В. О. Кузнецов, О свойствах конформного радиуса области, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2001, том 276, 237–252

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 276, 2001 г.

В. О. Кузнецов

О СВОЙСТВАХ КОНФОРМНОГО РАДИУСА ОБЛАСТИ

Конформный радиус односвязной области D относительно точки $z \in D$ будем обозначать через $\mathcal{R}(D, z)$. Если $\infty \in D$, то полагаем $\mathcal{R}(D, \infty) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{R}(\{z\colon z^{-1} \in D\}, 0)$. Для удобства изложения функцию $\rho(z) = \mathcal{R}(D, z)$ будем продолжать по непрерывности в $\mathbb{C}$, полагая $\mathcal{R}(D, z) = 0$ для $z \notin D$. Если $\mathcal{R}(D, z_0) = \sup\limits_{z \in D} \mathcal{R}(D, z) = \rho$, то точку z_0 будем называть конформным центром области D, а величину ρ – максимальным конформным радиусом области D и обозначать через $\dot{\mathcal{R}}(D)$.

Понятие конформного радиуса односвязной области представляет собой одно из основных понятий теории конформных отображений, в терминах которого формулируются многие классические результаты геометрической теории функций. Однако зависимость величины конформного радиуса $\mathcal{R}(D, z)$ от положения точки z в области D до последнего времени была сравнительно мало изучена. Некоторые свойства функции $\rho(z) = \mathcal{R}(D, z)$, конформного центра и максимального конформного радиуса установлены в [1, 2].

В недавних работах Е. Г. Емельянова [3] и Л. В. Ковалева [4] получены точные неравенства для разности значений конформного радиуса в двух точках области, расположенной на конечной плоскости. Настоящая работа продолжает исследования в [2–4] и посвящена изучению зависимости между значениями функции $\rho(z) = \mathcal{R}(D, z)$ в различных точках области и некоторым смежным вопросам. Теорема 1 §1 дает точную оценку конформного радиуса произвольной односвязной области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки z через конформные радиусы этой области относительно двух других точек. В теореме 2 устанавливается связь конформного радиуса области с положением её конформного центра и наибольшим конформным радиусом. В §2 приводятся аналогичные результаты для выпуклых областей.

В дальнейшем для функции $f(\zeta) = a_0 + a_1\zeta^{-1} + \dots$, регулярной в окрестности бесконечно удаленной точки, полагаем $f'(\infty) = -\lim_{\zeta\to\infty}[\zeta^2 f'(\zeta)] = a_1$. Через cap$E$ обозначаем логарифмическую емкость замкнутого ограниченного множества E. Будем использовать также следующие обозначения:

M – класс мероморфных и однолистных в круге $U = \{|\zeta| < 1\}$ функций $f(\zeta)$, нормированных условиями $f(0) = f'(0) - 1 = 0$;

S – класс функций $f(\zeta) \in M$, регулярных в круге U;

S^c – класс функций $f(\zeta) \in S$, отображающих круг U на выпуклые области;

Σ – класс функций $f(\zeta) = \zeta + a_0 + a_1\zeta^{-1} + \dots$, мероморных и однолистных в области $\{|\zeta| > 1\}$.

§1. Свойства конформного радиуса произвольной односвязной области

1. Пусть a и b – различные точки на замыкании $\overline{\mathbb{R}}$ вещественной оси $\mathbb{R}$. Через $\langle a,b\rangle$ будем обозначать ту из лежащих на $\overline{\mathbb{R}}$ дуг с концами в точках a и b, которая проходится "слева направо" при движении от точки a к точке b. Таким образом, $\langle a,b\rangle = (a,b)$ при $a < b$, $\langle a,b\rangle = (a,+\infty)\cup\{\infty\}\cup(-\infty,b)$ при $a > b$, $\langle a,\infty\rangle = (a,+\infty)$, $\langle\infty,b\rangle = (-\infty,b)$. Пусть $D(a,b) = \overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{\langle b,a\rangle}$. Семейство областей $D(a,b)$, где a и b – всевозможные различные точки $\overline{\mathbb{R}}$, обозначим через $\mathcal{D}$.

Теорема 1. *Пусть D – односвязная область на римановой сфере $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathcal{R}(D,0) = r$, $\mathcal{R}(D,1) = R$. Пусть*

$$P_1(x) = r(1-x)^2+Rx^2-2x(1-x)\sqrt{4+rR}, \quad P_1(\infty) \stackrel{\text{def}}{=} r+R+2\sqrt{4+rR},$$

$$P_2(x) = r(1-x)^2+Rx^2+2x(1-x)\sqrt{4+rR}, \quad P_2(\infty) \stackrel{\text{def}}{=} r+R-2\sqrt{4+rR},$$

и пусть

$$a_1 = \frac{2-r+\sqrt{4+rR}}{4+R-r}, \quad b_1 = \frac{2+r-\sqrt{4+rR}}{4+r-R}, \tag{1}$$

$$a_2 = \frac{2-r-\sqrt{4+rR}}{4+R-r}, \quad b_2 = \frac{2+r+\sqrt{4+rR}}{4+r-R} \tag{2}$$

– нули многочленов $P_1(z)$ и $P_2(x)$, соответственно. Тогда $\langle a_2,b_2\rangle\setminus[b_1,a_1]\subset D$. Имеют место неравенства

$$P_1(x) \leqslant \mathcal{R}(D,x) \leqslant P_2(x) \quad \textit{при} \quad x\in(0,1), \tag{3}$$

$$P_1(x) \geqslant \mathcal{R}(D, x) \geqslant P_2(x) \quad \textit{при} \quad x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus [0, 1]. \tag{4}$$

Равенство в левых частях неравенств (3) *и* (4) *имеет место только в случае* $D = D(a_1, b_1)$ *и* $x \in \overline{\langle a_1, b_1 \rangle}$. *Равенство в правых частях этих неравенств имеет место только в случае* $D = D(a_2, b_2)$ *и* $x \in \overline{\langle a_2, b_2 \rangle}$.

Замечание. Левая часть неравенства (3) и правая часть неравенства (4) формально справедливы и для тех x, для которых $P_1(x) < 0$ или $P_2(x) < 0$. В этом случае, как показывает анализ теоремы, существуют области, удовлетворяющие условиям теоремы 1, но не содержащие точки x.

Доказательство. Пусть $x \in (-\infty, \infty) \cap D$, $\rho = \rho(x) = \mathcal{R}(D, x)$. Существует функция $f(\zeta) = \zeta + c_2\zeta^2 + \ldots \in M$ такая, что функция $\rho f(\zeta) + x$ отображает круг U на область D. При всех достаточно малых z имеем

$$f^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right) = \frac{z}{\rho} - c_2\left(\frac{z}{\rho}\right)^2 + o(z^2),$$

$$\mathcal{R}(D, x+z) = \rho\left(1 - \left|f^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right)\right|^2\right)\left|f'\left(f^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right)\right)\right| =$$

$$= \rho\left(1 - \left|\frac{z}{\rho}\right|^2\right)\left|1 + 2c_2\left(\frac{z}{\rho} - c_2\left(\frac{z}{\rho}\right)^2\right) + 3c_3\left(\frac{z}{\rho}\right)^2\right| + o(z^2) =$$

$$= \rho\left[1 + \frac{2\operatorname{Re}(c_2 z)}{\rho} + \frac{\operatorname{Re}\left[(3c_3 - 2c_2^2)z^2\right] + 2(\operatorname{Im} c_2 z)^2 - |z|^2}{\rho^2}\right] + o(z^2) =$$

$$= \rho + 2\operatorname{Re}(c_2 z) + \frac{3\operatorname{Re}\left[(c_3 - c_2^2)z^2\right] + \left(|c_2|^2 - 1\right)|z|^2}{\rho} + o(z^2). \tag{5}$$

Следовательно,

$$\rho' = \rho'(x) = 2\operatorname{Re} c_2, \quad \rho'' = \rho''(x) = 2\frac{3\operatorname{Re}(c_3 - c_2^2) + |c_2|^2 - 1}{\rho}. \tag{6}$$

Поскольку $f \in M$, то $\left(f(\zeta^{-1})\right)^{-1} = \zeta - c_2 - (c_3 - c_3^2)\zeta^{-1} + \cdots \in \Sigma$ и, в силу известной оценки для класса Σ (см., например, [5]), $\operatorname{Re}(c_3 - c_2^2) \geqslant -1$. Так как $|c_2|^2 \geqslant \frac{1}{4}(\rho')^2$, то из (6) получаем

$$\rho'' \geqslant \frac{(\rho')^2}{2\rho} - \frac{8}{\rho}. \tag{7}$$

Это неравенство справедливо при всех вещественных $x \in D$. Равенство в этом неравенстве достигается только при $\operatorname{Im} c_2 = 0$ и $\operatorname{Re}(c_3 - c_2^2) = -1$, что имеет место только в случае $D \in \mathcal{D}$.

Докажем сначала утверждения теоремы относительно правых частей неравенств (3) и (4). Если $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$, то

$$\mathcal{R}\big(D(\alpha, \beta), x\big) = \left| \frac{4(x-\beta)(x-\alpha)}{\beta - \alpha} \right|.$$

Непосредственная проверка показывает, что решение $a = a(r, R)$, $b = b(r, R)$ системы

$$\mathcal{R}\big(D(a,b), 0\big) = r, \quad \mathcal{R}\big(D(a,b), 1\big) = R, \quad (0,1) \subset \langle a, b \rangle,$$

единственно и дается равенствами (2). Выражая $\rho_0(x) = \mathcal{R}\big(D(a_2, b_2)x\big)$ через r и R, находим, что $\rho_0(x) = P_2(x)$ при $x \in \langle a_2, b_2 \rangle$ и $\rho_0(x) = 0$ при $x \notin \langle a_2, b_2 \rangle$.

Заметим, что функция $\rho_0(x)$ при всех $x \in \langle a_2, b_2 \rangle \setminus \{\infty\}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\rho'' = \frac{(\rho')^2}{2\rho} - \frac{8}{\rho},$$

а для функции $\rho(x)$, соответствующей области $D \notin \mathcal{D}$, при любом вещественном $x \in D$ в (7) имеет место строгое неравенство. Сделав в (7) замену переменной $s = \sqrt{\rho}$, убеждаемся, что функции $s(x) = \sqrt{\rho(x)}$ и $s_0(x) = \sqrt{\rho_0(x)}$ удовлетворяют условиям

$$s''(x) > -\frac{4}{s^3(x)} \quad \text{и} \quad s_0''(x) = -\frac{4}{s_0^3(x)},$$

соответственно.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = s(x) - s_0(x)$. Эта функция непрерывна на $(-\infty, \infty)$, причем $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ и $\varphi(x) = -s_0(x) < 0$ при $x \in \langle a_2, b_2 \rangle \setminus D$. При этом, если $\varphi(x) \geqslant 0$ для некоторого $x \in \langle a_2, b_2 \rangle \cap D$, то $s(x) \geqslant s_0(x)$ и

$$\varphi''(x) = s''(x) - s_0''(x) > -\frac{4}{s^3(x)} + \frac{4}{s_0^3(x)} \geqslant 0.$$

Для доказательства утверждений теоремы относительно правых частей неравенств (3) и (4) достаточно показать, что $\varphi(x) < 0$ при всех $x \in (0,1)$ и $\varphi(x) > 0$ при всех $x \in \overline{\langle a_2, b_2 \rangle} \setminus [0,1]$.

Предположим, что $\varphi(x_0) \geqslant 0$ для некоторого $x_0 \in (0,1)$. Тогда наибольшее значение функции φ на $[0,1]$ достигается в некоторой точке $c \in (0,1) \cap D$ и является локальным максимумом функции φ. Поскольку $\varphi(c) \geqslant 0$ и, следовательно, $\varphi''(c) > 0$, то это невозможно.

Доказательство правой части неравенства (4) начнем с рассмотрения случая $|r - R| < 4$. Тогда $-\infty < a_2 \leqslant 0$, $1 \leqslant b_2 < \infty$. Отметим, что при $r = R = 0$ правая часть неравенства (4) бессодержательна, так как в этом случае $a_2 = 0$, $b_2 = 1$ и $P_2(x) < 0$ при $x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus [0,1]$. Пусть $R > 0$. Из (2) тогда вытекает, что $b_2 > 1$. Так как $\varphi(1) = 0$, то $\varphi''(1) > 0$ и, поскольку $\varphi(x) < 0$ при $x \in (0,1)$, то $\varphi'(1) > 0$. Предположим, что $\varphi(x_0) \leqslant 0$ для некоторого $x_0 \in (1, b_2]$. Тогда существует $c > 1$ такое, что $\varphi(c) = 0$ и $\varphi(x) > 0$ при $x \in (1, c)$. Следовательно, $\varphi''(x) > 0$ на $[1, c]$ и, в силу выпуклости, $\varphi(x) < 0$ на $(1, c)$. Полученное противоречие показывает, что $\varphi(x) > 0$ на $(1, b_2]$. Поскольку $\varphi(x) < 0$ при $x \in \langle a_2, b_2\rangle \setminus D$, то $[1, b_2) \subset D$. Если $r > 0$, то случай $x_0 \in [a_2, 0)$ рассматривается аналогично.

Пусть теперь $|r - R| \geqslant 4$. Тогда $\infty \in \overline{\langle a_2, b_2\rangle}$. Предположим, что $\mathcal{R}(D, x) \leqslant \mathcal{R}\big(D(a_2, b_2), x\big)$ для некоторого $x \in \overline{\langle a_2, b_2\rangle} \setminus [0;1]$. Рассмотрим дробно-линейное преобразование

$$\mu(z) = \frac{z}{1 + \lambda(z-1)}, \quad \lambda \text{ -- вещественное.}$$

Имеем $\mu(0) = 0$, $\mu(1) = 1$, $\mu'(0) = (1-\lambda)^{-1}$, $\mu'(1) = (1-\lambda)$. Положим $\widetilde{D} = \mu(D)$, $D(\widetilde{a}, \widetilde{b}) = \mu\big(D(a_2, b_2)\big)$, $\widetilde{x} = \mu(x)$, $\widetilde{r} = \mathcal{R}(\widetilde{D}, 0) = (1-\lambda)^{-1} r$, $\widetilde{R} = \mathcal{R}(\widetilde{D}, 1) = (1-\lambda)R$. Тогда $\widetilde{x} \in \overline{\langle \widetilde{a}, \widetilde{b}\rangle} \setminus [0,1]$. Выбрав надлежащим образом параметр $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (0,1)$, получим $|\widetilde{r} - \widetilde{R}| < 4$ и, в силу доказанного выше, $\mathcal{R}(\widetilde{D}, \widetilde{x}) > \mathcal{R}\big(D(\widetilde{a}, \widetilde{b}), \widetilde{x}\big)$. Отсюда

$$\mathcal{R}(D, x) = \big|\mu'(x)\big|^{-1} \mathcal{R}(\widetilde{D}, \widetilde{x}) > \big|\mu'(x)\big|^{-1} \mathcal{R}\big(D(\widetilde{a}, \widetilde{b}), \widetilde{x}\big) = \mathcal{R}\big(D(a_2, b_2), x\big).$$

Утверждения теоремы относительно правых частей неравенств (3) и (4) доказаны.

Чтобы проверить утверждения теоремы относительно левых частей неравенств (3) и (4) рассмотрим дробно-линейное преобразование

$$\mu(z) = \frac{z}{2z - 1}.$$

Имеем $\mu(0) = 0$, $\mu(1) = 1$, $\mu'(0) = \mu'(1) = -1$, $\mu\big(\langle a_1, b_1\rangle\big) = \langle a_2, b_2\rangle$. Применяя доказанные выше неравенства к области $\mu(D)$ и точкам 0, 1, $\mu(x)$, получим остальные утверждения теоремы.

Полагая в теореме 1 $R = 0$, получим

Следствие 1. *Пусть D – односвязная область на $\overline{\mathbb{C}}$, $1 \notin D$, $\mathcal{R}(D, 0) = r$. Пусть $a = r(r-4)^{-1}$, $b = r(r+4)^{-1}$. Тогда $\langle a, b\rangle \subset D$ и для всех $x \in \overline{\langle a, b\rangle} \setminus \{\infty\}$ имеет место неравенство*

$$\big|\mathcal{R}(D, x) - r(1-x)^2\big| \leqslant 4\big|x(1-x)\big|. \tag{8}$$

Если, кроме того, $\infty \in \langle a, b\rangle$, то

$$|\mathcal{R}(D, \infty) - r| \leqslant 4. \tag{9}$$

Равенство в (8) при $x \neq 0, 1$ имеет место только в случаях $D = D(1, b)$ и $x \in \overline{\langle 1, b\rangle} \setminus \{\infty\}$, $D = D(a, 1)$ и $x \in [a, 1]$. Равенство в (9) имеет место только в случаях $D = D(1, b)$ и $D = D(a, 1)$.

Следствие 2 [3,4]**.** *Пусть D – односвязная область на $\mathbb{C}$, $\mathcal{R}(D, 0) = r$. Тогда*

$$|\mathcal{R}(D, 1) - r| \leqslant 4. \tag{10}$$

Равенство в этом неравенстве имеет место только в случаях: $D = D\left(\infty, \frac{1}{4}r\right)$, $r \leqslant 4$; $D = D\left(-\frac{1}{4}r, \infty\right)$.

Доказательство. Рассмотрим дробно-линейное преобразование $\mu(z) = z(z+1)^{-1}$, переводящее точки 0, 1, ∞ в 0, $\frac{1}{2}$, 1, и применим к области $\widetilde{D} = \mu(D)$ следствие 1. Имеем $\mathcal{R}(\widetilde{D}, 0) = r$, $\mathcal{R}\left(\widetilde{D}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\mathcal{R}(D, 1)$, $\mu^{-1}(a) = -\frac{1}{4}r$, $\mu^{-1}(b) = \frac{1}{4}r$. Здесь a и b – те же, что и в следствии 1. Полагая в (8) $x = \frac{1}{2}$ и преобразуя полученное неравенство, приходим к неравенству (10). При этом равенство в (10) для области $D\left(\infty, \frac{1}{4}r\right)$ имеет место только в случае $\frac{1}{2} \in [b, 1]$, т.е. при $r \geqslant 4$.

Замечание. В силу следствия 2, значения конформных радиусов $\mathcal{R}(D, 0) = r$ и $\mathcal{R}(D, 1) = R$ области $D \in \mathbb{C}$ удовлетворяют условию $|r - R| = 4$ только тогда, когда $D = D(\infty, a)$, $a \leqslant 0$, или $D = D(b, \infty)$, $b \geqslant 1$. В этом случае $\mathcal{R}(D, x) = r(1-x) + Rx$ для любого вещественного $x \in D$. Если $|r - R| < 4$, то прямой функциональной зависимости между величинами $\mathcal{R}(D, 0)$, $\mathcal{R}(D, 1)$ и $\mathcal{R}(D, x)$ не существует. Поскольку экстремальная область $D(a_2, b_2)$ в теореме 1 при $|r - R| \leqslant 4$ не содержит бесконечно удаленной точки, то правые части неравенств (3) и (4) в этом случае являются точными и в более узком семействе односвязных областей D на конечной плоскости, для которых $\mathcal{R}(D,0)=r$, $\mathcal{R}(D,1)=R$.

Следствие 3. *Пусть* r, $R>0$, $\widetilde{D}(z_1,z_2,z_3,r,R)$ – *семейство односвязных областей* D *на* $\overline{\mathbb{C}}$, *содержащих фиксированные различные точки* z_1, z_2, $z_3\in\overline{\mathbb{C}}$ *и таких, что* $\mathcal{R}(D,z_1)=r$, $\mathcal{R}(D,z_2)=R$. *Пусть* O – *окружность, проходящая через точки* z_1, z_2, z_3, *и пусть* Γ – *та из двух соединяющих точку* z_1 *с точкой* z_2 *дуг окружности* O, *внутренней точкой которой является точка* z_3. *Пусть* γ_1 *и* γ_2 – *дуги окружности* O, *концы которых* a_1, b_1 *и* a_2, b_2 *определяются равенствами* $\mathcal{R}(\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{\gamma}_k,a_k)=r$, $\mathcal{R}(\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{\gamma}_k,b_k)=R$, $k=1,2$. *Пусть* γ_1 – *та из этих двух дуг, которая не пересекается с дугой* Γ. *Тогда наибольшее значение величины* $\mathcal{R}(D,z_3)$ *в семействе* $\widetilde{D}(z_1,z_2,z_3,r,R)$ *достигается только для области* $D_0=\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{\gamma}_1$. *Если* $z_3\in\gamma_2$, *то в семействе* $\widetilde{D}(z_1,z_2,z_3,r,R)$ *существуют области, не содержащие точки* z_3. *Если* $z_3\notin\gamma_2$, *то наименьшее значение величины* $\mathcal{R}(D,z_3)$ *в семействе* $\widetilde{D}(z_1,z_2,z_3,r,R)$ *достигается только для области* $D_0=\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{\gamma}_2$.

Для доказательства достаточно рассмотреть дробно-линейное преобразование, переводящее точки z_1, z_2, z_3 в 0, 1, 1/2, и применить теорему 1.

Используя связь между логарифмической емкостью ограниченного континуума и конформным радиусом его дополнения относительно бесконечно удаленной точки, из теоремы 1 получаем

Следствие 4. *Пусть* E – *континуум нв* $\mathbb{C}$, $\mathcal{R}(\overline{\mathbb{C}}\setminus E,0)=r$, $\mathcal{R}(\overline{\mathbb{C}}\setminus E,1)=R$. *Тогда*

$$\operatorname{cap}E\geqslant\frac{1}{r+R+2\sqrt{4+rR}}\,. \tag{11}$$

Если $|r-R|>4$, *то*

$$\operatorname{cap}E\leqslant\frac{1}{r+R-2\sqrt{4+rR}}\,. \tag{12}$$

Равенство в неравенстве (11) *имеет место только в случае* $E=[b_1,a_1]$, *в неравенстве* (12) – *только в случае* $E=[b_2,a_2]$. *Здесь* a_1, b_1, a_2, b_2 *определяются формулами* (1), (2).

2. Если точка z_0 является конформным центром области D, то, в силу определения, z_0 – стационарная точка функции $\rho(z) = \mathcal{R}(D, z)$. Имеет место

Теорема 2. *Пусть $z = 0$ – стационарная точка функции $\rho(z) = \mathcal{R}(D, z)$, $\rho = \rho(0)$. Тогда*

$$\mathcal{R}(D, z) \geqslant \rho - \frac{4|z|^2}{\rho}.$$

Равенство в этом неравенстве при $z \neq 0$ имеет место только в случае $D = e^{i\theta} D(-a, a)$, $e^{-i\theta} z \in [-a, a]$, $a = \frac{1}{2}\rho$, θ – произвольное вещественное число.

Доказательство. Достаточно ограничиться случаем $z = x$, где x – вещественное число. Пусть $f(\zeta)$ и c_2 – те же, что и при доказательстве теоремы 1. Из (5) вытекает, что $z = 0$ является стационарной точкой функции $\rho(z)$ тогда и только тогда, когда $c_2 = 0$. Непосредственная проверка показывает, что $D_0 = D(-a, a)$ – единственная область в семействе $\mathcal{D}$, для которой функция $\rho_0(x) = \mathcal{R}(D_0, x)$ удовлетворяет условиям $\rho_0(0) = \rho$, $\rho_0'(0) = 0$. При этом $\rho_0(x) = \rho - 4\rho^{-1}x^2$, если $x \in [-a, a]$, и $\rho_0(x) = 0$, если $x \notin [-a, a]$. Таким образом, равенство в (13) для области D_0 имеет место при всех $x \in [-a, a]$.

Пусть теперь $D \neq D_0$. Тогда $D \notin \mathcal{D}$ и, как установлено при доказательстве теоремы 1, для функции $\rho(x) = \mathcal{R}(D, x)$ в (7) при всех вещественных $x \in D$ имеет место строгое неравенство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\varphi(x) = \sqrt{\rho(x)} - \sqrt{\rho_0(x)} > 0$ при всех $x \in [-a, 0) \cup (0, a]$. Функция φ, как и при доказательстве теоремы 1, обладает следующим свойством: $\varphi''(x) > 0$ при всех $x \in [-a, a]$, для которых $\varphi(x) \geqslant 0$. Поскольку $\rho(0) = \rho_0(0) = \rho$, $\rho'(0) = \rho_0'(0) = 0$, то $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$. Поэтому $\varphi''(0) > 0$ и, следовательно, $\varphi(x) > 0$ в некоторой проколотой окрестности точки $x = 0$. Предположим, что $\varphi(x_0) \leqslant 0$ при некотором $x_0 \in (0, a]$. Тогда существует такое $y > 0$, что $\varphi(x) > 0$ на $(0, y)$ и $\varphi(y) = 0$. Это невозможно, поскольку в этом случае $\varphi''(x) > 0$ на $(0, y)$, и, в силу выпуклости, $\varphi(x) < 0$ на $(0, y)$. Случай $x_0 \in [-a, 0)$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $\rho > 0$, $f(\zeta) = \zeta + c_2\zeta^2 + \cdots \in M$, функция $\rho f(\zeta)$*

отображает круг U на область D. Тогда

$$\mathcal{R}(D, z) \geqslant \frac{|\rho + c_2 z|^2 - 4|z|^2}{\rho}\,. \tag{13}$$

Если $|c_2| > 2$, то

$$\mathcal{R}(D, \infty) \geqslant \frac{|c_2|^2 - 4}{\rho}\,. \tag{14}$$

Равенство в (13) при $z \neq 0$ достигается только в случае $D = \mu^{-1}\big(e^{i\theta} D(-a, a)\big)$, $e^{-i\theta}\mu(z) \in [-a, a]$. Равенство в (14) достигается только в случае $D = \mu^{-1}\big(e^{i\theta} D(-a, a)\big)$. Здесь $a = \frac{1}{2}\rho$, $\mu(z) = \rho z/((\rho + c_2 z)$, θ – произвольное вещественное число.

Замечание. Геометрически теорема 3 означает, что экстремальными областями для неравенств (13) и (14) являются области, полученные удалением из римановой сферы $\overline{\mathbb{C}}$ дуги окружности, проходящей через точки 0, $-\rho c_2^{-1}$ и z.

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(\zeta) = \mu(\rho f(\zeta))$. Поскольку $g(\zeta) = \rho\zeta + o(\zeta^2)$, то можно использовать теорему 2. Применяя эту теорему к области $\mu(D)$ и точкам $\mu(z)$ и $\mu(\infty)$, получим все утверждения теоремы 3.

Полагая в теореме 3 $\rho = 1$ и переформулировав теорему в терминах отображающей функции, получим

Следствие 5. *Пусть $f(\zeta) = \zeta + c_2\zeta^2 + \dots \in M$. Тогда*

$$|f'(\zeta)| \geqslant \frac{|1 + c_2 f(\zeta)|^2 - 4|f(\zeta)|^2}{1 - |\zeta|^2}.$$

Равенство в этом неравенстве при $\zeta \neq 0$ достигается только в случае

$$f(\zeta) = \frac{\zeta}{1 - c_2\zeta + e^{2i\theta}\zeta^2}, \quad e^{i\theta}\zeta \in (-1, 1),$$

θ – произвольное вещественное число.

Следствие 6. *Пусть D – односвязная область, $\mathcal{R}(D, 0) = \rho > 0$. Тогда*

$$\mathcal{R}(D, -z) + \mathcal{R}(D, z) \geqslant 2\rho - \frac{8|z|^2}{\rho}.$$

Равенство в этом неравенстве при $z \neq 0$ имеет место только в случае $D = e^{i\theta}D(-a,a)$, $e^{-i\theta}z \in [-a,a]$, $a = \frac{1}{2}\rho$, θ – произвольное вещественное число.

Доказательство. В силу теоремы 3,

$$\mathcal{R}(D,-z)+\mathcal{R}(D,z) \geqslant \frac{|\rho+c_2z|^2+|\rho-c_2z|^2-8|z|^2}{\rho} =$$

$$= \frac{2\rho^2+2|c_2z|^2-8|z|^2}{\rho} \geqslant 2\rho - \frac{8|z|^2}{\rho}.$$

Следствие 7. *Пусть E – континнум на $\mathbb{C}$,* $\operatorname{cap} E = c < \frac{1}{2}$. *Тогда*

$$\mathcal{R}\big(\overline{\mathbb{C}}\setminus E,-1\big)+\mathcal{R}\big(\overline{\mathbb{C}}\setminus E,1\big) \geqslant 2\frac{1-4c^2}{c}.$$

Равенство в этом неравенстве имеет место только в случае $E = [-2c,2c]$.

Для доказательства достаточно рассмотреть отображение $\mu(z)=z^{-1}$ и применить следствие 6 к области $D=\overline{\mathbb{C}}\setminus\mu(E)$, положив $z=1$.

§2. Свойства конформного радиуса выпуклой области

Через $\varPi$ будем обозначать семейство всевозможных вертикальных полос $\Pi(a,b)=\{a<\operatorname{Re}\zeta<b\}$ и полуплоскостей $\Pi(a,\infty)=\{\operatorname{Re}\zeta>a\}$, $\Pi(\infty,b)=\{\operatorname{Re}\zeta<b\}$, a, b – вещественные числа, $a<b$.

Лемма. *Пусть r, $R \geqslant 0$, $|R-r| \leqslant 2$. Тогда существует область $D \in \varPi$ такая, что $\mathcal{R}(D,0)=r$, $\mathcal{R}(D,1)=R$.*

Доказательство. Пусть $D \in \varPi$, $\widetilde{D}=\mu(D)$, где $\mu(z)=z(2z-1)^{-1}$. Тогда область $\widetilde{D}$ является дополнением до римановой сферы объединения двух, возможно вырожденных, кругов, касающихся друг друга в точке $z=1/2$. Центры этих кругов расположены на вещественной оси и область $\widetilde{D}$ полностью определяется радиусами этих кругов. Радиус левого круга обозначим через x, правого – через y, а область $\widetilde{D}$ будем обозначать через $\widetilde{D}(x,y)$. Условие 0, $1 \in \overline{D}$ равносильно условию $0 \leqslant x$, $y \leqslant 1/4$. Поскольку $\mu(0)=0$, $\mu(1)=1$, $\mu'(0)=\mu'(1)=-1$, то $\mathcal{R}(D,0)=\mathcal{R}(\widetilde{D},0)$, $\mathcal{R}(D,1)=\mathcal{R}(\widetilde{D},1)$. Положим $g(x,y)=\mathcal{R}(\widetilde{D}(x,y),0)$, $h(x,y)=$

$\mathcal{R}(\widetilde{D}(x,y),1)$. Функции g и h определены и непрерывны на множестве $K\setminus\{(0,0)\}$, где $K=\{(x,y)\colon x\in[0,1/4], y\in[0,1/4]\}$ – квадрат на xy-плоскости, и убывают по каждому из аргументов. Достаточно показать, что существует точка $M\in K$ такая, что $g(M)=r$, $h(M)=R$. Пусть, для определенности, $R\geqslant r$. Имеем $g(1/4,0)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} g(x,y)=+\infty$. Кроме того, $h(x,0)-g(x,0)=2$ и $h(x,x)=g(x,x)$ при любом $x\in(0,1/4]$. В силу монотонности функции g на каждом из отрезков, по которым прямая $y=(\operatorname{tg}\varphi)x$, $\varphi\in[0,\pi/4]$, пересекает квадрат K, существует единственная точка $A(\varphi)=(x(\varphi),y(\varphi))$, для которой $g(A)=r$. Поскольку g непрерывна, то функция $A(\varphi)$ непрерывна на $[0,\pi/4]$. Следовательно, функция $\delta(\varphi)=h(A(\varphi))-g(A(\varphi))=h(A(\varphi))-r$ также непрерывна на $[0,\pi/4]$. Поскольку $\delta(0)=2$, $\delta(\pi/4)=0$ и $0\leqslant R-r\leqslant 2$, то найдется угол $\varphi\in[0,\pi/4]$ такой, что $\delta(\varphi)=R-r$. Тогда $g(A(\varphi))=r$, $h(A(\varphi))=R$. Лемма доказана.

Пусть D – выпуклая область, $\mathcal{R}(D,0)=r$, $\mathcal{R}(D,1)=R$. В [4] показано, что $|r-R|\leqslant 2$ и функция $\rho(z)=\mathcal{R}(D,z)$ является вогнутой в D. При этом равенство $|r-R|=2$ имеет место только для областей $D=\Pi(a,\infty)$, $a\leqslant 0$, и $D=\Pi(\infty,b)$, $b\geqslant 1$. В этом случае $\mathcal{R}(D,x)=r(1-x)+Rx$ для любого вещественного $x\in D$. Если $|r-R|<2$, то, в силу вогнутости функции $\rho(z)$, $\mathcal{R}(D,x)\geqslant r(1-x)+Rx$ при $x\in(0,1)$ и $\mathcal{R}(D,x)\leqslant r(1-x)+Rx$ при вещественных $x\in D\setminus[0,1]$. Следующая теорема дополняет эту информацию.

Теорема 4. *Пусть D – выпуклая область и пусть $\mathcal{R}(D,0)=r$, $\mathcal{R}(D,1)=R$, $|r-R|<2$. Пусть*

$$P(a,b,x)=2\frac{b-a}{\pi}\sin\frac{(x-a)\pi}{b-a},\quad x\in[a,b].$$

Тогда $(a,b)\setminus[0,1]\subset D$, где a и b однозначно определяются условиями

$$r=P(a,b,0),\quad R=P(a,b,1),\quad a\leqslant 0,\quad b\geqslant 1. \tag{15}$$

Имеют место неравенства

$$\mathcal{R}(D,x)\leqslant P(a,b,x)\quad \textit{при}\quad x\in(0,1); \tag{16}$$

$$\mathcal{R}(D,x)\geqslant P(a,b,x)\quad \textit{при}\quad x\in(a,b)\setminus[0,1]. \tag{17}$$

Равенство в неравенствах (16) *и* (17) *имеет место только в случае* $D = \Pi(a, b)$.

Доказательство. Пусть $\rho(x)$ и $f(\zeta)$ – те же, что и при доказательстве теоремы 1. Из (6) получаем

$$\rho'' = \frac{2\,\mathrm{Re}(3c_3 - 4c_2^2) + (\rho')^2 - 2}{\rho}. \tag{18}$$

Так как область D является выпуклой, то (см., например, [6]) $g(\zeta) = \zeta f'(\zeta) = \zeta + d_2\zeta^2 + \dots$ – звездообразная функция. Следовательно, $g \in S$ и поэтому (см., например, [5]) $\mathrm{Re}(d_3 - d_2^2) \geqslant -1$. Поскольку $d_3 - d_2^2 = 3c_3 - 4c_2^2$, то из (18) вытекает, что функция $\rho(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\rho'' \geqslant \frac{(\rho')^2}{\rho} - \frac{4}{\rho}. \tag{19}$$

Равенство в этом неравенстве достигается только при $\mathrm{Re}(d_3 - d_2^2) = -1$, что имеет место только в случае

$$g(\zeta) = \frac{\zeta}{1 + 2\lambda\zeta + \zeta^2}, \quad -1 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Отсюда $f'(\zeta) = (1 + 2\lambda\zeta + \zeta^2)^{-1}$. Интегрируя, получим:

$$f(\zeta) = \frac{\zeta}{1 + \lambda\zeta} \quad \text{при} \quad |\lambda| = 1$$

и

$$f(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}\,\zeta}{1 + \lambda\zeta} \quad \text{при} \quad |\lambda| < 1.$$

В каждом из этих случаев функция $\rho f(\zeta) + x$ отображает круг U на область $D \in \mathit{\Pi}$.

По лемме, существует полоса $D_0 = \Pi(a, b)$, удовлетворяющая условиям (15). Тогда $\rho_0(x) = \mathcal{R}(D_0, x) = P(a, b, x)$ при $x \in [a, b]$. На интервале (a, b) функция $\rho_0(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\rho'' = \frac{(\rho')^2}{\rho} - \frac{4}{\rho}.$$

Отметим, что полоса $\Pi(a, b)$ определяется функцией $\rho_0(x)$ однозначно, поскольку $\rho_0(x) \neq 0$ только при $x \in (a, b)$. Сделав в (19) замену переменной $s = \log \rho$, убеждаемся, что функции

$s(x) = \log\rho(x)$ и $s_0(x) = \log\rho_0(x)$ удовлетворяют условиям $s''(x) \geqslant -4\exp(-2s(x))$ и $s_0''(x) = -4\exp(-2s_0(x))$, соответственно.

Докажем неравенство (16) сначала в предположении, что r, $R > 0$. Тогда $[0,1] \subset D$, $a < 0$, $b > 1$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = s(x) - s_0(x)$. Эта функция непрерывна на $(a,b) \cap D$, причем $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Кроме того, если $\varphi(x) \geqslant 0$ для некоторого $x \in (a,b) \cap D$, то $s(x) \geqslant s_0(x)$ и

$$\varphi''(x) = s''(x) - s_0''(x) \geqslant -4\exp(2s(x)) + 4\exp(2s_0(x)) \geqslant 0.$$

Равенство $\varphi''(x) = 0$ в этом случае имеет место только тогда, когда $\varphi(x) = 0$ и $D \in \Pi$. Для доказательства неравенств (16), (17) и утверждения относительно равенства в этих неравенствах достаточно показать, что $\varphi(x) \leqslant 0$ при всех $x \in (0,1)$, $\varphi(x) \geqslant 0$ при всех $x \in (a,b) \setminus [0,1]$, и что равенство в этих неравенствах имеет место только тогда, когда $D = \Pi(a,b)$.

Предположим, что $\varphi(x_0) \geqslant 0$ для некоторого $x_0 \in (0,1)$. Тогда наибольшее значение функции φ на $[0,1]$ достигается в некоторой точке $c \in (0,1)$. Поскольку c – точка максимума, то $\varphi''(c) \leqslant 0$. С другой стороны, $\varphi(c) \geqslant 0$, следовательно, $\varphi''(c) \geqslant 0$. Значит, $\varphi''(c) = 0$. Тогда, в силу свойств функции φ, $\varphi(c) = 0$ и $D \in \Pi$. Пусть $D = \Pi(\widetilde{a}, \widetilde{b})$. Поскольку $\varphi(c)$ – наибольшее значение функции на $[0,1]$, то $\varphi(x) \leqslant 0$ при всех $x \in [0,1]$. Заменив область D областью $\widetilde{D} = \Pi(a,b)$, а величины a и b величинами $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$, и повторив те же рассуждения, проверим, что $s_0(x) - s(x) = -\varphi(x) \leqslant 0$ на $[0,1]$. Следовательно $\varphi(x) = 0$ при всех $x \in [0,1]$. Это означает, что функции $\rho(x)$ и $\rho_0(x)$ совпадают и $D = \Pi(a,b)$. Отметим, что тем самым доказано, что $\Pi(a,b)$ – единственная область семейства Π, удовлетворяющая условиям (15).

Пусть теперь $rR = 0$. Тогда $[0,1] \not\subset D$. Если $(0,1) \cap D = \varnothing$, то $a = 0$, $b = 1$ и неравенство (16) бессодержательно. Пусть $(0,1) \cap D \neq \varnothing$, $\varepsilon > 0$, $\widetilde{\rho}(x) = P(a-\varepsilon, b+\varepsilon, x)$. Тогда функция $\widetilde{\varphi}(x) = \log\rho(x) - \log\widetilde{\rho}_0(x)$, непрерывна на $[0,1] \cap D$, причем $\varphi(0) < 0$, если $0 \in D$, и $\varphi(1) < 0$, если $1 \in D$. Кроме того, если $x_0 \in (0,1) \cap \partial D$, то $\widetilde{\varphi}(x) \to -\infty$ при $x \to x_0$. Поэтому функция $\widetilde{\varphi}$ достигает наибольшего значения на $(0,1) \cap D$. Заменяя в предыдущем рассуждении функцию φ на функцию $\widetilde{\varphi}$, проверяем, что $\rho(x) \leqslant \widetilde{\rho}(x)$ при всех $x \in (0,1) \cap D$. Отсюда, в силу произвольности ε, вытекает, что $\rho(x) \leqslant \rho_0(x) = P(a,b,x)$ на $[0,1]$. Предположим, что $\rho(c) = \rho_0(c)$ при некотором $c \in (0,1)$. Поскольку функция

$\varphi(x) = \log\rho(x) - \log\rho_0(x)$ на $[0,1]$ неположительна, то c – точка максимума функции φ. Отсюда, как и в предыдущем случае, вытекает, что $D = \Pi(a,b)$.

Если $D = \Pi(a,b)$, то в (17) имеет место равенство при всех $x \in (a,b)\setminus[0,1]$. Пусть $D \neq \Pi(a,b)$. Тогда $D \notin \Pi$. Повторяя рассуждения теоремы 1, проверяем, что $\rho(x) > P(a,b,x)$ при всех $x \in (a,b)\setminus[0,1]$. Теорема доказана.

Пусть $f(\zeta) = \zeta + c_2\zeta^2 + \ldots \in S^c$, функция $\rho f(\zeta)$ отображает круг U на область D. Известно (см., например, [6]), что $|c_2| \leqslant 1$. Анализ приведенного в [6] доказательства показывает, что $|c_2| = 1$ только в том случае, когда D – полуплоскость. В этом случае $\mathcal{R}(D,z) = \rho + 2\operatorname{Re}(c_2 z)$ для любого $z \in D$. Это утверждение дополняет следующая

Теорема 5. *Пусть $\rho > 0$, $|c_2| < 1$, $f(\zeta) = \zeta + c_2\zeta^2 + \ldots \in S^c$, функция $\rho f(\zeta)$ отображает круг U на область D. Пусть*

$$c = \operatorname{Re} c_2, \quad \lambda = \frac{\rho}{2\sqrt{1-c^2}}, \quad a = -\lambda\arccos c, \quad b = \lambda\arccos(-c). \tag{20}$$

Тогда $(a,b) \subset D$ и при всех $x \in [a,b]$ имеет место неравенство

$$\mathcal{R}(D,x) \geqslant \rho\cos\frac{x}{\lambda} + 2\lambda c\sin\frac{x}{\lambda}, \tag{21}$$

Равенство в этом неравенстве при $x \neq 0$ имеет место только в случае c_2 – вещественное число, $D = \Pi(a,b)$, $x \in [a,b]$.

Доказательство. Пусть $D_0 = \Pi(a,b)$, где a и b определяются формулами (20). Непосредственно проверяется, что $\rho_0(x) = \mathcal{R}(D_0,x) = \rho\cos\frac{x}{\lambda} + 2\lambda c\sin\frac{x}{\lambda}$ при $x \in [a,b]$. Поэтому для области D_0 в (21) имеет равенство при всех $x \in [a,b]$. Пусть $D \neq D_0$, $\rho(x) = \mathcal{R}(D,x)$. Имеем $\rho(0) = \rho_0(0) = \rho$, $\rho'(0) = \rho_0'(0) = 2c$. Рассматривая функцию $\varphi(x) = \log\rho(x) - \log\rho_0(x)$ и повторяя рассуждения доказательства теоремы 2, проверяем остальные утверждения теоремы.

Следствие 8. *Пусть D – выпуклая область, $\mathcal{R}(D,0) = \rho > 0$, $a = \pi\rho/4$. Тогда при всех $|z| \leqslant a$ имеет место неравенство*

$$\mathcal{R}(D,z) + \mathcal{R}(D,-z) \geqslant 2\rho\cos\frac{2|z|}{\rho}.$$

Равенство в этом неравенстве при $z \neq 0$ имеет место только в случае $D = e^{i\theta}\Pi(-a,a)$, $e^{-i\theta}z \in [-a,a]$, θ – произвольное вещественное число.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай вещественных z. Пусть c_2, c и λ – те же, что и при доказательстве теоремы 5. Если $|c_2| = 1$, то D – полуплоскость и утверждение теоремы тривиально. Если $|c_2| < 1$, то $c < 1$. Применим к точкам z и $-z$ теорему 5. Если $c \neq 0$, то правая часть неравенства (21) в некоторых точках отрезка $[-a,a]$ отрицательна. Но поскольку

$$a = \frac{\pi\rho}{4} < \pi\lambda = \frac{\pi\rho}{2\sqrt{1-c^2}}\,,$$

то неравенство (21) справедливо при всех $x \in [-a,a]$. Имеем

$$\mathcal{R}(D,x) + \mathcal{R}(D,-x) \geqslant 2\rho\cos\frac{2\sqrt{1-c^2}\,x}{\rho} \geqslant 2\rho\cos\frac{2x}{\rho}.$$

Если D – выпуклая область, то, в силу вогнутости в области D функции $\rho(z) = \mathcal{R}(D,z)$, всякая стационарная точка $z_0 \in D$ функции $\mathcal{R}(D,z)$ является конформным центром области D, а величина $\mathcal{R}(D,z_0)$ – максимальным конформным радиусом. Полагая в теореме 5 $c_2 = 0$, получаем

Следствие 9. *Пусть $z = 0$ – конформный центр выпуклой области D и пусть $\dot{\mathcal{R}}(D) = \rho$, $a = \pi\rho/4$. Тогда при всех $|z| \leqslant a$ имеет место неравенство*

$$\mathcal{R}(D,z) \geqslant \rho\cos\frac{2|z|}{\rho}.$$

Равенство в этом неравенстве при $z \neq 0$ имеет место только в случае $D = e^{i\theta}\Pi(-a,a)$, $e^{-i\theta}z \in [-a,a]$, θ – произвольное вещественное число.

Следствие 10 [2]. *Пусть $z = 0$ – конформный центр выпуклой области D и пусть $\dot{\mathcal{R}}(D) = \rho$. Тогда $\{|z| < R\} \subset D$, где $R = \pi\rho/4$. При этом $z = Re^{i\theta} \in \partial D$ только в случае $D = e^{i\theta}\Pi(-R,R)$, θ – вещественное число.*

Литература

1. Г. Полиа, Г. Сеге, *Изопериметрические неравенства в математической физике,* М., 1962.

2. H. R. Haegi, *Extremalprobleme und Ungleichungen konformer Gebietsgrössen,* Compositio Math. **8** (1950), 81–111.
3. Е. Г. Емельянов, *О максимуме конформного радиуса в семействах областей, удовлетворяющих дополнительным условиям,* Зап. научн. семин. ПОМИ **226** (1996), 93–108.
4. Л. В. Ковалев, *Оценки конформного радиуса и теоремы искажения для однолистных функций,* Зап. научн. семин. ПОМИ **263** (2000), 141–156.
5. Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения,* М., 1962.
6. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного,* 2-ое изд., М., 1966.

С.-Петербургский
государственный
университет
водных коммуникаций

Поступило 16 апреля 2001 г.