

Выпуклый анализ на плоскости

Л. ЛОКУЦИЕВСКИЙ, В. ТИХОМИРОВ

МЫ ОБСУДИЛИ СВОЙСТВА ВЫПУКЛЫХ множеств, теперь расскажем о выпуклых функциях. Стоит сказать, что особое развитие теории выпуклости произошло именно благодаря анализу выпуклых функций.

С каждой функцией одного переменного $y = f(x)$, у которой допускаются значения, равные $+\infty$ (т.е. с областью определения \mathbb{R}), связано на плоскости с координатами $(x; y)$ множество $\text{epi } f = \{(x; y) \in \mathbb{E}^2 \mid y \geq f(x)\}$, называемое *надграфиком* или *эпиграфом* функции f . Функция, надграфик которой выпуклое множество, называется *выпуклой*, а функция надграфик которой замкнутое множество, называется *замкнутой* (рис.7). Функция $y = x^2$, а

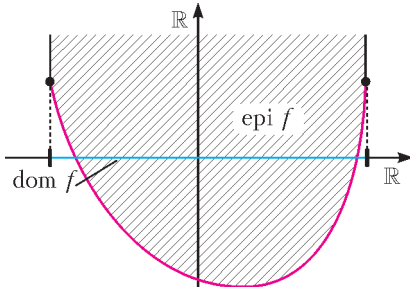


Рис. 7. Выпуклая замкнутая функция одного переменного

также функция, равная нулю, скажем, на отрезке $[0; 1]$, а вне этого отрезка равная бесконечности, выпуклы и замкнуты, а функция $y = x^3$ замкнута, но выпуклой не является.

Символ $+\infty$ оказывается очень удобным при исследовании выпуклых функций. Правила работы с ним совершенно естественны: $+\infty \pm a = +\infty$ для любого конечного числа a , $+\infty \cdot a = +\infty$ для любого $a >$

> 0 , а произведение $+\infty \cdot 0$ и разность $+\infty - \infty$ будем считать некорректными. Также $+\infty > a$ для любого конечного числа a . Множество тех x , где $f(x) \neq +\infty$, называемое *эффективным множеством* f , обозначается $\text{dom } f$.

На самом деле, теория выпуклых множеств была создана Минковским не на плоскости, а в n -мерном пространстве, а теория выпуклых функций была построена Фенхелем и некоторыми другими математиками сороковых-пятидесятых годов прошлого века не для функций одного переменного, а для функций многих переменных. Эти исследования оказались очень актуальными. Еще перед Второй мировой войной обнаружилось, что планирование военных операций и экономика моделируются системами линейных неравенств, и в теории выпуклости выделился раздел, где такие неравенства исследовались. Основы теории выпуклых неравенств были заложены Леонидом Витальевичем Канторовичем (1912–1986) в 1939 году, а сам раздел получил название линейного программирования.

Мы уже знаем, что выпуклые замкнутые множества допускают двойственное описание. Каждую выпуклую замкнутую функцию тоже можно описать на двойственном языке. Такое описание для функций приводит к очень удобному аппарату выпуклого исчисления. Например, для каждой выпуклой замкнутой функции определена двойственная выпуклая функция, двойственная к которой совпадает с исходной функцией!

Но не будем забегать вперед. Сначала поймем, как алгебраически сформулировать результат теоремы Минковского, примененной к надграфику выпуклой функции. Напомним, что линейной функцией называется функция вида $y = ax + b$, где a и b – вещественные числа. Линейная функция является выпуклой, так как ее

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

надграфик – это полуплоскость. Ключевая идея, позволяющая превратить теорему Минковского в анализ выпуклых функций, заключается в том, что полуплоскости описываются линейными неравенствами. В результате получается очень мощный язык для работы с выпуклыми функциями.

Теорема 4 (теорема Фенхеля о двойственном описании выпуклых функций). *Выпуклая замкнутая функция одного переменного является верхней гранью линейных функций, ее не превосходящих.*

Доказательство. Пусть задана выпуклая замкнутая функция $y = f(x)$. Если эффективное множество этой функции пусто, $\text{dom } f = \emptyset$, то утверждение теоремы очевидно выполнено. Поэтому будем считать, что $\text{dom } f \neq \emptyset$. Докажем, что в этом случае для любой точки $(x_0; y_0)$ не из $\text{epi } f$ найдется такая линейная функция, что, с одной стороны, ее график лежит ниже надграфика $\text{epi } f$, а с другой стороны – над точкой $(x_0; y_0)$. Существование такой линейной функции для каждой точки $(x_0; y_0)$, не лежащей в надграфике функции, совпадает с утверждением теоремы.

Итак, выберем любую точку $\bar{x} \in \text{dom } f$. Точка $(\bar{x}; f(\bar{x}) - 1)$ на плоскости не принадлежит $\text{epi } f$ и по теореме отделимости (теорема 1) может быть строго отделена от $\text{epi } f$ прямой l_1 , которая не может быть вертикальной прямой, имеющей координату \bar{x} (такая прямая точку $(\bar{x}; f(\bar{x}) - 1)$ строго не отделяет). Значит, эта прямая – график линейной функции (рис.8).

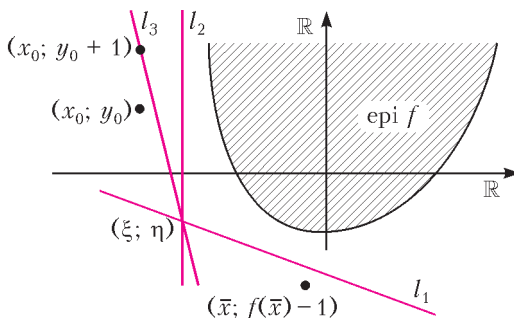


Рис. 8. Иллюстрация к доказательству теоремы Фенхеля

Поскольку точка $(x_0; y_0)$ не принадлежит $\text{epi } f$, то по теореме 1 она может быть строго отделена от $\text{epi } f$ прямой l_2 . Если эта прямая – график линейной функции, то все в порядке. Но допустим, что прямая l_2 вертикальна, т.е. имеет уравнение $x = \xi$. В этом случае надграфик $\text{epi } f$ лежит либо слева, либо справа от l_2 . Поскольку эти случаи аналогичны, будем для определенности считать, что $\xi > x_0$, т.е. надграфик $\text{epi } f$ лежит справа от прямой l_2 . Так как прямая l_1 не вертикальна, а l_2 вертикальна, они обязательно пересекаются. Обозначим через $(\xi; \eta)$ координаты точки пересечения. Проведем прямую l_3 через точки $(\xi; \eta)$ и $(x_0; y_0 + 1)$. По построению, прямая l_3 строго отделяет $\text{epi } f$ от точки $(x_0; y_0)$ и не является вертикальной. Таким образом, мы доказали, что для любой точки, не принадлежащей $\text{epi } f$, существует линейная функция, отделяющая эту точку от надграфика заданной функции. А это и требовалось доказать.

Теперь мы готовы для формулировки выпуклой двойственности для выпуклых функций. Двойственным объектом для выпуклой функции $f(x)$ является сопряженная функция $f^*(p)$, являющаяся по определению максимумом, а точнее супремумом, выражения $px - f(x)$ по всем x :

$$f^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (px - f(x)).$$

Также иногда сопряженную функцию $f^*(p)$ называют *преобразованием Юнга–Фенхеля* (или Лежандра–Юнга–Фенхеля) функции $f(x)$ либо *первой сопряженной* к f функцией. *Второй сопряженной* к f функцией называют функцию, сопряженную к сопряженной:

$$f^{**}(x) = \sup_{p \in \mathbb{R}} (px - f^*(p)).$$

Теорема 5 (теорема Фенхеля–Моро). *Пусть f – выпуклая и замкнутая функция одного переменного. Тогда $f = f^{**}$.*

Доказательство. Эта теорема является несложным следствием теоремы Фенхеля. Точка $(p; q)$ лежит в надграфике f^* , если $q \geq f^*(p)$, т.е. $q \geq px - f(x)$ при всех x . Меняя в этом неравенстве q и $f(x)$ места-

ми, получаем, что $f(x) \geq px - q$ при всех x . Итак, точка $(p; q)$ лежит в $\text{epi} f^*$, если график линейной функции $y = px - q$ лежит под $\text{epi} f$.

Изучим теперь надграфик второй сопряженной функции f^{**} . Точка $(x_0; y_0)$ лежит в $\text{epi} f^{**}$, если $y_0 \geq f^{**}(x_0)$, т.е. $y_0 \geq px_0 - f^*(p)$ при всех p . Поэтому если $q \geq f^*(p)$, то заведомо $y_0 \geq px_0 - q$. Итак, мы получили, что точка $(x_0; y_0)$ лежит в $\text{epi} f^{**}$, если она лежит над графиками всех прямых $y = px - q$ для всех $(p; q)$ из $\text{epi} f^*$. Другими словами, f^{**} — это верхняя грань линейных функций, не превосходящих f . Поэтому по теореме Фенхеля $f = f^{**}$.

Верно, конечно, и утверждение, обратное к теореме Фенхеля–Моро: если $f = f^{**}$, то функция f является выпуклой и замкнутой. Доказательство мы не приводим, так как оно почти ничем не отличается от аналогичной части в доказательстве теоремы о биполяре.

Рассмотрим одно простое, но очень важное применение сопряженных функций. Очевидно из определения, что для всех x и p выполняется неравенство

$$f(x) + f^*(p) \geq px,$$

называемое неравенством Юнга.

Задача 2. Выберем любые четыре положительных числа x, p, a и b . Докажите, что если $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, то

$$\frac{x^a}{a} + \frac{p^b}{b} \geq px$$

(при $a = b = 2$ это всем известное неравенство $x^2 + p^2 \geq 2px$).

Разберемся, при каких x и p в неравенстве Юнга возможно равенство.

Задача 3. Предположим, так оказалось, что выпуклые функции f и f^* дифференцируемы. Докажите, что

$$f(x) + f^*(p) = px \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p = f'(x) \Leftrightarrow x = f^*(p).$$

Выпуклый анализ очень хорошо работает в задачах оптимизации. Рассмотрим одно из применений идеи отделимости при отыскании минимума функции. Пусть,

например, $f(x)$ — дифференцируемая выпуклая функция одного переменного и требуется найти ее минимум на отрезке $[a; b]$. График выпуклой функции всегда лежит над касательной. Поэтому если $f'(c) > 0$ в некоторой точке $c \in [a; b]$, то минимум не может лежать на отрезке $[c; b]$ и должен лежать на отрезке $[a; c]$. Если $f'(c) < 0$, то, аналогично, минимум находится на отрезке $[c; b]$. Если же $f'(c) = 0$, то c — минимум.

Для того чтобы найти минимум, можно попробовать решить уравнение $f'(x) = 0$, однако явно решить такое уравнение получится далеко не всегда. Тем не менее, приближенно найти минимум выпуклой функции очень просто. Пусть c — середина отрезка $[a; b]$. Если $f'(c) = 0$, то c — минимум и задача решена. Если же $f'(c) \neq 0$ (что скорее всего), то в зависимости от знака $f'(c)$ обозначим через $[a_1; b_1]$ ту половину отрезка, на которой находится минимум, а про вторую, на которой минимума заведомо нет, забудем. Далее, обозначим через c_1 середину получившегося отрезка $[a_1; b_1]$ и повторим: вычисление $f'(c_1)$ позволит уменьшить отрезок еще в два раза. Таким образом, мы получим геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{2}$ и за n шагов найдем отрезок длины $(b - a)/2^n$, на котором лежит минимум, или, другими словами, найдем минимум с точностью до $(b - a)/2^n$.

На первый взгляд, описанный выше метод «отсечения» будет работать только на прямой, так как опирается на деление отрезка пополам. Однако это не так! Он прекрасно работает и в многомерном случае: если требуется приближенно найти минимум выпуклой функции многих переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на выпуклом ограниченном множестве $\mathcal{C} \subset \mathbb{E}^n$, то, вычислив производную f в какой-нибудь точке множества \mathcal{C} , можно провести через эту точку гиперплоскость (ортогональную f') и отсечь полупространство, в котором минимума заведомо нет. Если при этом в качестве точки выбрать центр масс \mathcal{C} , то по (очень красивой) теореме Грюнбаума–Хаммера (см. [3]) объем отсеченной части будет составлять не меньше

$\frac{1}{e}$ от объема всего множества \mathcal{C} . Поэтому, действуя по индукции, мы получим геометрическую прогрессию со знаменателем $\left(1 - \frac{1}{e}\right)$. Данный алгоритм носит название «метод централизованных сечений» и имеет сейчас очень широкое применение в компьютерных вычислениях. Отметим, что задача нахождения центра масс многомерного выпуклого тела все же сложнее задачи отыскания середины отрезка и требует отдельного обдумывания.

Теперь, когда мы доказали все основополагающие теоремы выпуклого анализа, поговорим еще о некоторых красивых геометрических результатах, на которые вообще так богат выпуклый анализ. Одним из таких результатов, без сомнения, является формула Штейнера, которая позволяет вычислить площадь r -окрестности выпуклого множества \mathcal{C} . Напомним, что r -окрестностью множества \mathcal{C} , $r \geq 0$, называется совокупность точек, находящихся на расстоянии не больше r от \mathcal{C} :

$$\mathcal{C}_r = \{A \in \mathbb{E}^2 : d(A, \mathcal{C}) \leq r\}.$$

Обозначим через $S(\mathcal{C})$ площадь множества \mathcal{C} . Естественно ожидать, что при малых r площадь $S(\mathcal{C}_r)$ будет мало отличаться от площади $S(\mathcal{C})$. На самом деле оказывается, что $S(\mathcal{C}_r)$ есть квадратный трехчлен по r , коэффициенты которого определяются формой множества.

Теорема 6 (формула Штейнера). *Если \mathcal{C} – выпуклое ограниченное множество, то площадь его r -окрестности отличается от площади самого множества \mathcal{C} на сумму площади прямоугольника, одна из сторон которого имеет длину границы \mathcal{C} , а вторая равна r , и площади круга радиуса r (рис.9).*

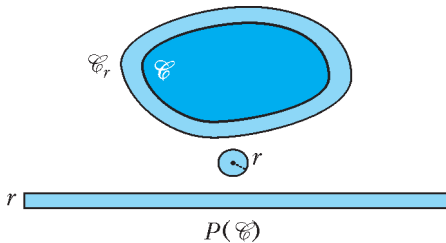


Рис. 9. Иллюстрация к формуле Штейнера

Длину границы \mathcal{C} часто для краткости называют *периметром* (по аналогии с многоугольником) и обозначают $P(\mathcal{C})$. На алгебраическом языке формула Штейнера записывается так:

$$S(\mathcal{C}_r) = S(\mathcal{C}) + P(\mathcal{C})r + \pi r^2.$$

Отметим, что если \mathcal{C} – точка, то $S(\mathcal{C}) = 0$ и $P(\mathcal{C}) = 0$, а если \mathcal{C} – отрезок, то $S(\mathcal{C}) = 0$, а $P(\mathcal{C})$ есть удвоенная длина отрезка. В обоих этих случаях формула Штейнера легко проверяется. Для доказательства интерес представляют лишь выпуклые множества с непустой внутренностью.

Доказательство формулы Штейнера.

Разберем сначала случай, когда множество \mathcal{C} является выпуклым многоугольником с вершинами A_1, \dots, A_n . В этом случае множество \mathcal{C}_r состоит из самого многоугольника \mathcal{C} , прямоугольников Π_1, \dots, Π_n высоты r , построенных на сторонах многоугольника, и секторов $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ окружностей радиуса r с центрами в вершинах многоугольника, как изображено на рисунке 10. Сумма площадей

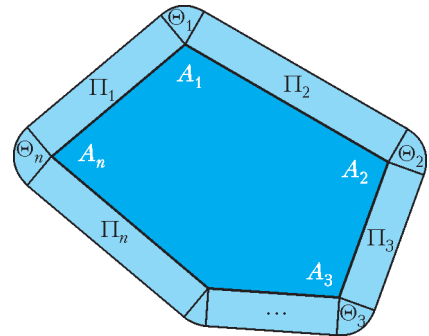


Рис. 10. Формула Штейнера для выпуклого многоугольника

прямоугольников Π_i , очевидно, равна периметру $P(\mathcal{C})$ многоугольника \mathcal{C} , умноженному на r . Вычислим сумму площадей секторов Θ_i . Как нетрудно увидеть, каждый сектор Θ_i имеет угол, равный внешнему углу многоугольника в своей вершине A_i . Поскольку сумма внешних углов многоугольника равна 360° , то, если составить вместе все секторы Θ_i , получится в точности круг, а значит, сум-

ма их площадей равна πr^2 . Таким образом, $S(\mathcal{C}_r) = S(\mathcal{C}) + P(\mathcal{C})r + \pi r^2$.

Итак, мы доказали формулу Штейнера для случая, когда \mathcal{C} – выпуклый многоугольник. А теперь докажем, что та же самая формула справедлива и для произвольного выпуклого множества \mathcal{C} с непустой внутренней частью. Чтобы это доказать, будем действовать так, как обычно действуют при вычислении площади круга и длины окружности. Впишем в \mathcal{C} серию выпуклых многоугольников \mathcal{C}^k так, что длины сторон \mathcal{C}^k стремятся к 0 при $k \rightarrow \infty$. Тогда стороны \mathcal{C}^k все теснее прилегают к границе \mathcal{C} . Поэтому площади многоугольников \mathcal{C}^k стремятся к площади \mathcal{C} , а периметры $P(\mathcal{C}^k)$ стремятся к длине $P(\mathcal{C})$ границы \mathcal{C} . Зафиксировав любое $r > 0$, получим, что площади r -окрестностей $S(\mathcal{C}_r^k)$ стремятся к $S(\mathcal{C}_r)$. Поэтому при любом $r > 0$ имеем

$$\begin{array}{ccccccc} S(\mathcal{C}_r^k) & = & S(\mathcal{C}^k) & + & P(\mathcal{C}^k)r & + & \pi r^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ S(\mathcal{C}_r) & = & S(\mathcal{C}) & + & P(\mathcal{C})r & + & \pi r^2 \end{array}$$

что и завершает доказательство.

А теперь давайте задумаемся над обобщением формулы Штейнера на трехмерный случай. По аналогии можно предположить (а затем и доказать), что объем r -окрестности выпуклого множества \mathcal{C} в трехмерном пространстве есть полином третьей степени по r :

$$a + br + cr^2 + dr^3.$$

Достаточно очевидно, что a – это объем множества, b – это площадь поверхности множества, а d – объем единичного шара. Возникает естественный вопрос:

Какой «физический» смысл несет коэффициент c ?

Приведем еще один красивый результат выпуклого анализа, который обычно называют кинематической формулой. Мы докажем ее на Евклидовой плоскости \mathbb{E}^2 . Рассмотрим проекцию ограниченного выпуклого множества \mathcal{C} на какую-либо прямую, проходящую через начало координат. Это будет, конечно, отрезок (или точка). Обозначим через $M(\mathcal{C})$ среднюю

(по углу) длину проекции \mathcal{C} на все прямые, проходящие через начало координат. Тогда периметр $P(\mathcal{C})$ можно вычислить через среднюю длину проекции.

Теорема 7 (кинематическая формула).

Если \mathcal{C} – выпуклое ограниченное множество, то его периметр ровно в π раз больше его средней длины проекции:

$$P(\mathcal{C}) = \pi M(\mathcal{C}).$$

С помощью кинематической формулы можно, например, вычислить длину границы r -окрестности произвольного выпуклого множества. Действительно, длина проекции \mathcal{C}_r на любую прямую ровно на $2r$ больше, чем длина проекции \mathcal{C} на ту же прямую (рис.11). Поэтому при

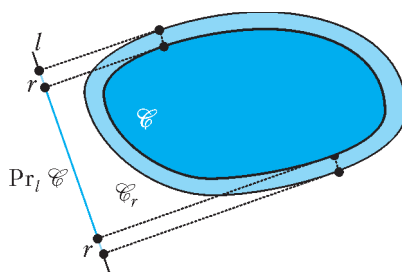


Рис. 11. Длина проекции r -окрестности множества

любом r

$$\begin{aligned} P(\mathcal{C}_r) &= \pi M(\mathcal{C}_r) = \\ &= \pi(M(\mathcal{C}) + 2r) = P(\mathcal{C}) + 2\pi r. \end{aligned}$$

Таким образом, периметр $P(\mathcal{C}_r)$ всегда больше периметра $P(\mathcal{C})$ ровно на длину окружности радиуса r !

Рассмотрим шар размером с Землю. Представим себе, что мы натянули веревку, обхватывающую этот шар по экватору. Такая веревка должна иметь длину примерно 40000 километров. Спрашивается: если мы захотим равномерно приподнять веревку над шаром, скажем, на один метр, на сколько нам потребуется увеличить ее длину? Оказывается, всего на 2π метров, т.е. меньше чем на 7 метров, что на первый взгляд совершенно удивительно.

Задача 4. Выведите формулу $P(\mathcal{C}_r) = P(\mathcal{C}) + 2\pi r$ из формулы Штейнера.

Доказательство кинематической формулы. При параллельном переносе множества \mathcal{C} или его повороте средняя длина проекции $M(\mathcal{C})$ не меняется. Разберемся, что происходит при гомотетии с коэффициентом Υ . Длина проекции на каждую прямую увеличивается в Υ раз, и, следовательно, средняя длина проекции тоже увеличивается в Υ раз. Поэтому если мы обозначим через λ среднюю длину проекции единичного отрезка, то средняя длина проекции отрезка длины a будет λa . Мы пока не можем явно вычислить число λ , но сможем сделать это в конце доказательства.

Докажем сначала кинематическую формулу для случая, когда \mathcal{C} – выпуклый многоугольник с вершинами A_1, \dots, A_n . Пусть l – любая прямая. Рассмотрим проекцию многоугольника \mathcal{C} и его сторон на l (рис.12). Проекция многоугольника \mathcal{C}

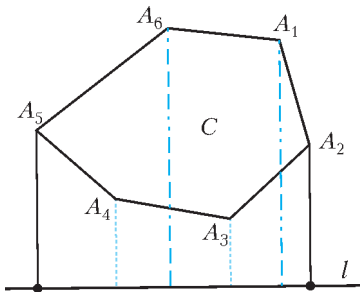


Рис. 12. Сумма длин проекций сторон многоугольника в 2 раза больше длины проекции самого многоугольника

на прямую l в два раза меньше суммы длин проекций сторон на ту же прямую! Тем самым, если обозначить через $Pr_l(\mathcal{C})$ длину проекции \mathcal{C} на l , то получим

$$Pr_l(\mathcal{C}) = \frac{1}{2}(Pr_l(A_1A_2) + Pr_l(A_2A_3) + \dots + Pr_l(A_nA_1)).$$

Поэтому и средняя длина проекции многоугольника в два раза меньше суммы средних длин проекций его сторон:

$$M(\mathcal{C}) = \frac{1}{2}(M(A_1A_2) + M(A_2A_3) + \dots + M(A_nA_1)).$$

Но мы уже вычислили среднюю длину

проекции отрезка любой длины через проекцию отрезка единичной длины! Значит, справа мы получаем число, в $\frac{\lambda}{2}$ раза большее периметра многоугольника \mathcal{C} , т.е.

$$M(\mathcal{C}) = \frac{\lambda}{2} P(\mathcal{C}), \text{ или } P(\mathcal{C}) = \frac{2}{\lambda} M(\mathcal{C}).$$

Таким образом, мы доказали формулу для случая, когда \mathcal{C} – многоугольник. Случай произвольного множества \mathcal{C} получается аналогично формуле Штейнера с помощью приближения многоугольниками. А именно: пусть \mathcal{C}^k – такой вписанный в \mathcal{C} выпуклый многоугольник, что расстояние от любой точки \mathcal{C} до \mathcal{C}^k не больше $\frac{1}{k}$. Тогда длина проекции \mathcal{C}^k на любую прямую l не может отличаться слишком сильно от длины проекции \mathcal{C} на ту же прямую, а именно:

$$Pr_l(\mathcal{C}^k) \leq Pr_l(\mathcal{C}) \leq Pr_l(\mathcal{C}^k) + \frac{2}{k}.$$

Следовательно, теми же неравенствами связаны и их средние:

$$M(\mathcal{C}^k) \leq M(\mathcal{C}) \leq M(\mathcal{C}^k) + \frac{2}{k}.$$

Поскольку $M(\mathcal{C}^k) = \frac{\lambda}{2} P(\mathcal{C}^k)$, то левая и правая части при $k \rightarrow \infty$ стремятся к $\frac{\lambda}{2} P(\mathcal{C})$, поэтому $M(\mathcal{C}) = \frac{\lambda}{2} P(\mathcal{C})$ для любого выпуклого множества \mathcal{C} .

Итак, $P(\mathcal{C}) = \frac{2}{\lambda} M(\mathcal{C})$ для любого выпуклого ограниченного множества. Подчеркнем еще раз, что число λ – одно и то же для всех выпуклых множеств. Найдем его. Если $\mathcal{C} = \mathcal{B}_r$ – это круг радиуса r , то длина его границы есть $P(\mathcal{B}_r) = 2\pi r$. При этом проекция на любую прямую имеет длину $2r$, поэтому и средняя длина проекции есть $2r$. Таким образом, мы получаем уравнение на λ :

$$P(\mathcal{B}_r) = \frac{2}{\lambda} M(\mathcal{B}_r) \Rightarrow 2\pi r = \frac{2}{\lambda} 2r \Rightarrow \frac{2}{\lambda} = \pi \Rightarrow \lambda = \frac{2}{\pi}$$

и, следовательно, $P(\mathcal{C}) = \pi M(\mathcal{C})$ для любого выпуклого множества \mathcal{C} .

Рассмотрим одно из простейших применений кинематической формулы. Пусть \mathcal{C}_1 и \mathcal{C}_2 – выпуклые ограниченные множества. Обозначим (как это сделано в уже упомянутой статье [5]) через $\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2$ множество середин отрезков, один конец которых принадлежит \mathcal{C}_1 , а второй – \mathcal{C}_2 . Множество $\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2$, конечно, выпукло.

Задача 5. Докажите, что длина границы множества $\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2$ есть полусумма длин границ множеств \mathcal{C}_1 и \mathcal{C}_2 .

Идея, заложенная в кинематической формуле, оказывается очень продуктивной в пространствах больших размерностей. Например, в трехмерном случае средняя площадь проекции выпуклого множества на (двумерные) плоскости есть (с точностью до постоянного множителя) площадь его поверхности, а средняя длина его проекции на (одномерные) прямые есть (опять же, с точностью до некоторого множителя) коэффициент с при r^2 в трехмерной формуле Штейнера, о «физическом» смысле которого мы спрашивали ранее. В n -мерном пространстве этот под-

ход позволяет построить серию *смешанных объемов* выпуклого тела, каждый из которых является новой дополнительной «физической» характеристикой тела наряду с его объемом и площадью поверхности.

Авторы выражают глубокую благодарность М.В.Козлову за ценные советы и замечания.

Литература

1. Начала Евклида. Книги I–VI. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948 («Классики естествознания»).
2. T. Bonnesen, W. Fenchel. Theorie der Konvexen Körper. – Teubner, Leipzig, 1934.
3. Г.Г.Магарил-Ильяев, В.М.Тихомиров. Выпуклый анализ и его приложения. – М.: Либерком, 2016.
4. L. W. Szczerba and W. Szmielew. On the Euclidean geometry without the Pasch axiom. – Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 18 (1970), 659–666.
5. Н. Васильев. Сложение фигур. – «Квант», 1976, №4.
6. В. Тихомиров. Теорема Ферма–Эйлера о двух квадратах. – «Квант», 1991, №10.

НАМ ПИШУТ

Вероятность и последняя цифра произведения

Наш читатель Е.Знак заметил и доказал, что цифра «1» обладает следующим интересным свойством: она *не более вероятна*, чем любая другая цифра, как последняя цифра произведения двух случайных натуральных чисел и она *не менее вероятна*, чем любая другая цифра, как последняя цифра степени случайного натурального числа со случайным натуральным показателем.

Прежде всего надо определиться, в каком смысле говорится о случайных натуральных числах. Будем считать, что вероятность выбора числа с данной последней цифрой для всех цифр одинакова и равна $1/10$. Аналогично, вероятность выбора числа с данным остатком при делении на 4 равна $1/4$, и т.д. Такая договоренность вполне соответствует следующей модели выбора натурального числа: из данного большого количества N подряд идущих натуральных чисел с равной вероятностью выбирается одно так, что вероятность выбора конкретного числа равна $1/N$.

Таблица умножения остатков при делении на 10 (табл.1) позволяет легко непосредственно сосчи-

Таблица 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	5	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

тать вероятность того, что произведение двух случайных натуральных чисел оканчивается на данную цифру. В этой таблице меньше всего цифр «1», «3», «7», «9» – по четыре штуки,

(Продолжение см. на с. 29)