиме двухфазной смеси. Если фор-



мально распространить результаты анализа УВ в пузырьковом потоке [2] на снарядный поток (по-видимому, это возможно, поскольку импульсы давления в рассматриваемой среде эволюционируют, как и в смеси жидкости с пузырьками газа), то к уравнению (1) необходимо слева добавить  $(1/Re)(\partial^2 p^*/\partial \eta^2)$  (в  $Re$  входит только кинематическая вязкость  $\nu$ ). Поступая так же, как и в случае смеси жидкость — пузырьки газа, можно найти некоторое критическое значение  $\nu_* = [(i^2 c_0^2 \Delta p / 12 p_0)(2\gamma/(\gamma+1))]^{1/2}$ . При выполнении условия  $\nu < \nu_*$  в среде должна возникать осцилляторная УВ. Из оценок видно, что это условие всегда справедливо для снарядного режима. Расчет УВ по уравнению БКВ с  $\nu = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с приведен на рис. 6 (линия 4).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Уоллис Г. Одномерные двухфазные течения. — М.: Мир, 1972.
2. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р. Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. — Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1980.
3. Лежнин С. И. Распространение длинноволновых возмущений при снарядном режиме течения двухфазной среды // Исследования по гидродинамике и теплообмену. — Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1980.
4. Miyazaki K., Fujii E. Y., Suita T. Propagation of pressure wave in air — water two-phase system // J. Nucl. Sci. and Technol. — 1971. — V. 8, N 11.
5. Кузнецов В. В., Лежнин С. И., Прибатурин Н. А., Зыонг Нгок Хай. Нестационарные процессы в кипящих потоках. — Новосибирск, 1983. — (Препр./ИТ СО АН СССР; № 96—83).
6. Кунин И. А. Теория упругих сред с микроструктурой. — М.: Наука, 1975.
7. Гасенко В. Г., Оренбах З. М. Затухание нелинейных волн в парожидкостных смесях // Неравновесные процессы в одно- и двухфазных системах. — Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1981.

г. Новосибирск

Поступила 16/II 1988 г.,  
в окончательном варианте — 5/VIII 1988 г.

УДК 532.529.6

П. К. Волков

### ВСПЛЫВАНИЕ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ В ТРУБЕ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В работе проведено численное исследование задачи о стационарном движении газового пузыря в вязкой несжимаемой жидкости в вертикальной трубе, когда расстояние между стенками пузыря и трубы может быть малым. Для чисел Рейнольдса  $Re \leq 100$  получены характеристики течения и форма поверхности пузыря. Обнаружено, что для  $Re > 60$  при стесненных условиях в кормовой части пузыря у стенки трубы образуется застойная зона. По данным численных расчетов построены карты режимов течения.

**1. Постановка задачи.** Пусть имеем вертикальную трубу радиуса  $R_T$ , заполненную покоящейся вязкой несжимаемой жидкостью. Сила тяжести действует сверху вниз. Тогда, если запустить пузырь газа в трубу (или создать с помощью электрического разряда), он всплывает под действием силы Архимеда. Если на некотором участке его движения при этом не будут изменяться значительно объем, форма, а также скорость подъема, то можно считать, что пузырь совершает стационарное движение. Как показывают многочисленные эксперименты, участок нестационарного движения в ряде случаев невелик и в реальных установках достаточно быстро образуется квазистационарный режим всплывания. Заметим, что скорость всплытия  $u$  в этих случаях является определяемым параметром и зависит от объема  $V$ , формы поверхности и течения жидкости около пузыря.

Математическое описание удобно проводить в системе координат, связанной с «центром пузыря». В ней газовый пузырь покоится, а жидкость набегаёт на пузырь и имеет вдали от него скорость, равную  $-u$  (рис. 1). Введем сферическую систему координат  $(r, \theta, \varphi)$  с началом  $O$