



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Minh-Phuong Tran, Thanh-Nhan Nguyen, A Remark on the Interpolation Inequality between Sobolev Spaces and Morrey Spaces,
Funktsional. Anal. i Prilozhen., 2020, Volume 54, Issue 3, 63–72

<https://www.mathnet.ru/eng/faa3628>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.173

April 22, 2025, 18:32:11



УДК 517.98

Замечание к интерполяционному неравенству между пространствами Соболева и Морри

© 2020. Минь-Фуонг Тран, Тхань-Нян Нгуен

Интерполяционные неравенства играют важную роль в изучении дифференциальных уравнений в частных производных и их приложениях. Здесь все еще имеются интересные открытые вопросы, связанные с интегральными оценками или регулярностью решений эллиптических и параболических уравнений. Основным результатом нашей работы — наблюдение об ограниченности L^p -нормы в контексте интерполяционного неравенства между пространствами Соболева и Морри, которое может оказаться полезным в исследованиях. В этой связи мы также строим нетривиальный контрпример, который показывает в определенном смысле оптимальность интервала для допустимых показателей p . Наши доказательства опираются на интегральные представления и свойства максимальных функций Харди–Литтлвуда и Феффермана–Стейна.

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3628>

§ 1. Введение

В теории дифференциальных уравнений в частных производных интерполяционные неравенства в пространствах Лебега, Соболева, Морри играют значительную роль. С ними связано еще довольно много открытых вопросов, которые возникают в связи с L^p -оценками или L^p -регулярностью решений дифференциальных уравнений. В последнее время упомянутым неравенствам и их обобщениям уделяется все больше внимания, см., например, работы [6], [11], [5], [8] и цитированную в них литературу.

В настоящей статье мы занимаемся интерполяционным неравенством между пространствами Соболева и Морри, полученным в работе [8]. Мы приводим независимое и весьма интересное доказательство данного неравенства, основанное на свойствах максимальных функций, и применяем его далее, чтобы получить оценку L^r -нормы. Основным результатом работы является контрпример, показывающий оптимальность допустимого интервала для показателей r в неравенстве. Мы считаем, что этот результат откроет новые возможности для изучения регулярности, существования и единственности решений дифференциальных уравнений в частных производных, а также пространств Соболева и Морри, играющих значительную роль в теории дифференциальных уравнений в частных производных и приложениях.

Мы рассматриваем евклидово пространство \mathbb{R}^d с $d \geq 2$, и пусть $1 \leq p < d$ и $1 < q < pd/(d-p)$. Мы представим короткое доказательство следующего свойства L^r -ограниченности множества функций $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ с равномерно ограниченными нормами в заданных классах Соболева и Морри:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u|^r dx \leq C, \quad r \in \left[p \left(\frac{q}{d} + 1 \right), \frac{pd}{d-p} \right]. \quad (1.1)$$

Оценка (1.1) играет важную роль в анализе и может быть применена к исследованию регулярности решений дифференциальных уравнений, в особенности нелинейных. В частности, имеет смысл изучать свойства решений при указанных значениях параметра r . Как будет показано ниже, неравенство (1.1) при других r может нарушаться.

Для того чтобы сформулировать наши результаты, нам понадобятся некоторые определения и обозначения, которые мы коротко здесь напомним. Большинство обозначений в статье стандартное; некоторые соглашения мы приведем далее. За более подробной информацией о пространствах и операторах, которые появятся ниже, читатель может обратиться, например, к многочисленным учебникам, а также к литературе, приведенной в монографиях [1]–[4].

1. *Открытый шар*: если $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ и r — положительное число, то $B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| < r\}$ — открытый шар в \mathbb{R}^d .

2. *Среднее значение*: для среднего значения функции f от переменной y по шару $B_r(\mathbf{x})$ используется обозначение $\int_{B_r(\mathbf{x})} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$, т. е.

$$\int_{B_r(\mathbf{x})} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \frac{1}{|B_r(\mathbf{x})|} \int_{B_r(\mathbf{x})} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

где $|B|$ есть d -мерная мера Лебега произвольного множества $B \subset \mathbb{R}^d$.

3. Через $C_c^k(\mathbb{R}^m, I)$ (соответственно через $C_c^\infty(\mathbb{R}^m, I)$) будет обозначаться пространство k раз непрерывно дифференцируемых (соответственно бесконечно дифференцируемых) функций f на \mathbb{R}^m со значениями в множестве $I \subset \mathbb{R}$ и компактным носителем (т. е.

$$\text{supp}(f) = \text{clos.}\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : f(\mathbf{x}) \neq 0\} \subset K$$

для некоторого компакта $K \subset \mathbb{R}^m$).

4. *Максимальная функция Харди–Литтлвуда*: максимальная функция Харди–Литтлвуда вводится для произвольной локально интегрируемой функции f на \mathbb{R}^d следующей формулой:

$$\mathbf{M}(f)(\mathbf{x}) = \sup_{\rho > 0} \int_{B_\rho(\mathbf{x})} |f| d\mathbf{y} \quad \text{для любого } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

5. *Максимальная функция Феффермана–Стейна*: максимальная функция Феффермана–Стейна для функции f задается формулой

$$\mathbf{M}_\#(f)(\mathbf{x}) = \sup_{\rho > 0} \int_{B_\rho(\mathbf{x})} \left| f(\mathbf{y}) - \int_{B_\rho(\mathbf{x})} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \right| d\mathbf{y} \quad \text{для любого } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \quad (1.2)$$

6. Мы будем писать $a \sim b$, если существуют положительные константы C_1 и C_2 , такие, что $C_1 a \leq b \leq C_2 a$.

Статья имеет следующую структуру. В §2 содержатся формулировки основного результата работы, а также некоторых вспомогательных результатов. Подробные доказательства всех утверждений даются в §3.

§ 2. Формулировка основных результатов

В данном параграфе мы сформулируем все необходимые результаты; их обсуждением и проверкой мы займемся далее. Лемма 2.1 содержит первое интегральное неравенство. Оно не является новым (см. [8]), но для удобства читателя в §3 мы приводим доказательство.

Лемма 2.1. Пусть $1 < p < d$ и $1 < q < pd/(d-p)$. Тогда имеет место следующее интегральное неравенство:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{p(q/d+1)} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^p dx \left(\sup_{B_\rho(\mathbf{z})} \rho^{d/q} \int_{B_\rho(\mathbf{z})} |u| dx \right)^{qp/d}, \quad u \in C_c^1(\mathbb{R}^d). \quad (2.1)$$

В следующей теореме устанавливается интерполяционное неравенство для пространств Лебега. Оно легко получается из предыдущей леммы, неравенства Соболева и неравенства Гёльдера (см. [4]).

Теорема 2.2. Пусть $1 < p < d$ и $1 < q < pd/(d-p)$. Если $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^p dx \leq 1 \quad (2.2)$$

и

$$\sup_{B_\rho(\mathbf{z})} \rho^{d(q_1-q)/q} \int_{B_\rho(\mathbf{z})} |u|^{q_1} dx \leq 1 \quad (2.3)$$

при некотором q_1 , $1 \leq q_1 \leq q$, то

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u|^r dx \leq C \quad \text{для любого } r \in \left[p \left(\frac{q}{d} + 1 \right), \frac{pd}{d-p} \right]. \quad (2.4)$$

Доказательство теоремы 2.2, которое мы проведем в следующем параграфе, приводит к одному интересному вопросу: возможно ли расширить интервал допустимых значений показателя r так, чтобы интерполяционное неравенство (2.4) все еще имело место? Разработка этого вопроса дополнит картину интерполяционных неравенств для пространств Лебега, а также может помочь и в изучении неравенств Гальярдо–Ниренберга и их обобщений (мы отсылаем читателя к работам [7], [1], [2], [6], [5] и цитируемой в них литературе по данной тематике). Этот вопрос возник в связи с исследованиями по теории дифференциальных уравнений в частных производных, и наши результаты могут оказаться полезными при исследовании регулярности и получении сравнительных оценок или других свойств решений эллиптических и/или параболических уравнений. Именно эта связь и дала мотивацию для написания настоящей статьи.

В следствии 2.3 мы распространяем неравенство (2.4) на меньшие показатели r , но лишь в случае, когда $q_1 = q$. Простое доказательство приведено в §3.

Следствие 2.3. В условиях теоремы 2.2 пусть $q_1 = q$. Тогда неравенство (2.4) останется справедливым для любых $r \in [q, p(q/d+1)]$.

Однако данное интерполяционное неравенство не имеет места, если $q_1 < q$ и $r < p(q/d + 1)$, и соответствующий контрпример будет построен в следующей теореме. Тем самым интервал для показателя r в теореме 2.2 оказывается оптимальным.

Теорема 2.4. Пусть $1 < p < d$ и $1 < q < pd/(d - p)$. Тогда для любого q_1 , $1 \leq q_1 < q$, найдется последовательность $(u_n)_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, такая, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^p dx \leq 1, \quad \sup_{B_\rho(\mathbf{z})} \rho^{d(q_1 - q)/q} \int_{B_\rho(\mathbf{z})} |u_n|^{q_1} dx \leq 1, \quad (2.5)$$

а кроме того, при любом $r > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u_n|^r dx \sim 2^{\frac{d^2(q - q_1)}{q(d\rho - (d - p)q)}(p(1 + q/d) - r)n}, \quad n \gg 1. \quad (2.6)$$

В частности, неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u_n|^r dx \leq C, \quad n \gg 1, \quad (2.7)$$

выполнено тогда и только тогда, когда $r \geq p(q/d + 1)$.

§ 3. Доказательство основных результатов

Данный параграф посвящен доказательству утверждений из предыдущего параграфа. Мы условимся обозначать различные (положительные) постоянные одной и той же буквой C .

Доказательство леммы 2.1. Согласно неравенству Пуанкаре, для любых $\rho > 0$ и $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$

$$\int_{B_\rho(\mathbf{y})} |u - (u)_{B_\rho(\mathbf{y})}| dx \leq C\rho \int_{B_\rho(\mathbf{y})} |\nabla u| dx \quad \text{для любой функции } u \in C_c^1(\mathbb{R}^d), \quad (3.1)$$

где через $(f)_\Omega$ обозначается среднее значение функции f на области Ω . Переходя к супремуму по всем $\rho > 0$ в обеих частях неравенства, получаем

$$\sup_{\rho > 0} \rho^{-1} \int_{B_\rho(\mathbf{y})} |u - (u)_{B_\rho(\mathbf{y})}| dx \leq CM(|\nabla u|)(\mathbf{y}) \quad \text{для любых } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d. \quad (3.2)$$

Далее, оценим $\mathbf{M}_\#(u)$, максимальную функцию Феффермана–Стейна для u , следующим образом:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{M}_\#(u)(\mathbf{y})]^{p(q/d + 1)} \\ &= \sup_{\rho > 0} \left(\rho^{d/q} \int_{B_\rho(\mathbf{y})} |u - (u)_{B_\rho(\mathbf{y})}| dx \right)^{pq/d} \left(\rho^{-1} \int_{B_\rho(\mathbf{y})} |u - (u)_{B_\rho(\mathbf{y})}| dx \right)^p \\ &\leq C \left(\sup_{\rho > 0, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d} \rho^{d/q} \int_{B_\rho(\mathbf{z})} |u| dx \right)^{qp/d} \left(\sup_{\rho > 0} \rho^{-1} \int_{B_\rho(\mathbf{y})} |u - (u)_{B_\rho(\mathbf{y})}| dx \right)^p. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Полученные оценки (3.2) и (3.3) приводят к следующему соотношению для максимальной функции Харди–Литтлвуда \mathbf{M} и максимальной функцией Феффермана–Стейна $\mathbf{M}_\#$:

$$[\mathbf{M}_\#(u)(\mathbf{y})]^{p(q/d+1)} \leq C \left(\sup_{B_\rho(\mathbf{z})} \rho^{d/q} \int_{B_\rho(\mathbf{z})} |u| d\mathbf{x} \right)^{qp/d} [\mathbf{M}(|\nabla u|)(\mathbf{y})]^p. \quad (3.4)$$

Хорошо известно [9], что для каждого фиксированного $s \in (1, \infty)$ и произвольных $f \in L^s(\mathbb{R}^d)$ существует такая постоянная $C > 0$, что

$$C^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} |f|^s d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{M}_\#(f)|^s d\mathbf{x} \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |f|^s d\mathbf{x}, \quad (3.5)$$

$$C^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} |f|^s d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{M}(f)|^s d\mathbf{x} \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |f|^s d\mathbf{x}. \quad (3.6)$$

Используя оценки (3.4), (3.5) и (3.6), мы видим, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^{p(q/d+1)} d\mathbf{x} &\leq C \int_{\mathbb{R}^d} [\mathbf{M}_\#(u)(\mathbf{x})]^{p(q/d+1)} d\mathbf{x} \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^d} [\mathbf{M}(|\nabla u|)(\mathbf{x})]^p \left(\sup_{B_\rho(\mathbf{z})} \rho^{d/q} \int_{B_\rho(\mathbf{z})} |u(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \right)^{qp/d} d\mathbf{x} \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^p \left(\sup_{B_\rho(\mathbf{z})} \rho^{d/q} \int_{B_\rho(\mathbf{z})} |u(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \right)^{qp/d} d\mathbf{x} \\ &\leq C \left(\sup_{B_\rho(\mathbf{z})} \rho^{d/q} \int_{B_\rho(\mathbf{z})} |u| d\mathbf{x} \right)^{qp/d} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^p d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

и это завершает доказательство. \square

Доказательство теоремы 2.2. Согласно неравенству Соболева, для любой функции $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{pd/(d-p)} d\mathbf{x} \right)^{(d-p)/(dp)} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p},$$

откуда, если учесть условие (2.2), следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{pd/(d-p)} d\mathbf{x} \leq C. \quad (3.7)$$

Далее, из неравенства Гёльдера вытекает, что

$$\begin{aligned} \sup_{B_\rho(\mathbf{z})} \rho^{d/q} \int_{B_\rho(\mathbf{z})} |u| d\mathbf{x} &\leq C \sup_{B_\rho(\mathbf{z})} \rho^{d(1-q)/q} \int_{B_\rho(\mathbf{z})} |u| d\mathbf{x} \\ &\leq C \sup_{B_\rho(\mathbf{z})} \rho^{d(1-q)/q} \cdot \rho^{d(q_1-1)/q_1} \left(\int_{B_\rho(\mathbf{z})} |u|^{q_1} d\mathbf{x} \right)^{1/q_1} \\ &\leq C \left(\sup_{B_\rho(\mathbf{z})} \rho^{d(q_1-q)/q} \int_{B_\rho(\mathbf{z})} |u|^{q_1} d\mathbf{x} \right)^{1/q_1} \leq C \end{aligned}$$

для всех u , удовлетворяющих условию (2.3), и любого q_1 между 1 и q . Таким образом,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{p(q/d+1)} d\mathbf{x} \leq C \quad (3.8)$$

по лемме 2.1.

Поскольку $r \in [p(q/d+1), pd/(d-p)]$, очевидно, найдется такое $\theta \in [0, 1]$, что

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta d}{p(q+d)} + \frac{(1-\theta)(d-p)}{pd}.$$

Применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^r d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^d} |u|^{r\theta} |u|^{r(1-\theta)} d\mathbf{x} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} [|u|^{r\theta}]^{p(q/d+1)/(r\theta)} d\mathbf{x} \right)^{r\theta d/(p(q+d))} \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^d} [|u|^{r(1-\theta)}]^{pd/(r(1-\theta)(d-p))} d\mathbf{x} \right)^{r(1-\theta)(d-p)/(pd)} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{p(q/d+1)} d\mathbf{x} \right)^{r\theta d/(p(q+d))} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{pd/(d-p)} d\mathbf{x} \right)^{r(1-\theta)(d-p)/(pd)}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Отметим, что (3.9) — тоже интерполяционное неравенство для пространств Лебега; оно изучалось в [9], [10].

Комбинируя оценки (3.7), (3.8) и (3.9), приходим к искомому результату. \square

Докажем теперь следствие 2.3.

Доказательство следствия 2.3. Если положить $q_1 = q$ в теореме 2.2, то условие (2.3) примет вид

$$\sup_{B_\rho(\mathbf{z})} \int_{B_\rho(\mathbf{z})} |u|^q d\mathbf{x} \leq 1,$$

так что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q d\mathbf{x} \leq 1. \quad (3.10)$$

Тогда тот факт, что оценка (2.4) выполнена для всех $r \in [q, p(q/d+1)]$, непосредственно вытекает из оценок (3.8), (3.10) и многократно примененного интерполяционного неравенства для пространства Лебега вида (3.9). \square

Доказательство теоремы 2.4. Пусть функции $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d-1}, [0, 1])$ и $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$ таковы, что

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in B_1(0), \\ 0, & \mathbf{x} \in B_2(0)^c, \end{cases} \quad \eta(t) = \begin{cases} 1, & t \in (-1, 1), \\ 0, & t \in (-2, 2)^c, \end{cases}$$

и, кроме того, $|\nabla\phi(\mathbf{x})| \leq 1$ для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d-1}$ и $|\eta'(t)| \leq 1$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Фиксируем также параметр $\theta \in (0, 10^{-10d})$ и выберем произвольное $n \geq 100/\theta$. Далее, для каждого $k \geq 10/\theta$ определим последовательность $\{a_{k,j}\}$ формулой

$$a_{k,j} = 2^{k-1} + 1 + j2^{k-1-\theta(k-1)}, \quad 1 \leq j \leq 2^{\theta(k-1)} - 3.$$

Нетрудно видеть, что при всех j , $1 \leq j \leq 2^{\theta(k-1)} - 3$,

$$a_{k,j} \in (2^{k-1} + 2, 2^k - 2).$$

Введем теперь функции χ_n и σ_n :

$$\chi_n(t) = \sum_{k \geq 10\theta^{-1}}^n \sum_{j=1}^{2^{\theta(k-1)}-3} \eta(t - a_{k,j}) \quad \text{и} \quad \sigma_n(t) = \chi_n(t) + \chi_n(-t).$$

Отметим, что поскольку

$$\text{supp}(\eta(\cdot - a_{k,j})) \cap \text{supp}(\eta(\cdot - a_{k',j'})) = \emptyset \quad \text{для любых } (k, j) \neq (k', j'),$$

при любом $r > 0$

$$\sup_{\rho > 0, t_0 \in \mathbb{R}} \left(\rho^{-\theta} \int_{t_0-\rho}^{t_0+\rho} \sigma_n(t)^r dt \right) \sim 1 \quad \text{для любого } n \geq 100/\theta \quad (3.11)$$

и

$$\int_{\mathbb{R}} \sigma_n(t)^r dt \sim 2^{\theta n} \quad \text{для любого } n \geq 100/\theta, \quad (3.12)$$

а также

$$\int_{\mathbb{R}} |\sigma'_n(t)|^r dt \sim 2^{\theta n} \quad \text{для любого } n \geq 100/\theta. \quad (3.13)$$

В самом деле, соотношение (3.12) вытекает из оценок

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \sigma_n(t)^r dt &\sim \sum_{k \geq 10\theta^{-1}}^n \sum_{j=1}^{2^{\theta(k-1)}-3} \int_{\mathbb{R}} \eta(t - a_{k,j})^r dt \\ &\sim \sum_{k \geq 10\theta^{-1}}^n \sum_{j=1}^{2^{\theta(k-1)}-3} \int_{\mathbb{R}} \eta(t)^r dt \sim \sum_{k \geq 10\theta^{-1}}^n \sum_{j=1}^{2^{\theta(k-1)}-3} 1 \sim 2^{\theta n}. \end{aligned}$$

Подобным же образом выводится и (3.13). Чтобы доказать (3.11), достаточно установить аналогичное соотношение, в котором супремум берется по достаточно большому ρ (так как функция σ_n ограничена). Заметим, что

$$\begin{aligned} &\sup_{\rho > 2^{100}, t_0 \in \mathbb{R}} \left(\rho^{-\theta} \int_{t_0-\rho}^{t_0+\rho} \sigma_n(t)^r dt \right) \\ &\sim \sup_{\rho > 2^{100}, t_0 \in \mathbb{R}} \sum_{k \geq 10\theta^{-1}}^n \sum_{j=1}^{2^{\theta(k-1)}-3} \left(\rho^{-\theta} \int_{t_0-\rho}^{t_0+\rho} \eta(t - a_{k,j})^r dt \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Для каждого $\rho > 2^{100}$ выберем $m \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\rho \sim 2^m$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} \sup_{t_0 \in \mathbb{R}} \sum_{k \geq 10\theta^{-1}}^n 2^{\theta(k-1)-3} \sum_{j=1} \int_{t_0-\rho}^{t_0+\rho} \eta(t - a_{k,j})^r dt &\sim \#\{a_{k,j} \in [-\rho, \rho]\} \\ &\sim \sum_{k=2}^m (2^{\theta(k-1)} - 3) \sim 2^{\theta m} \sim \rho^\theta. \end{aligned} \quad (3.15)$$

где символом $\#$ обозначается мощность множества. Комбинируя (3.14) с (3.15), приходим к (3.11).

Теперь при $n > 100/\theta$ зададим последовательность функций

$$u_n(t, \mathbf{x}) = 2^{-\alpha dn/q} \sigma_n(2^{-\alpha n} t) \phi(2^{-\alpha n} \mathbf{x}) \quad \text{для любой пары } (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1},$$

где $\theta = d(q - q_1)/q \in (0, 10^{-10d})$ и $\alpha = d(q - q_1)/(dp - (d - p)q)$. Покажем, что u_n удовлетворяет условиям (2.5) и (2.6).

(i) Прежде всего,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^p d\mathbf{x} dt &\sim 2^{-p\alpha dn/q} \int_{\mathbb{R}} |\sigma'_n(2^{-\alpha n} t)|^p 2^{-p\alpha n} dt \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \phi(2^{-\alpha n} \mathbf{x})^p d\mathbf{x} \\ &\quad + 2^{-p\alpha dn/q} \int_{\mathbb{R}} |\sigma_n(2^{-\alpha n} t)|^p dt \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\nabla \phi(2^{-\alpha n} \mathbf{x})|^p 2^{-p\alpha n} d\mathbf{x} \\ &= 2^{-p\alpha dn/q} \int_{\mathbb{R}} |\sigma'_n(t)|^p 2^{\alpha n - p\alpha n} dt \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \phi(\mathbf{x})^p 2^{(d-1)\alpha n} d\mathbf{x} \\ &\quad + 2^{-p\alpha dn/q} \int_{\mathbb{R}} |\sigma_n(t)|^p 2^{\alpha n} dt \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\nabla \phi(\mathbf{x})|^p 2^{(d-1)\alpha n - p\alpha n} d\mathbf{x} \\ &= 2^{n(-p\alpha d/q + d\alpha - p\alpha)} \left(\int_{\mathbb{R}} |\sigma'_n(t)|^p dt \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \phi(\mathbf{x})^p d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}} |\sigma_n(t)|^p dt \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\nabla \phi(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Параметры θ и α были подобраны так, чтобы $-p\alpha d/q + d\alpha - p\alpha + \theta = 0$, и тогда, согласно (3.12), (3.13) и (3.16), получаем

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^p \sim 2^{-p\alpha dn/q + d\alpha n - p\alpha n + \theta n} = 1 \quad \text{для любого } n > 100/\theta. \quad (3.17)$$

Этим доказано первое неравенство в (2.5).

(ii) Далее,

$$\begin{aligned}
& \sup_{B_\rho(s,y) \subset \mathbb{R}^d} \left(\rho^{-\theta} \int_{B_\rho(s,y)} |u_n(t, \mathbf{x})|^{q_1} dt d\mathbf{x} \right) \sim \sup_{\rho > 0} \left(\rho^{-\theta} \int_{B_\rho(0)} |u_n(t, \mathbf{x})|^{q_1} dt d\mathbf{x} \right) \\
& \sim 2^{-q_1 \alpha d n / q} \sup_{\rho > 0} \left(\rho^{-\theta} \int_{-\rho}^{\rho} \sigma_n(2^{-\alpha n} t)^{q_1} dt \int_{|\mathbf{x}| < \rho} \phi(2^{-\alpha n} \mathbf{x})^{q_1} d\mathbf{x} \right) \\
& \sim 2^{-q_1 \alpha d n / q} \sup_{\rho > 0} \left(\rho^{-\theta} \int_{-2^{-\alpha n} \rho}^{2^{-\alpha n} \rho} \sigma_n(t)^{q_1} 2^{\alpha n} dt \int_{|\mathbf{x}| < 2^{-\alpha n} \rho} \phi(\mathbf{x})^{q_1} 2^{(d-1)\alpha n} d\mathbf{x} \right) \\
& \sim 2^{-q_1 \alpha d n / q} \sup_{\rho > 2^{\alpha n} \rho} \left(\rho^{-\theta} \int_{-2^{-\alpha n} \rho}^{2^{-\alpha n} \rho} \sigma_n(t)^{q_1} 2^{\alpha n} dt \int_{|\mathbf{x}| < 2^{-\alpha n} \rho} \phi(\mathbf{x})^{q_1} 2^{(d-1)\alpha n} d\mathbf{x} \right) \\
& \stackrel{(3.12)}{\sim} 2^{-q_1 \alpha d n / q} 2^{\alpha d n} 2^{-\alpha \theta n} = 1.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sup_{B_\rho(s,y) \subset \mathbb{R}^d} \rho^{-\theta} \int_{B_\rho(s,y)} |u_n|^{q_1} d\mathbf{x} \sim 1 \quad \text{для любого } n > 100/\theta,$$

и второе неравенство в (2.5) тоже проверено.

(iii) Наконец, при любом $r > 0$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |u_n(t, \mathbf{x})|^r dt d\mathbf{x} &= 2^{-r \alpha d n / q} \int_{\mathbb{R}} \sigma_n(2^{-\alpha n} t)^r dt \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \phi(2^{-\alpha n} \mathbf{x})^r d\mathbf{x} \\
&= 2^{-r \alpha d n / q + d \alpha n} \int_{\mathbb{R}} \sigma_n(t)^r dt \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \phi(\mathbf{x})^r d\mathbf{x} \\
& \stackrel{(3.12)}{\sim} 2^{-r \alpha d n / q + d \alpha n + \theta n} = 2^{\frac{d^2(q-q_1)}{q(d-p-(d-p)q)}(p(1+q/d)-r)n},
\end{aligned}$$

что совпадает с (2.6).

Соотношение (2.6) показывает, что оценка (2.7) выполнена тогда и только тогда, когда $r \geq p(q/d + 1)$. \square

ЛИТЕРАТУРА

- [1] D. R. Adams, *Lecture Notes on L^p -Potential Theory*, Dept. of Math., University of Umea, Umea, 1981.
- [2] D. R. Adams, L. I. Hedberg, *Functions Spaces and Potential Theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1996.
- [3] R. A. Adams, J. J. F. Fourier, *Sobolev spaces*, 2nd ed., Pure and Applied Mathematics, vol. 140, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.
- [4] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2011.
- [5] N. A. Dao, J. I. Díaz, Q.-H. Nguyen, *Generalized Gagliardo-Nirenberg inequalities using Lorentz spaces, BMO, Hölder spaces and fractional Sobolev spaces*, *Nonlinear Anal.*, **173** (2018), 146–153.
- [6] D. S. McCormick, J. C. Robinson, J. L. Rodrigo, *Generalised Gagliardo-Nirenberg inequalities using weak Lebesgue spaces and BMO*, *Milan J. Math.*, **81**:2 (2013), 265–289.

- [7] L. Nirenberg, *On elliptic partial differential equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **13** (1959), 115–162.
- [8] G. Patalucci, A. Pisante, *Improved Sobolev embeddings, profile decomposition, and concentration compactness for fractional Sobolev spaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **50**:3–4 (2014), 799–829.
- [9] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
- [10] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Functional Analysis: Introduction to Further Topics in Analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2011.
- [11] J. Van Schaftingen, *Interpolation inequalities between Sobolev and Morrey–Campanato spaces: A common gateway to concentration-compactness and Gagliardo–Nirenberg interpolation inequalities*, Port. Math., **71**:3 (2014), 159–175.

Минь-Фуонг Тран

Applied Analysis Research Group, Faculty of
Mathematics and Statistics, Ton Duc Thang
University, Ho Chi Minh City, Viet Nam

E-mail: tranminhphuong@tdtu.edu.vn

Тхань-Нян Нгуен

Department of Mathematics, Ho Chi Minh City
University of Education, Ho Chi Minh City, Viet Nam

E-mail: nguyenthnhan@hcmup.edu.vn

Поступила в редакцию
30 октября 2018 г.

После доработки
29 мая 2019 г.

Принята к публикации
31 октября 2019 г.