6. Гайдай Н. Н. // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 1. С. 31—38.
7. Коврижкин В. В. // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1. С. 182—186.
8. Кузьмин А. Г. // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С. 77—83.
9. Кузьмин А. Г. Краевые задачи для уравнений смешанного типа, произвольным образом изменяющих тип в заданной области. Л., 1985. Деп. в ВИНИТИ 20.03.85, № 2012—85
10. Кузьмин А. Г. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 1. С. 66—74.
11. Кузьмин А. Г. // Уравнения неклассического типа. Новосибирск, 1985. С. 79—82.
12. Кузьмин А. Г. // Вестник ЛГУ. 1986. Сер. 1, вып. 4. С. 65—70.
13. Петрушко И. М. // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 1. С. 123—135.
14. Нахушев А. М. // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257, № 1. С. 45—47.
15. Брюханов В. А. // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 1. С. 3—6.
16. Врагов В. Н. // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 24—31.
17. Егоров И. Е. // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск, 1979. С. 45—48.
18. Нахушев А. М. // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 1. С. 66—73.
19. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М., 1973.
20. Фикера Г. // Математика: Период. сб. пер. иностр. ст. 1963. Т. 7, № 6. С. 99—121.
21. Kohn J. J., Nirenberg L. // Communications on pure and applied mathematics. 1967. Vol. 20. P. 797—872.
22. Олейник О. А., Радкевич Е. В. // Итоги науки и техники: Мат. анализ. М., 1971. С. 7—252.
23. Врагов В. Н. // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098—1105.
24. Врагов В. Н. // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск, 1978. С. 5—13.
25. Терехов А. Н. // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск, 1979. С. 128—136.
26. Каратопраклиев Г. Д. // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 1. С. 64—75.
27. Дачев Г. Д. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 11. С. 1894—1902.
28. Ларькин Н. А. // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 6. С. 1308—1314.
29. Егоров И. Е. // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск, 1985. С. 60—72.
30. Каратопраклиева М. Г. // Докл. БАН. 1985. Т. 38, № 11. С. 1453—1456.
31. Лебедев М. Г. //Изв. АН СССР. Сер. мех. жидкости и газа. 1977. № 2. С. 92—99.
32. Пао С. П. // Ракетная техника и космонавтика. 1972. Т. 10, № 5. С. 44—52.
33. Архипов В. П., Соболев А. В. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275, № 4. С. 777—779.
34. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М., 1966.
35. Мельник З. О. // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 6. С. 1096—1104.
36. Харибегашвили С. С. // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280, № 6. С. 1313—1316.
37. Кузьмин А. Г. // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 10. С. 1853—1861.
38. Кузьмин А. Г. // Неклассические задачи уравнений математической физики. Новосибирск, 1982. С. 106—108.
39. Кузьмин А. Г. // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 8. С. 1478—1490.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Поступила в редакцию 3 июля 1986 г.

УДК 517.95

М. ЛОПЕС

ОЦЕНКИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Введение. В настоящей работе рассматривается линейное эллиптическое уравнение

$$L(u) \equiv \sum_{|k| \leqslant 2m} a_k(x) D^k u = f(x) \tag{1}$$

в ограниченной области Ω n-мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^n$. Здесь

$x=(x_1, \ldots, x_n)$ — точка области Ω, $k=(k_1, \ldots, k_n)$ — мультииндекс, $k_j \geqslant 0$, $j=1, \ldots, n$, $|k|=k_1+\ldots+k_n$ — длина этого мультииндекса, m — целое неотрицательное число, $D^k=\partial^{|k|}/\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}$.

Далее всюду предполагаем, что выполняется условие эллиптичности уравнения (1) $\forall x \in \Omega$, $\forall l=(l_1, \ldots, l_n) \in \mathbf{R}^n$, $(l^k=l_1^{k_1} \cdots l_n^{k_n})$

$$\sum_{|k|=2m} a_k(x) l^k \geqslant \lambda |l|^{2m}, \quad \lambda=\text{const}>0. \tag{2}$$

Будем говорить, что функция $u(x)$ является обобщенным решением уравнения (1), если $u(x)$ принадлежит пространству Соболева $W_p^{2m}(\Omega)$ (см. [1, 2]) и удовлетворяет уравнению (1) почти везде в Ω.

Пусть Ω' — область, замыкание которой принадлежит Ω; будем называть n-мерный вектор h допустимым, если все векторы th, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, сдвигают Ω' в пределах Ω.

Известно [3—5], что если в уравнении (1) функция $f(x) \in L_p(\Omega)$, $p>1$, и коэффициенты $a_k(x)$, $|k| \leqslant 2m$, непрерывны в Ω, то старшие производные обобщенных решений уравнения (1) принадлежат пространству $L_p(\Omega^\delta)$, $p>1$, в любой внутренней подобласти $\Omega^\delta=\{x \in \Omega: \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)>\delta\}$, $\delta>0$, и их нормы в $L_p(\Omega^\delta)$ оцениваются через нормы в $L_p(\Omega)$ функции $f(x)$ и самого решения $u(x)$.

В настоящей работе в предположении, что функция $f(x) \in L_p(\Omega)$, $p>1$, удовлетворяет условию Гёльдера в $L_p(\Omega)$ с показателем α, $0<\alpha<1$ (см. [6]):

$$H_{\alpha, p}^{\Omega}(f) \equiv \sup_{\Omega' \subset \Omega} \left(\int_{\Omega'} \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{|h|^\alpha} \right|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \tag{3}$$

где h — допустимый вектор, и что коэффициенты $a_k(x)$, $|k| \leqslant 2m$, удовлетворяют обычному условию Гёльдера с показателем α, устанавливаются априорные оценки для $H_{\alpha, p}^{\Omega^\delta}(D^k u)$, $|k|=2m$, через $H_{\alpha, p}^{\Omega}(f)$ и норму в $L_p(\Omega)$ функции $f(x)$ и самого решения $u(x)$ (теорема 1).

В предположении, что $f(x) \in L_p(\Omega)$, $p>1$, $H_{\alpha, s}^{\Omega}(f)<\infty$, $1<s<p$, $0<\alpha<1$, коэффициенты $a_k(x)$ непрерывны в Ω, и $H_{\alpha, q}^{\Omega}(a_k)<\infty$, $q=ps/(p-s)$, $|k| \leqslant 2m$, устанавливаются априорные оценки для $H_{\alpha, s}^{\Omega^\delta}(D^k u)$, $|k|=2m$, через $H_{\alpha, s}^{\Omega}(f)$ и нормы в $L_p(\Omega)$ функции $f(x)$ и самого решения $u(x)$ (теорема 2).

Обозначим через $L_{p, \alpha}(\Omega)$ $(W_{p, \alpha}^{2m}(\Omega))$ совокупность функций $u(x) \in L_p(\Omega)$ $(W_p^{2m}(\Omega))$, имеющих соответственно конечные нормы

$$\|u\|_{0, \alpha, p}^{\Omega}=\|u\|_{L_p(\Omega)}+H_{\alpha, p}^{\Omega}(u), \tag{4}$$

$$\|u\|_{2m, \alpha, p}^{\Omega}=\sum_{|k| \leqslant 2m} \|D^k u\|_{0, \alpha, p}^{\Omega}, \quad D^0 u \equiv u. \tag{5}$$

Будем использовать также следующие известные нормы для функций $u(x)$, определенных в области Ω и удовлетворяющих обычному условию Гёльдера с показателем β, $0<\beta<1$:

$$|u|_{0, \beta}^{\Omega}=|u|_{0, 0}^{\Omega}+H_\beta^{\Omega}(u), \tag{6}$$

где

$$|u|_{0, 0}^{\Omega}=\sup_{x \in \Omega} |u(x)|, \quad H_\beta^{\Omega}(u)=\sup_{\substack{x \in \Omega \\ (x+\Delta x) \in \Omega}} \frac{|u(x+\Delta x)-u(x)|}{|\Delta x|^\beta}.$$

Положим $\sum\limits_{|k|\leqslant 2m} |a_k|^{\Omega}_{0,\alpha}=B_1$, $\sum\limits_{|k|\leqslant 2m} \|a_k\|^{\Omega}_{0,\alpha,q}=B_2$. Всюду далее через K будем обозначать постоянные, зависящие от n, p, λ, m, $\operatorname{diam}\Omega$, B_1 (или B_2).

2. Внутренние оценки для решений уравнений с постоянными коэффициентами. Пусть Q — единичный куб $\{x=(x_1, \ldots, x_n)\in\mathbf{R}^n,\ 0\leqslant x_j\leqslant 1,\ j=1, \ldots, n\}$. Рассмотрим внутри Q дифференциальное уравнение

$$L_0(u)\equiv \sum_{|k|\leqslant 2m} a_k D^k u=f(x), \tag{7}$$

для которого выполняется условие (2).

Лемма 1. *Пусть в уравнении (7) $f(x)\in L_{p,\alpha}(Q)$, $\sum\limits_{|k|=2m}|a_k|=B_1<\infty$. Тогда для любого обобщенного решения $u(x)\in W^{2m}_{p,\alpha}(Q)$, $p>1$, $0<\alpha<1$ уравнения (7) имеют место неравенства*

$$\|u\|_{W^{2m}_{p}(Q^{\delta})}\leqslant K\left[\|f\|_{L_p(Q)}+\frac{\|u\|_{L_1(Q)}}{\delta^{2n+2m+1}}\right], \tag{8}$$

$$\sum_{|k|\leqslant 2m} H^{Q^{\delta}}_{\alpha,p}(D^k u)\leqslant K\left[\frac{\|f\|_{L_p(Q)}}{\delta^{n+\alpha}}+H^{Q}_{\alpha,p}(f)+\frac{\|u\|_{L_1(Q)}}{\delta^{2n+2m+1+\alpha}}\right]. \tag{9}$$

Предварительно приведем некоторые вспомогательные рассмотрения. Обозначим через $\eta_\delta(\xi)$ бесконечно дифференцируемую функцию в Q, удовлетворяющую условиям

$$\eta_\delta(\xi)=\begin{cases}1, & \xi\in Q^{\delta},\\ 0, & \xi\in Q\setminus Q^{\delta/2},\end{cases} \tag{10}$$

$$|D^k\eta_\delta(\xi)|\leqslant C/\delta^{n+k},\quad |k|\leqslant 2m, \tag{11}$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от δ [7]. В дальнейшем будем употреблять следующую регуляризирующую функцию [8—10]:

$$\mathcal{G}(\varepsilon;\ l',\ z)=1/[1-i\varepsilon(|l'|i+z)]^{n+1}. \tag{12}$$

Здесь $l'=(l_1, \ldots, l_{n-1})$, $|l'|=\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1} l_j^2\right)^{1/2}$, ε — положительное число, z — комплексная переменная. Легко видеть, что функция $\mathcal{G}(\varepsilon;\ l',\ z)$ ограничена при всех значениях ε, l', z и стремится к нулю при $|l'|$, $|z|\to\infty$ и при $\varepsilon\to 0$ $\mathcal{G}(\varepsilon;\ l',\ z)\to 1$ равномерно относительно l', z. Легко видеть, что функция $\mathcal{G}(\varepsilon;\ l',\ z)$ не имеет полюсов в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ и аналитична по z.

Рассмотрим интеграл

$$G(\varepsilon;\ x,\ \xi)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{|l'|\geqslant 1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathcal{G}(\varepsilon;\ l',\ z)}{\Lambda(l',\ z)}e^{i(l,\ x-\xi)}dl'dz+$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{|l'|<1}\int\limits_{\gamma}\frac{\mathcal{G}(\varepsilon;\ l',\ z)}{\Lambda(l',\ z)}e^{i(l,\ x-\xi)}dl'dz,$$

где $l=(l',\ z)$, $\Lambda(l',\ z)=\sum\limits_{|k|=2m} a_k l_1^{k_1}\cdots l_{n-1}^{k_{n-1}} z^{k_n}$, $x\in Q^{\delta}$, $\xi\in Q$, γ — контур в комплексной плоскости $\{z\}$, состоящей из следующих частей: участков вещественной оси $(-\infty,\ -\delta_0)$, $(\delta_0,\ +\infty)$ (δ_0 — положительное число) и полуокружности $|z|=\delta_0$, лежащей в верхней полуплоскости.

Такого рода интегралы рассматривались в ряде работ (см., например, [3, 8, 9, 11]).

Известно, что в окрестности $x=\xi$ имеет место неравенство

$$|D^{2m+s}G|\leqslant C/|x-\xi|^{n+s+1}\quad (s=0,\ 1,\ \ldots),\tag{13}$$

где D^{2m+s} — любая производная порядка $2m+s$ и C — постоянная.

Доказательство леммы 1. Будем считать сначала, что f — достаточно гладкая финитная функция. Пусть

$$\omega_\delta(\varepsilon;\ x,\ \xi)=\eta_\delta(\xi)\,G(\varepsilon;\ x,\ \xi).\tag{14}$$

Умножим обе части уравнения (7) на $\omega_\delta(\varepsilon;\ x,\ \xi)$ и проинтегрируем по Q (по ξ). Интегрируя по частям $2m$ раз, при помощи (10) получим

$$\int\limits_Q L_0(\omega_\delta)\,u(\xi)\,d\xi=\int\limits_Q \omega_\delta(\varepsilon;\ x,\ \xi)\,f(\xi)\,d\xi.\tag{15}$$

Используя формулу Лейбница, имеем

$$L_0(\omega_\delta)=L_0(G)\eta_\delta(\xi)+\sum_{|k|=2m}a_k\Bigg(\sum_{0\leqslant|q|\leqslant 2m-1}C_q^k\,D_\xi^{k-q}\,\eta_\delta(\xi)\,D_\xi^q\,G(\varepsilon;\ x,\ \xi)\Bigg),\tag{16}$$

$q=(q_1,\ \ldots,\ q_n)$, $|k-q|=(k_1-q_1)+\ldots+(k_n-q_n)$, k_j, q_j — целые неотрицательные числа, $q_j\leqslant k_j$, $j=1,\ \ldots,\ n$, $C_q^k=\prod\limits_{j=1}^{n}C_{q_j}^{k_j}$, $C_{q_j}^{k_j}$ — коэффициент бинома Ньютона. Производя дифференцирование по ξ, из (12) находим

$$L_0(G)=\frac{(-1)^m}{(2\pi)^n}\int\limits_{|l'|\geqslant 1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{G}(\varepsilon;\ l',\ z)\,e^{i(l,\ x-\xi)}dl'dz+$$
$$+\frac{(-1)^m}{(2\pi)^n}\int\limits_{|l'|<1}\int\limits_{\gamma}\mathcal{G}(\varepsilon;\ l',\ z)\,e^{i(l,\ x-\xi)}dl'dz.$$

Поскольку $\mathcal{G}(\varepsilon;\ l',\ z)$ не имеет полюсов в верхней части комплексной плоскости $\{z\}$, то во втором слагаемом последней формулы контур γ может быть заменен вещественной осью l_n. Тогда мы получим формулу

$$\int\limits_Q L_0(G)\,\eta_\delta(\xi)\,u(\xi)\,d\xi=\frac{(-1)^m}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{G}(\varepsilon;\ l',\ l_n)\,(\widetilde{\eta_\delta u})\,(l)\times$$
$$\times e^{i(l,\ x)}dl_1\cdots dl_n\equiv u_\varepsilon(x),\tag{17}$$

через $\tilde{g}$ всюду далее будем обозначать преобразование Фурье функции g.

При помощи (16) и (17) следующее равенство получается из (15):

$$u_\varepsilon(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{|l'|\geqslant 1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathcal{G}(\varepsilon;\ l',\ z)}{\Lambda(l',\ z)}\,(\widetilde{\eta_\delta f})\,(l',\ z)\,e^{i(l,\ x)}dl'dz+$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{|l'|<1}\int\limits_{\gamma}\frac{\mathcal{G}(\varepsilon;\ l',\ z)}{\Lambda(l',\ z)}\,(\widetilde{\eta_\delta f})\,(l',\ z)\,e^{i(l,\ x)}dl'dz-$$
$$-\sum_{|k|=2m}a_k\Bigg(\sum_{0\leqslant|q|\leqslant 2m-1}C_q^k\int\limits_Q u(\xi)\,D_\xi^{k-q}\,\eta_\delta(\xi)\,D_\xi^q\,G(\varepsilon;\ x,\ \xi)\,d\xi\Bigg).\tag{18}$$

Рассмотрим какую-нибудь частную производную функции $u_\varepsilon(x)$ порядка $2m$ и обозначим ее через $D_x^{2m}u_\varepsilon$. Согласно последней формуле и (10), будем иметь

$$D_x^{2m}u_\varepsilon(x)=\frac{(-1)^m}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{|l'|\geqslant 1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{G}(\varepsilon;\ l',\ z)\,\frac{l_1^{k'_1}\cdots l_{n-1}^{k'_{n-1}}\,z^{k'_n}}{\Lambda(l',\ z)}\,(\widetilde{\eta_\delta f})\,(l',\ z)\times$$

$$\times e^{i(l,x)}dl'dz+\frac{(-1)^m}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{|l'|<1}\int\limits_{\gamma}\mathcal{G}(\varepsilon;\, l',\, z)\times$$

$$\times\frac{l_1^{k'_1}\cdots l_{n-1}^{k'_{n-1}}\, z^{k'_n}}{\Lambda(l',\, z)}(\widetilde{\eta_\delta f})(l',\, z)\, e^{i(l,x)}dl'dz-$$

$$-\sum_{|k|=2m}a_k\Bigg(\sum_{0\leqslant q\leqslant 2m-1}C_q^k\int\limits_{Q^{\delta/2}\setminus Q}u(\xi)D_\xi^{k-q}\,\eta_\delta(\xi)\,D_x^{2m}D_\xi^q\,G(\varepsilon;\, x,\, \xi)\,d\xi\Bigg), \quad (19)$$

$$k'_1+\ldots+k'_n=2m.$$

Известно, что функция $l_1^{k'_1}\cdots l_n^{k'_n}/\Delta(l',\, l_n)$ является множителем Марцинкевича (см. [3, 12—14]), и поэтому произведение $\frac{l_1^{k'_1}\cdots l_n^{k'_n}}{\Lambda(l',\, l_n)}(\widetilde{\eta_\delta f})(l',\, l_n)$ является преобразованием Фурье некоторой достаточно гладкой функции $\varphi(x)$:

$$\frac{l_1^{k'_1}\cdots l_n^{k'_n}}{\Lambda(l',\, l_n)}(\widetilde{\eta_\delta f})(l',\, l_n)=\tilde{\varphi}(l), \quad (20)$$

причем

$$\|\varphi\|_{L_p(Q)}\leqslant K\|f\|_{L_p(Q)}. \quad (21)$$

Теперь перейдем к оценке $\|u\|_{W_p^{2m}(Q^\delta)}$. Подставим выражение (20) в правую часть (19). Заменяя интеграл по контуру γ на интеграл по вещественной оси l_n, находим

$$D_x^{2m}u_\varepsilon(x)=\frac{(-1)^m}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{G}(\varepsilon;\, l)\,\tilde{\varphi}(l)\,e^{i(l,x)}dl_1\cdots dl_n-$$

$$-\sum_{|k|=2m}a_k\Bigg(\sum_{0\leqslant |q|\leqslant 2m-1}C_q^k\int\limits_{Q^{\delta/2}\setminus Q}u(\xi)D_\xi^{k-q}\eta_\delta(\xi)\,D_x^{2m}D_\xi^q\,G(\varepsilon;\, x,\, \xi)\,d\varphi\Bigg)=I_1-I_2. \quad (22)$$

Рассмотрим отдельно I_1 и I_2. Поскольку $\mathcal{G}(\varepsilon;\, l)$ является множителем Марцинкевича и φ удовлетворяет условию (21), то получим [3, 13, 14]

$$\|I_1(x)\|_{L_p(Q^{2\delta})}\leqslant\|I_1(x)\|_{L_p(Q)}\leqslant K\|f\|_{L_p(Q)}. \quad (23)$$

Рассмотрим теперь сумму $I_2(x)$. На основании оценки (13) и свойств (10), (11) функции $\eta_\delta(\xi)$ находим

$$|I_2(x)|\leqslant\frac{K}{\delta^{2n+2m+1}}\|u\|_{L_1(Q)}. \quad (24)$$

Из неравенств (23) и (24) следует, что

$$\|D_x^{2m}u_\varepsilon(x)\|_{L_p(Q^{2\delta})}\leqslant K[\|f\|_{L_p(Q)}+\|u\|_{L_1(Q)}/\delta^{2n+2m+1}]. \quad (25)$$

При помощи свойств эквивалентных норм в пространствах Соболева $W_p^{2m}(Q)$ (см. [2]) выводятся аналогичные неравенства для производных функций $u_\varepsilon(x)$ низшего порядка. Таким образом, справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{W_p^{2m}(Q^{2\delta})}\leqslant K[\|f\|_{L_p(Q)}+\|u\|_{L_1(Q)}/\delta^{2n+2m+1}]. \quad (26)$$

Известно, что $u_\varepsilon(x)$ слабо сходится к $(\eta_\delta u)(x)$ при $\varepsilon\to 0$ (см. § 2 [3]). Тогда на основании теоремы Соболева [1, с. 20], свойств функции η_δ и того, что K не зависит от ε, имеем

$$\|u\|_{W_p^{2m}(Q^\delta)}\leqslant K[\|f\|_{L_p(Q)}+\|u\|_{L_1(Q)}/\delta^{2n+2m+1}]. \tag{27}$$

Последнее неравенство доказано пока при условии, что $f(x)$ — достаточно гладкая функция. Однако легко видеть, что это неравенство имеет место для $f\in L_p$ $(p>1)$, поскольку на основании теоремы 7 [3] (см. также гл. 1 [14]) оператор I_1 может быть распространен на все $L_p(\mathbf{R}^n)$ с сохранением неравенства (23).

Оценка (27) отличается от оценки, полученной в § 5 [3], тем, что во второй член правой части не входят нормы решений в W_1^{2m-1} (∂Q), а входит $\|u\|_{L_1(Q)}$.

Переходим теперь к оценке $H_{\alpha,p}^{Q^{2\delta}}(D^k u)$, $|k|=2m$. Пусть $x\in(Q^{2\delta})'$, h — допустимый вектор, такой, что $|h|<\delta/2$, и f — достаточно гладкая финитная функция. Рассуждая так же, как и при выводе (22), из (19) получаем, что

$$D_x^{2m}u_\varepsilon(x+h)-D_x^{2m}u_\varepsilon(x)=\frac{(-1)^m}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathscr{G}(\varepsilon;\ l)\tilde{\varphi}_h(l)e^{i(l,x)}dl_1\cdots dl_n-$$

$$-\sum_{|k|=2m}a_k\Bigg(\sum_{0\leqslant|q|\leqslant 2m-1}C_q^k\int\limits_{Q^{\delta/2}\setminus Q^\delta}u(\xi)D_\xi^{k-q}\eta_\delta(\xi)\,[D_x^{2m}D_\xi^q G(\varepsilon;\ x+h\xi)-$$

$$-D_x^{2m}D_\xi^q G(\varepsilon;\ x,\ \xi)]d\xi\Bigg)=J_1-J_2, \tag{28}$$

где

$$\tilde{\varphi}_h(l)=\frac{l_1^{k_1}\cdots l_n^{k_n}}{\Lambda(l)}[(\eta_\delta f)_h-(\eta_\delta f)],\quad (\eta_\delta f)_h(x)=(\eta_\delta f)(x+h),$$

причем

$$\|\varphi_h\|_{L_p(Q^{2\delta})}\leqslant K\left[\frac{|h|}{\delta^{n+1}}\|f\|_{L_p(Q)}+\left(\int\limits_{Q^{\delta/2}}|f(x+h)-f(x)|^p dx\right)^{1/p}\right]. \tag{29}$$

Аналогично выводу (23) находим

$$\|J_1\|_{L_p(Q^{2\delta})}\leqslant K\left[\frac{|h|}{\delta^{n+1}}\|f\|_{L_p(Q)}+\left(\int\limits_{Q^{\delta/2}}|f(x+h)-f(x)|^p dx\right)^{1/p}\right]. \tag{30}$$

Рассмотрим теперь сумму $J_2(x)$. При помощи теоремы о среднем, неравенства (13) и свойств (10), (11) функции η_δ получим следующую оценку:

$$\|J_2\|_{L_p(Q^{2\delta})}\leqslant K\frac{|h|}{\delta^{2n+2m+2}}\|u\|_{L_1(Q)}. \tag{31}$$

Неравенства (30), (31) и теорема Соболева дают

$$\left(\int\limits_{(Q^{2\delta})'}\left|\frac{D^{2m}u(x+h)-D^{2m}u(x)}{|h|^\alpha}\right|^p dx\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant K\left[\frac{\|f\|_{L_p(Q)}}{\delta^{n+\alpha}}+H_{\alpha,p}^Q(f)+\frac{\|u\|_{L_1(Q)}}{\delta^{2n+2m+1+\alpha}}\right]. \tag{32}$$

Ясно, что оценка (32) имеет место для производных функции $u(x)$ низшего порядка [2].

Рассмотрим случай, когда $|h| \geqslant \delta/2$, $|k| \leqslant 2m$,

$$\left(\int\limits_{(Q^{2\delta})'} \left| \frac{D^k u(x+h) - D^k u(x)}{|h|^\alpha} \right|^p dx \right)^{1/p} \leqslant \left(\frac{2}{\delta} \right)^\alpha \cdot 2 \|D^k u\|_{L_p(Q^{2\delta})}. \quad (33)$$

Из (32), (33) и (27) вытекает следующее неравенство при $|k| \leqslant 2m$:

$$\sup_{(Q^{2\delta})' \subset Q^{2\delta}} \left(\int\limits_{(Q^{2\delta})'} \left| \frac{D^k u(x+h) - D^k u(x)}{|h|^\alpha} \right|^p dx \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant K \left[\frac{\|f\|_{L_p(Q)}}{\delta^{n+\alpha}} + H^Q_{\alpha, p}(f) + \frac{\|u\|_{L_1(Q)}}{\delta^{2n+2m+1+\alpha}} \right]. \quad (34)$$

Рассуждая так же, как и при выводе оценки (27) для $f \in L_p$, $p > 1$, получаем оценку (34) для $f \in L_{p,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Из (27) и (34) следует оценка (9).

Пусть $Q_R = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n;\ 0 \leqslant x_j \leqslant R < 1,\ j = 1, \ldots, n\}$ — куб.

Лемма 2. *Пусть в уравнении (7)* $f(x) \in L_{p,\alpha}(Q_R)$, $\sum\limits_{|k|=2m} |a_k| = B_1 < \infty$. *Тогда для любого обобщенного решения* $u(x) \in W^{2m}_{p,\alpha}(Q_R)$, $p > 1$, $0 < \alpha < 1$, *уравнения (7) в* Q_R *имеют место неравенства*

$$\|u\|_{W_p^{2m}(Q_R^\delta)} \leqslant K[\|f\|_{L_p(Q_R)} + \|u\|_{L_1(Q_R)} / \delta^{2n+2m+1} R^{2m}], \quad (35)$$

$$\sum_{|k| \leqslant 2m} H^{Q_R^\delta}_{\alpha, p}(D^k u) \leqslant K \left[\frac{\|f\|_{L_p(Q_R)}}{\delta^{n+\alpha} R^\alpha} + H^{Q_R}_{\alpha, p}(f) + \frac{\|u\|_{L_1(Q_R)}}{\delta^{2n+2m+1+\alpha} R^{2m+\alpha}} \right]. \quad (36)$$

Здесь K *не зависит ни от* δ, *ни от* R.

Доказательство. Введем новые координаты $x'_j = R x_j$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда куб Q_R перейдет в куб Q с единичным ребром. Уравнение (7) в новых координатах будет иметь вид

$$\sum_{|k|=2m} a_k \frac{\partial^k u}{\partial {x'_1}^{k_1} \ldots \partial {x'_n}^{k_n}} = R^{2m} f(x'). \quad (37)$$

На основании оценок (27) и (34) получим неравенства

$$\|u\|_{W_p^{2m}(Q^{\delta/R})} \leqslant K[R^{2m} \|f\|_{L_p(Q)} + \|u\|_{L_1(Q)} / \delta^{2n+2m+1}], \quad (38)$$

$$H^{Q^{\delta/R}}_{\alpha, p}(D^k u) \leqslant K \left[\frac{R^{2m} \|f\|_{L_p(Q)}}{\delta^{n+\alpha}} + R^{2m} H^Q_{\alpha, p}(f) + \frac{\|u\|_{L_1(Q)}}{\delta^{2n+2m+1+\alpha}} \right]. \quad (39)$$

Оценки (35) и (36) вытекают из неравенств (38), (39) после перехода к старым переменным.

Известно [3, 15, 16], что при любом $\varepsilon \geqslant 0$, $p \geqslant 1$ имеет место следующее интерполяционное неравенство:

$$\|u\|_{W_p^{2m-1}(Q_R)} \leqslant \varepsilon \|u\|_{W_p^{2m}(Q_R)} + C(\varepsilon) \|u\|_{L_1(Q_R)}, \quad (40)$$

где $C(\varepsilon)$ — постоянная, зависящая от ε, n, m и p, Q_R — куб с ребрами, параллельными осям координат.

3. Внутренние оценки для уравнений с переменными коэффициентами.

Теорема 1. *Пусть в уравнении (1)* $f(x) \in L_{p,\alpha}(\Omega)$, $p > 1$, *и* $\sum\limits_{|k| \leqslant 2m} |a_k|^\Omega_{0,\alpha} = B_1 < \infty$, $0 < \alpha < 1$. *Тогда для любого обобщенного решения* $u(x) \in W^{2m}_{p,\alpha}(\Omega)$ *уравнения (1) имеет место неравенство*

$$\|u\|^{\Omega^\delta}_{2m,\,\alpha,\,p} \leqslant M[\|f\|^{\Omega}_{0,\,\alpha,\,p} + \|u\|_{L_1(\Omega)}], \tag{41}$$

где M — постоянная, зависящая от n, δ, m, α, p, λ, B_1, D; $D = \operatorname{diam}\Omega$.

Доказательство. Пусть $P = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega^\delta$, $d(P) = \operatorname{dist}(P, \partial\Omega)$ и $Q(P) = \{y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n;\ |y_j - x_j| \leqslant \mu(P)/2,\ \mu(P) = \nu d(P)\}$ — куб, грани которого параллельны координатным плоскостям, а число $\nu \in (0,\ 1/4\sqrt{n})$ будет точно определено в ходе доказательства. Рассмотрим еще кубы $\hat{Q}(P)$, $\tilde{Q}(P)$, где $\mu(P)$ заменено соответственно на $\hat{\mu}(P) = \frac{3}{2}\nu d(P)$, $\tilde{\mu}(P) = 2\nu d(P)$. Очевидно, что $Q(P) \subset \hat{Q}(P) \subset \tilde{Q}(P) \subset \Omega$.

Определим функции

$$q(P) = d^\gamma(P)\|u\|_{Q(P)}, \quad q_1(P) = d^{\gamma_1}(P) \sum_{|k|=2m} H^{\hat{Q}(P)}_{\alpha,\,p}(D^k u),$$

где $\|u\|_{Q(P)} \equiv \|u\|_{W^{2m}_p(Q(P))}$, $\gamma = 2n + 4m + 1$, $\gamma_1 = 2n + 4m + 2\alpha + 1$.

В силу предположений теоремы 1 $q(P)$ и $q_1(P)$ являются ограниченными функциями. Очевидно найдутся такие точки P_0, $P_1 \in \Omega$, что $q(P_0) \geqslant N/2$, $q_1(P_1) \geqslant N_1/2$, где $N = \sup\limits_{P\in\Omega} q(P)$, $N_1 = \sup\limits_{P\in\Omega} q_1(P)$.

Обозначим через Q_0, $\tilde{Q}_0$ кубы $Q(P_0)$ и $\tilde{Q}(P_0)$, а через Q_1, $\hat{Q}_1$, $\tilde{Q}_1$ — кубы $Q(P_1)$, $\hat{Q}(P_1)$, $\tilde{Q}(P_1)$.

Имеет место следующее неравенство (см. § 7 [3]):

$$\|u\|_{\tilde{Q}_0} \leqslant 2^{2n+\gamma+1}\|u\|_{Q_0}. \tag{42}$$

Докажем теперь, что

$$\sum_{|k|=2m} H^{\tilde{Q}_1}_{\alpha,\,p}(D^k u) \leqslant 2^{2n+\gamma_1+1} \sum_{|k|=2m} H^{\hat{Q}_1}_{\alpha,\,p}(D^k u) + \frac{2^{1+\alpha}}{\nu^\alpha d^\alpha(P_1)} \sum_{j=1}^{4^n} \|u\|_{Q(P_j'')}. \tag{43}$$

Известно, что для точек $P'' \in \tilde{Q}_1 \setminus Q_1$ выполняется неравенство [3, § 7]

$$d(P'') > d(P_1)/2 \tag{44}$$

и, следовательно, $\tilde{\mu}(P_1)/\mu(P'') < 4$. Поэтому число кубов $Q(P'')$, которыми можно покрыть $\tilde{Q}_1$, не превосходит 4^n. Выберем такое конечное покрытие кубами $Q(P_j'')$, тогда

$$\tilde{Q}_1 \subset \bigcup_{j=1}^{4^n} Q(P_j'') \subset \bigcup_{j=1}^{4^n} \hat{Q}(P_j''). \tag{45}$$

Пусть $(\tilde{Q}_1)' \subset \tilde{Q}_1$, h — допустимый вектор. При $|h| < \frac{1}{4}\nu d(P_1)$ находим оценку

$$\left(\int_{(\tilde{Q}_1)'} \left| \frac{D^k u(x+h) - D^k u(x)}{|h|^\alpha} \right|^p dx \right)^{1/p} \leqslant \sum_{j=1}^{4^n} H^{\hat{Q}(P_j'')}_{\alpha,\,p}(D^k u), \tag{46}$$

а при $|h| \geqslant \frac{1}{4}\nu d(P_1)$

$$\left(\int\limits_{(\tilde{Q}_1)'}\left|\frac{D^k u(x+h)-D^k u(x)}{|h|^\alpha}\right|^p dx\right)^{1/p}\leqslant\frac{2^{1+2\alpha}}{\nu^\alpha d^\alpha(P_1)}\sum_{j=1}^{4^n}\|D^k u\|_{L_p(Q_j'')}. \tag{47}$$

Аналогично выводу (42) (см. § 7 [3]) получим при помощи (46) и (47) неравенство (43).

Рассмотрим теперь уравнение (1) внутри куба $\tilde{Q}_0$ и преобразуем его следующим образом:

$$\sum_{|k|=2m} a_k(x^0)D^k u=F_1(x)+F_2(x)+f(x), \tag{48}$$

где

$$x^0\equiv P_0=(x_1^0,\ \dots\ ,x_n^0),$$

$$F_1(x)=\sum_{|k|=2m}[a_k(x^0)-a_k(x)]D^k u,\quad F_2(x)=-\sum_{|k|\leqslant 2m-1} a_k(x)D^k u.$$

Оценим сначала $\|u\|_{Q(P)}$. В силу непрерывности коэффициентов уравнения (1) можно взять $0<\nu<\eta_0$ таким, чтобы

$$\max_{x\in\tilde{Q}_0}\sum_{|k|=2m}|a_k(x^0)-a_k(x)|<1/2^{2n+\gamma+2}K_1,$$

где K_1 — постоянная из неравенства (35). Итак, при помощи (42) получим неравенство

$$\|F_1\|_{L_p(\tilde{Q}_0)}\leqslant\frac{1}{2K_1}\|u\|_{Q_0}. \tag{49}$$

Применим теперь к уравнению (48) оценку (35) внутри $\tilde{Q}_0$, $0<\nu<1/2D$,

$$\|u\|_{Q_0}\leqslant\frac{1}{2}\|u\|_{Q_0}+K\left[\|F_2\|_{L_p(\tilde{Q}_0)}+\|f\|_{L_p(\tilde{Q}_0)}+\frac{\|u\|_{L_1(\tilde{Q}_0)}}{(\nu d(P_0))^{2n+4m+1}}\right].$$

Перенося влево $\|u\|_{Q_0}/2$ и используя интерполяционное неравенство (40) при достаточно малом ε и оценку (42), получим

$$\|u\|_{Q_0}\leqslant K[\|f\|_{L_p(\tilde{Q}_0)}+\|u\|_{L_1(\tilde{Q}_0)}/(\nu d(P_0))^\gamma].$$

Умножим последнее неравенство на $d^\gamma(P_0)$, тогда для любого $P\in\Omega^\delta$ имеем

$$d^\gamma(P)\|u\|_{Q(P)}\leqslant N\leqslant 2d^\gamma(P_0)\|u\|_{Q(P_0)}\leqslant$$

$$\leqslant K\left[d^\gamma(P_0)\|f\|_{L_p(\tilde{Q}_0)}+\frac{\|u\|_{L_1(\tilde{Q}_0)}}{\nu^\gamma}\right]. \tag{50}$$

Заметим, что это неравенство выполняется для любого $P\in\Omega$.

Так как $d(P)>\delta$ и $d(P_0)<D$, то из (50) следует

$$\|u\|_{Q(P)}\leqslant\frac{K}{\delta^\gamma}[\|f\|_{L_p(\Omega)}+\nu^{-\gamma}\|u\|_{L_1(\Omega)}]. \tag{51}$$

Поскольку Ω^δ можно покрыть конечным числом кубов $Q(P)$, то из последнего неравенства вытекает оценка (при фиксированном $\nu<\min(1/4\sqrt{n},\eta_0,1/2D)$

$$\|u\|_{W_p^{2m}(\Omega^\delta)}\leqslant M[\|f\|_{L_p(\Omega)}+\|u\|_{L_1(\Omega)}]. \tag{52}$$

Рассмотрим теперь уравнение (48) внутри куба $\tilde{Q}_1$, где P_0 заменено на $P_1 \equiv x^1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1)$. Оценим $H_{\alpha, p}^{\tilde{Q}_1}(F_1)$. Пусть $(\tilde{Q}_1)' \subset \tilde{Q}_1$, h — допустимый вектор. При помощи неравенства Минковского получим

$$\left(\int_{(\tilde{Q}_1)'} \left| \frac{F_1(x+h) - F_1(x)}{|h|^\alpha} \right|^p dx \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_{(\tilde{Q}_1)'} \left(\sum_{|k|=2m} |a_k(x^1) - a_k(x)| \left| \frac{D^k u(x+h) - D^k u(x)}{|h|^\alpha} \right| \right)^p dx \right]^{1/p} +$$

$$+ \sum_{|k|=2m} \left(\int_{(\tilde{Q}_1)'} \left| \frac{a_k(x) - a_k(x+h)}{|h|^\alpha} \right|^p |D^k u(x+h)|^p dx \right)^{1/p} = A_1 + A_2. \quad (53)$$

В силу непрерывности коэффициентов уравнения (1) можно взять $0 < \nu < \eta_1$ таким, чтобы

$$\max_{x \in \tilde{Q}_1} \sum_{|k|=2m} |a_k(x^1) - a_k(x)| < 1/2^{2n+\gamma_1+2} K_2, \quad (54)$$

где K_2 — постоянная из оценки (36). Используя неравенства (54) и (43), находим

$$A_1 \leqslant \frac{1}{2K_2} \sum_{|k|=2m} H_{\alpha, p}^{\tilde{Q}_1}(D^k u) + \frac{K}{\nu^\alpha d^\alpha(P_1)} \sum_{j=1}^{4^n} \|u\|_{Q(P_j'')}. \quad (55)$$

Поскольку коэффициенты $a_k(x)$ удовлетворяют обычному условию Гёльдера с показателем α, то

$$A_2 \leqslant B_1 \|u\|_{\tilde{Q}_1}. \quad (56)$$

Теперь можно фиксировать число ν и выбирать его таким образом, чтобы $0 < \nu < \min(1/4\sqrt{n}, \eta_0, \eta_1, 1/2D)$, и так как ν не зависит от функций $u(x)$, $f(x)$, можно включить множители, зависящие от ν, в постоянную K. Из (50), (53), (55) и (56) следует оценка

$$H_{\alpha, p}^{\tilde{Q}_1}(F_1) \leqslant \frac{1}{2K_2} \sum_{|k|=2m} H_{\alpha, p}^{\tilde{Q}_1}(D^k u) + K \left[\frac{\|f\|_{L_p(\Omega)}}{d^{\gamma+\alpha}(P_1)} + \frac{\|u\|_{L_1(\Omega)}}{d^{\gamma+\alpha}(P_1)} \right]. \quad (57)$$

Применим к уравнению (48) оценку (36) внутри куба $\tilde{Q}_1$, тогда при помощи (57) получаем неравенство

$$\sum_{|k| \leqslant 2m} H_{\alpha, p}^{\tilde{Q}_1}(D^k u) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{|k|=2m} H_{\alpha, p}^{\tilde{Q}_1}(D^k u) + K[H_{\alpha, p}^{\tilde{Q}_1}(F_2) + H_{\alpha, p}^{\tilde{Q}_1}(f)] +$$

$$+ \frac{K}{d^{\gamma_1}(P_1)} [\|F_1\|_{L_p(\tilde{Q}_1)} + \|F_2\|_{L_p(\tilde{Q}_1)} + \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_1(\Omega)}]. \quad (58)$$

Перенося влево первое слагаемое, используя (51), (52) и оценку разностных отношений в L_p [6, 14], получаем из последнего неравенства

$$\sum_{|k| \leqslant 2m} H_{\alpha, p}^{\tilde{Q}_1}(D^k u) \leqslant M[H_{\alpha, p}^{\Omega}(f) + d^{-\gamma}(P_1)(\|f\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_1(\Omega)})]. \quad (59)$$

Рассуждая так же, как и при выводе (50) и (51), получаем оценку

$$\sum_{|k| \leqslant 2m} H_{\alpha, p}^{\tilde{Q}_1(P)}(D^k u) \leqslant M[\|f\|_{0, \alpha, p}^{\Omega} + \|u\|_{L_1(\Omega)}]. \quad (60)$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть в уравнении (1)* $f(x)\in L_p(\Omega)\cap L_{s,\alpha}(\Omega)$, *где* $1<s<p$, $q=sp/(p-s)$, *коэффициенты* $a_k(x)$, $|k|\leqslant 2m$, *непрерывны в* Ω *и* $\sum\limits_{|k|\leqslant 2m}\|a_k\|^{\Omega}_{0,\alpha,q}=B_2<\infty$. *Тогда для любого обобщенного решения* $u(x)\in W^{2m}_p(\Omega)\cap W^{2m}_{s,\alpha}(\Omega)$ *уравнения (1) имеет место неравенство*

$$\|u\|^{\Omega^{\delta}}_{2m,\alpha,s}\leqslant M[\|f\|_{L_p(\Omega)}+H^{\Omega}_{\alpha,s}(f)+\|u\|_{L_1(\Omega)}],\tag{61}$$

где константа M *зависит от* δ, n, m, p, s, α, λ, B_2, D *и от модуля непрерывности коэффициентов* a_k *в пространстве* $C(\Omega)$.

Доказательство. В силу предположений теоремы 2 имеет место оценка (52) для обобщенного решения $u(x)\in W^{2m}_p(\Omega)\cap W^{2m}_{s,\alpha}(\Omega)$ уравнения (1).

Рассмотрим теперь уравнение (48) в кубе Q_1 с центром в точке $P^1\equiv x^1=(x^1_1,\ldots,x^1_n)$. Из (53) для $(\tilde{Q}_1)'\subset\tilde{Q}_1$ и h имеем

$$\Big(\int\limits_{(\tilde{Q}_1)'}\Big|\frac{F_1(x+h)-F_1(x)}{|h|^{\alpha}}\Big|^p dx\Big)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\Big(\int\limits_{(\tilde{Q}_1)'}\Big[|a_k(x^1)-a_k(x)|\,\Big|\frac{D^k u(x+h)-D^k u(x)}{|h|^{\alpha}}\Big|\Big]^s dx\Big)^{1/s}+$$

$$+\sum_{|k|=2m}\Big(\int\limits_{(\tilde{Q}_1)'}\Big|\frac{a_k(x)-a_k(x+h)}{|h|^{\alpha}}\Big|^s|D^k u(x+h)|^s dx\Big)^{1/s}=J_1+J_2.\tag{62}$$

Совершенно так же, как мы делали при выводе неравенства (55), получаем

$$J_1\leqslant\frac{1}{2K_2}\sum_{|k|=2m}H^{\tilde{Q}_1}_{\alpha,s}(D^k u)+\frac{K}{\nu^{\alpha}d^{\alpha}(P_1)}\sum_{j=1}^{4^n}\|u\|_{L_s(Q(P''_j))},\tag{63}$$

где K_2 — постоянная из неравенства (36). Оценим теперь J_2. Используя неравенство Гёльдера с показателями p' и p'', $1/p'+1/p''=1$, $p'=p/s$, $p''=p/(p-s)$, имеем

$$J_2\leqslant B_2\sum_{|k|=2m}\Big(\int\limits_{(\tilde{Q}_1)'}|D^k u(x+h)|^p dx\Big)^{1/p}.\tag{64}$$

При помощи неравенства (50) из (62)—(64) получим

$$H^{\tilde{Q}_1}_{\alpha,s}(F_1)\leqslant\frac{1}{2K_2}\sum_{|k|=2m}H^{\tilde{Q}_1}_{\alpha,s}(D^k u)+\frac{K}{d^{\alpha+\nu}(P_1)}[\|f\|_{L_p(\Omega)}+\|u\|_{L_1(\Omega)}].\tag{65}$$

При помощи рассуждений, аналогичных тем, которые были проведены в доказательстве теоремы 1 после оценки (57), получаем оценку (61).

Автор благодарен С. Н. Кружкову за постановку задачи.

Литература

1. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., 1950.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М., 1959. Т. 5.
3. Кошелев А. И. // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13, № 4(82). С. 29—88.
4. Browder F. E. // Comm. Pure Appl. Math. 1956. Vol. 9. P. 351—361.

5. Nirenberg L. // Comm. Pure Appl. Math. 1956. Vol. 9. P. 509—530.
6. Никольский С. М. // Мат. сб. 1956. Т. 40 (82), № 2. С. 243—268.
7. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1983.
8. Bochner S. // Ann. of Math. 1953. Vol. 57, N. 1. P. 32—56.
9. Гусева О. В. О первой краевой задаче для сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л., 1953 // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР.
10. Гусева О. В. // Докл. АН СССР. 1955. Т. 102, № 6. С. 1069—1072.
11. Гельфанд И. М., Шапиро З. А. // Успехи мат. наук. 1955. Т. 10, вып. 3 (65). С. 3—70.
12. Михлин С. Г. // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109, № 4. С. 701—703.
13. Михлин С. Г. // Вестн. ЛГУ. 1957. № 7. С. 143—155.
14. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1977.
15. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., 1975.
16. Nirenberg L. // Comm. Pure Appl. Math. 1955. Vol. 8. P. 648—674.

Республика Куба

Поступила в редакцию 3 июля 1986 г.

УДК 517.958

А. И. ПРИЛЕПКО, Н. П. ВОЛКОВ

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ПО ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА

Данная работа посвящена исследованию ряда обратных задач для нестационарного многоскоростного анизотропного линейного кинетического уравнения (уравнения переноса)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, v, t)+(v, \nabla)u(x, v, t)+\Sigma(x, v, t)u(x, v, t)=$$
$$=\int_V J(x, v, t, v')u(x, v', t)dv'+F(x, v, t), \quad (x, v, t)\in\mathscr{D}=G\times V\times(0, T). \tag{1}$$

В задачах о нейтронном излучении [1] уравнение вида (1) характеризует процесс переноса нейтронов в веществе, где функция u является функцией распределения нейтронов, Σ и J — характеристиками среды, F — плотностью источников нейтронов. К такому же уравнению приводят задачи излучения заряженных частиц, а также распространения γ-излучения.

Обратные задачи состоят в определении функции u и одного из параметров Σ, J или F из условий прямой задачи, т. е. уравнения (1), начального условия

$$u(x, v, 0)=\varphi(x, v), \quad (x, v)\in G\times V \tag{2}$$

и краевого условия

$$u(x, v, t)=\mu(x, v, t), \quad (x, v, t)\in\partial G\times V\times(0, T), \quad (v, n_x)<0, \tag{3}$$

где n_x — внешняя нормаль к ∂G в точке x, и некоторой дополнительной информации (условия переопределения).

Исследованию обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных посвящен целый ряд работ, среди которых можно выделить [2—9].

Изучение обратных задач для уравнения переноса началось сравнительно недавно. Первые постановки этих задач можно найти в [3—5]. После этого появились работы, посвященные их исследованию. Так, на-