МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 5, № 2 (1969), 145—148

УДК 513.6

РЕГУЛЯРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В ГРУППЕ КРЕМОНЫ

Ю. И. Манин

Доказано, что некоторая положительная степень любого автоморфизма бирационально линейчатой поверхности действует либо на относительно минимальной модели, либо на рациональной поверхности, ранг группы Пикара которой равен десяти. Библ. 3 назв.

Пусть k — фиксированное поле, $K \supset k$ — его расширение. Назовем *моделью* поля K пару (V, f), состоящую из алгебраического k-многообразия V и k-изоморфизма $f: k(V) \to K$ поля функций на V с K. Любой автоморфизм поля K над k индуцирует бирациональный автоморфизм модели V.

Определение. Автоморфизм поля K/k называется *регулярным*, если существует полная неособая модель поля K, на которой этот автоморфизм и обратный к нему всюду определены. (Если отбросить в этом определении условие полноты, получится новое понятие; автор не знает, существенно ли требование гладкости).

В этой заметке мы ограничимся случаем $\dim K/k = 2$ и будем считать k алгебраически замкнутым. Мы пользуемся терминологией и результатами книги [1]. Если никакая модель K/k не является линейчатой поверхностью, то K имеет единственную (с точностью до канонического изоморфизма) минимальную модель. Поэтому все автоморфизмы поля K являются автоморфизмами этой модели и, следовательно, регулярны. Основная цель этой заметки — доказать аналогичный результат для линейчатых

поверхностей. Затем на примерах мы покажем, что утверждение теоремы нельзя усилить.

ТЕОРЕМА. *Пусть s — регулярный автоморфизм поля K/k функций на алгебраической поверхности. Тогда существует такое целое число $n > 0$, что s^n действует как автоморфизм на полной неособой модели V поля k одного из следующих типов:*

а) *V — относительно минимальная поверхность;*

б) *V — рациональная поверхность, и rk Pic $V = 10$.*

Доказательство. Случай 1. Иррегулярность q поля K отлична от нуля.

Пусть s действует на модели V'. Отображение Альбанезе f: $V' \to C$ имеет своим образом кривую рода $\geqslant 1$, и существует действие s на C такое, что f перестановочно с s. Исключительные кривые на V' лежат в слоях f, потому их объединение s-инвариантно. Пусть V — модель, получившаяся из V' стягиванием s-инвариантного подмножества исключительных кривых первого рода. Мы утверждаем, что s действует на V, как автоморфизм. Действительно, это верно для дополнения к конечному числу точек на V, откуда легко следует требуемое по теореме о разложении бирационального отображения в произведение моноидальных преобразований. Отметим, что в этом случае результат верен даже для $n = 1$.

Случай 2. Иррегулярность равна нулю.

Тогда K/k — поле рациональных функций от двух переменных. Обозначим через $N_0(V)$ подпространство $Q \otimes$ Pic V, состоящее из таких элементов $l \in Q \otimes$ Pic V, для которых $(l \cdot \omega_V) = 0$, ω_V — канонический класс V.

ЛЕММА. *Пусть V — рациональная поверхность. Если rk Pic $V \neq 10$, то индекс пересечения на $N_0(V)$ отрицательно определен.*

Доказательство. Пространство $Q \otimes$ Pic V с квадратичной формой «индекс пересечения» зависит только от $r = rk$ Pic V. В частности, его можно вычислять для случая, когда V получается из плоскости моноидальным преобразованием с центром в $r - 1$ точке «в общем положении». Пусть $l_1, \ldots, l_{r-1}$ — образы этих точек на V; тогда $Q \otimes$ Pic V порожден ω_V и $l_1, \ldots, l_{r-1}$. Индекс пересечения с ω_V вычисляется так:

$$\left(\omega_V \cdot \left(x\omega_V + \sum_{i=1}^{r-1} y_i l_i\right)\right) = (10 - r)x - \sum_{i=1}^{r-1} y_i.$$

Поэтому при $r \neq 10$ имеем

$$x\omega_V + \sum_{i=1}^{r-1} y_i l_i \in N_0(V) \Leftrightarrow x = \frac{1}{10-r} \sum_{i=1}^{r-1} y_i,$$

а при $r = 10$

$$x\omega_V + \sum_{i=1}^{r-1} y_i l_i \in N_0(V) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r-1} y_i = 0.$$

Поэтому на $N_0(V)$

$$\left(x\omega_V + \sum y_i l_i\right)^2 =$$

$$= x^2(10-r) - x\sum_{i=1}^{r-1} y_i - \sum_{i=1}^{r-1} y_i^2 = -\sum_{i=1}^{r-1} y_i^2,$$

откуда следует лемма. (Пользуюсь случаем исправить ошибку в статье [2], где на стр. 176 это утверждение сформулировано, но доказано неверно.)

Окончание доказательства теоремы. Пусть V — рациональная поверхность, на которой действует s, и rk Pic $V \neq 10$. Из леммы вытекает, что для некоторого n действие s^n на Pic V тривиально. Действительно, ω_V s-инвариантно, а на ортогональном дополнении к ω_V, которое (в силу $\omega_V^2 \neq 0$) порождает вместе с ω_V подгруппу конечного индекса, s сохраняет отрицательно определенную форму. Утверждение следует тогда из конечности ранга Pic V.

Пусть $l \in$ Pic V — класс исключительной кривой X первого рода на V. Так как $s^n(l) = l$, кривая X неподвижна относительно s^n, потому что $l^2 = -1$, так что разные исключительные кривые принадлежат разным классам. То же рассуждение, что и в случае 1, показывает тогда, что X можно стянуть, сохранив действие s^n.

Теорема доказана.

Пример 1. При $q = 0$ утверждение теоремы для самого s (вместо s^n) неверно. Действительно, из теоремы 5.7 работы [2] следует, что отображение t_x кубической поверхности в себя не действует ни на какой относительно минимальной модели, хотя действует на поверхности дель Пеццо с rk Pic $V = 8$. Действительно, иначе на V существовал бы t_x-инвариантный пучок рациональных кривых, что невозможно.

Пример 2. Пусть V — рациональная поверхность с пучком эллиптических кривых, имеющая по крайней

мере два сечения и без исключительных кривых в слоях. Приняв одно из сечений за нулевое, мы можем определить автоморфизм V — сдвиг на любое другое сечение (в смысле группового закона на общем слое). Назовем такие автоморфизмы *эллиптическими*. Так как rk Pic $V = 10$, этот пример показывает, что второй случай теоремы реализуется.

ГИПОТЕЗА. *Всякий автоморфизм бесконечного порядка, действующий на рациональной поверхности V с rk Pic $V = 10$, в некоторой степени является эллиптическим.*

Чтобы доказать эту гипотезу, достаточно было бы проверить, что $\dim H^0(V, \omega_V^{-1}) \geqslant 2$ для такой поверхности. Действительно, тогда система $|\omega_V^{-1}|$ доставила бы инвариантный пучок эллиптических кривых. Некоторая степень s действует на этом пучке послойно; рассматривая действие на общем слое, без труда получим требуемое.

Заметим еще, что группа автоморфизмов относительно минимальных рациональных поверхностей связна (см., например, [3]) и что Pic V в этом случае порождает двумерную группу когомологий. Из доказательства теоремы следует поэтому, что

Автоморфизм рациональной поверхности, тривиально действующий на ее двумерных когомологиях, принадлежит связной компоненте группы автоморфизмов.

Это отвечает на вопрос, поставленный автору И. Р. Шафаревичем.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило
8.VII.1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Алгебраические поверхности, Труды Матем. ин-та АН СССР, **75** (1965), 75—91.

[2] Манин Ю. И., Рациональные поверхности над совершенными полями. II, Матем. сб., **72**, № 2, (1967), 161—192.

[3] Манин Ю. И., Об арифметике рациональных поверхностей, Докл. АН СССР, **152**, № 1 (1963), 47—49.