

С.Н. АРТЕМОВ

НЕАРИФМЕТИЧНОСТЬ ИСТИННОСТНЫХ ПРЕДИКАТНЫХ
ЛОГИК ДОКАЗУЕМОСТИ

(Представлено академиком А.Н. Колмогоровым 17 V 1985)

Работа посвящена исследованию средствами модальных логик свойств доказуемости в достаточно сильных теориях (см. обзоры [1, 2]). Всюду ниже под T понимает теорию, удовлетворяющую следующим условиям: T в арифметическом языке; в T выводимы аксиомы арифметики Робинсона; T перечислима; все теоремы T истинны в стандартной модели арифметики. Этим условиям удовлетворяет, например, пеановская арифметика PA . Пусть $Pr_T(x)$ означает гёделевскую формулу доказуемости в T . Формулы языка модальной логики естественно рассматривать как схемы арифметических формул, где пропозициональные и предикатные буквы являются метапеременными по арифметическим формулам, а модальность \Box понимается как $Pr_T(\cdot)$. Назовем истинностной логикой доказуемости в T множество модальных формул, задающих схемы истинных (в стандартной модели арифметики) арифметических формул. Как показано в [3], истинностная пропозициональная логика доказуемости в T не зависит от выбора T ; она задается разрешимым исчислением S . В предикатном случае истинностные логики L_T доказуемости в T могут быть различны при разных T [4].

В настоящей работе показано, что ни одна из L_T не является арифметическим (и, тем самым, перечислимым) множеством; также не является арифметическим множеством $L = \bigcap_T L_T$. Таким образом, предикатные истинностные логики доказуемости не имеют эффективного описания. Заметим, что в каждой из L_T и L множество тех формул, которые не содержат модальности, совпадает с логикой предикатов и, следовательно, перечислимо.

1. Считаю, что предикатный модальный язык получен из языка предикатов 1-го порядка без равенства и функциональных символов добавлением дополнительной одноместной связки \Box (модальность). Всюду ниже $\alpha(t)$ — арифметическая σ -формула, нумерующая аксиомы некоторой теории T , и пусть $Pr_\alpha(x)$ — стандартная гёделевская формула доказуемости в T , построенная из α . Назовем оценкой всякое отображение f^α , ставящее в соответствие каждой атомарной формуле P арифметическую формулу $f^\alpha P$, содержащую то же, что и P , множество свободных переменных. Считаю, что f^α коммутует с операцией замены свободных переменных в P :

$$f^\alpha(\mathcal{P}(x_1, \dots, x_n)) = A(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow f^\alpha(\mathcal{P}(y_1, \dots, y_n)) = A(y_1, \dots, y_n).$$

Как обычно, следует избегать коллизии переменных. Естественным образом оценка f^α продолжается до отображения, ставящего каждой предикатной модальной формуле R в соответствие арифметическую формулу $f^\alpha R$:

1) f^α коммутует с булевыми связками и кванторами;

2) $f^\alpha \Box R(x_1, \dots, x_n) = Pr_\alpha(f^\alpha R(x_1, \dots, x_n))$, где для каждой арифметической формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ через $\bar{\varphi}(x_1, \dots, x_n)$ обозначен терм для примитивно-рекурсивной функции $\lambda x_1, \dots, x_n \bar{\varphi}(x_1, \dots, x_n)$.

Положим

$L_\alpha = \{R \mid R \text{ — предикатная модальная формула и для каждой оценки } f^\alpha \text{ арифметическая формула } f^\alpha R \text{ истинна}\}$;

$$L = \bigcap_\alpha L_\alpha.$$

Теорема. Ни одна из логик L_α и L не является арифметическим множеством.

2. Изложим схему доказательства. Обозначим через EAM язык логики предикатов, содержащий только двуместный предикатный символ E и трехместные предикатные символы A и M . Один из вариантов известной теоремы Генненбаума утверждает существование конечного множества X формул языка EAM таких, что:

1) все формулы из X истинны в стандартной модели арифметики при интерпретации τ такой, что $\tau E(x, y)$ есть $x = y$, $\tau A(x, y, z)$ есть $x + y = z$, $\tau M(x, y, z)$ есть $x \cdot y = z$;

2) любая модель множества формул X с областью ω такая, что E интерпретируется как тождество на ω , а A и M интерпретируются рекурсивными предикатами, изоморфна стандартной модели арифметики. Считаем, что X содержит аксиомы арифметики Робинсона, включая аксиомы равенства, записанные на EAM -языке. Пусть B означает конъюнкцию формул из X ; через $D \models$ обозначаем истинность в модели D , символом \models истинность в стандартной модели арифметики.

Пусть H — произвольная EAM -формула. Положим

$$C = B \wedge \forall x, y (\Box E(x, y) \vee \Box \neg E(x, y)) \wedge \forall x, y, z (\Box A(x, y, z) \wedge \Box \neg A(x, y, z)) \wedge \forall x, y, z (\Box M(x, y, z) \wedge \Box \neg M(x, y, z)) \text{ и } H' = C \rightarrow H.$$

Основная лемма. Для всякой L_α и всякой EAM -формулы $H \models H$ (при интерпретации τ) $\Leftrightarrow H' \in L_\alpha$.

Изложим схему доказательства основной леммы. Пусть $\models H$, f^α — произвольная оценка и $\models f^\alpha C$, следовательно, $\models f^\alpha B$. Определим интерпретацию D с областью ω такую, что для всех $k, m, n \in \omega$

$$\begin{aligned} D \models E(k, m) &\Leftrightarrow \models f^\alpha E(k, m), \\ D \models A(k, m, n) &\Leftrightarrow \models f^\alpha A(k, m, n), \\ D \models M(k, m, n) &\Leftrightarrow \models f^\alpha M(k, m, n). \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что для каждой EAM -формулы P $D \models P \Leftrightarrow \models f^\alpha P$, в частности, $D \models B$.

Лемма 1. Отношения, задаваемые на ω формулами $f^\alpha E$, $f^\alpha A$ и $f^\alpha M$, рекурсивны.

Пользуясь леммой 1, можно перейти от D к интерпретации D' с областью ω такой, что D' элементарно эквивалентна D , формула B интерпретируется в D' отношением тождества, интерпретации A и M в D' рекурсивны. Таким образом, D' является рекурсивно определенной моделью множества X формул языка EAM , следовательно, D' изоморфна стандартной модели арифметики и $D' \models H$. Отсюда следует $D \models H$, $\models f^\alpha H$ и $\models f^\alpha H'$.

Пусть теперь $\not\models H$ при интерпретации τ . Пусть f^α на атомарных формулах E , A и M совпадает с τ . Из свойств формулы B и разрешимости в T отношений $x = y$, $x + y = z$ и $x \cdot y = z$ следует $\models f^\alpha C$. Таким образом, $\not\models f^\alpha H$ и основная лемма доказана.

Основная лемма дает алгоритмическую сводимость множества всех истинных арифметических формул к каждой из L_α и L , что доказывает теорему.

Математический институт им. В.А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
27 V 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. Boolos G. The unprovability of consistency; essay in modal logic. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1979.
2. Артемов С.Н. В сб.: Неклассические логики и их применение. Вопросы кибернетики. М.: Наука, 1982, с. 3–22.
3. Solovay R.M. — Israel J. Math., 1976, vol. 25, p. 287–304.
4. Montagna F. — Notre Dame J. Form. Log., 1984, vol. 25, № 2, p. 179–189.