E. A. Kolesnikova, Subelliptic estimates for the oblique derivative problem, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1982, Volume 37, Issue 4, 159–160

СУБЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ЗАДАЧИ С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Е. А. Колесникова

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} + c(x) u = f, \qquad x \in \Omega,$$

и $\frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ на $\partial\Omega$, где Ω — ограниченная область в R^n с границей класса $C^3 \cap C^k$, L — эллиптический оператор в $\overline{\Omega}$, $\overline{\nu}$ — векторное поле на $\partial\Omega$ класса $C^3 \cap C^k$, которое может касаться $\partial\Omega$ на $(n-2)$-мерном подмногообразии Γ_0 класса C^3 с порядком касания, не большем k.

Предположим, что ν не касается Γ_0. Векторное поле ν можно представить в виде $\nu = b(x)n + \tau$, где n — внутренняя нормаль к $\partial\Omega$, τ касается $\partial\Omega$ и $\tau \neq 0$ на Γ_0, $b(x)$ обращается в нуль на Γ_0.

Рассмотрим произвольную точку A на Γ_0. Продолжим поле ν в окрестность точки A. Тогда возможны три случая:

1) $b(x)$ меняет знак с «+» на «—» при движении в положительном направлении вдоль характеристики поля ν, проходящей через точку A;

2) $b(x)$ меняет знак с «—» на «+»;

3) $b(x)$ не меняет знака.

Какой из случаев выполнен, не зависит от точки A для каждой связной части Γ_0, т. е. можно рассматривать три вида подмногообразий Γ_0? На подмногообразиях вида 1 задается дополнительное условие $u|_{\Gamma_0} = u_0$. Для подмногообразий Γ_0 вида 2 и 3 оценки не содержат членов с u_0.

Предположим, что $a_{ij} \in C^3(\overline{\Omega})$, $a_i \in C^2(\overline{\Omega})$, $c \in C^1(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$ и $0 < \alpha + \delta < 1$, где $\delta = k/(k+1)$.

Теорема. *Пусть* $u \in C^2(\Omega) \cap C^{1+\alpha+\delta}(\overline{\Omega})$. *Если*

$$g \in C^{1+\alpha+\delta}(\partial\Omega), \ u_0 \in C^{2+\alpha}(\Gamma_0), \ f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega}),$$

то $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *и выполнена оценка*

$$|u|_{C^{2+\alpha}(\Omega)} \leqslant C(|f|_{C^{\alpha}(\Omega)} + |g|_{C^{1+\alpha+\delta}(\partial\Omega)} + |u_0|_{C^{2+\alpha}(\Gamma_0)} + |u|_{C^0(\Omega)}).$$

Пусть $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. *Если* $g \in C^{\alpha+\delta}(\partial\Omega)$, $f \equiv 0$ *и* $u_0 \in C^{1+\alpha}(\Gamma_0)$, *то* $u \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$ *и выполнена оценка*

$$|u|_{C^{1+\alpha}(\Omega)} \leqslant C(|g|_{C^{\alpha+\delta}(\partial\Omega)} + |u_0|_{C^{1+\alpha}(\Gamma_0)} + |u|_{C^0(\Omega)}).$$

Условия на g, ν, L, $\partial\Omega$ можно ослабить вне окрестности Γ_0.

Аналогичные оценки доказаны в работах [1], [3]. В работе [2] рассматривается задача с косой производной в соболевских пространствах; используя примеры из этой работы, можно показать, что нельзя получить лучших оценок.

Для доказательства достаточно рассматривать $\Omega_1 \subset \Omega$ и предполагать, что $u = 0$ в окрестности той части $\partial\Omega_1$, которая не лежит на $\partial\Omega$. Используя разбиение единицы, можно получить оценки для всей области Ω. Нужно доказывать оценки только для Ω_1 таких, что $\partial\Omega_1 \cap \Gamma_0 \neq \varnothing$.

Область Ω_1 можно привести к такому виду, что $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \subset \{x_n = 0\}$, $x_n > 0$ в Ω_1 и $\frac{\partial}{\partial\nu} = \frac{\partial}{\partial x_1} + a_n(x')\frac{\partial}{\partial x_n}$, где $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Пусть $N = \{x \in \Omega_1 \mid x' \in \Gamma_0\}$.

Если $x_0 \in N$, то найдется $k_0 \leqslant k$ такое, что $\frac{\partial^l}{\partial x_1^l} a_n(x_0') = 0$ при $l < k_0$ и $\frac{\partial^{k_0}}{\partial x_1^{k_0}} \times a_n(x_0') \neq 0$. Можно считать, что $\frac{\partial^{k_0}}{\partial x_1^{k_0}} a_n(x') \neq 0$ при $x \in \Omega_1$.

Тогда в Ω_1 $a_n(x') = q(x')\cdot p_{k_0}(x_1)$, где $|q| \geqslant c > 0$ в Ω_1 и $p_{k_0}(x_1)$ — полином от x_1 степени k_0 с коэффициентами, зависящими от $(x_2, \ldots, x_{n-1})$, и старшим коэффициентом, равным единице. Продолжим $\mathbf{v}$ внутрь Ω_1. Тогда, используя лемму $C.1$ из [4], получим, что $x_n(s) \geqslant c_0 |s|^{k+1}$ на характеристиках, проходящих при $s = 0$ через точки $x \in \Omega_1$ и выходящих на $\partial\Omega_1$ при $x_n > 0$ или на N в случае подмногообразия Γ_0 вида 1. Здесь c_0 не зависит от начальной точки $x \in \Omega_1$ и s — параметр на характеристике.

Затем доказательство проводится с использованием функции Грина для оператора

$$L_0 = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \text{ где } x \in \Omega_1.$$

Автор приносит благодарность Ю. В. Егорову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ш. А. Алимов, Об одной краевой задаче для эллиптического оператора.— ДАН, 1980, 253:2, с. 265—266.

[2] Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев. О задаче с косой производной.— Матем сб., 1969, 78:1, с. 148—176.

[3] B. Winzell. Sub-elliptic estimates for the oblique derivative problem.— Math. Scand., 1978, 43:1, p. 169—176.

[4] F. Treves. A new method of proof of the subelliptic estimates.— Comm., Pure Appl. Math., 1971, 24, p. 71—115.

Московский государственный университет

Поступило в Правление общества 30 ноября 1981 г.