Ю. И. Романов, О сравнении силы некоторых $\Delta\Sigma$-операций в связи с обобщением некоторых теорем о кратной отделимости,
Изв. вузов. Матем., 1968, номер 3, 80–85

https://www.mathnet.ru/ivm3291

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1968 МАТЕМАТИКА № 3 (70)

УДК 519.50

Ю. И. Романов

О СРАВНЕНИИ СИЛЫ НЕКОТОРЫХ $\Delta\Sigma$-ОПЕРАЦИЙ В СВЯЗИ С ОБОБЩЕНИЕМ НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМ О КРАТНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ

В теории операций над множествами нередко возникает вопрос о сравнении силы некоторых $\Delta\Sigma$-операций над множествами. В частности, это обстоятельство лежит в основе установления некоторых теорем о кратной отделимости.

В настоящей работе получены некоторые результаты такого типа, относящиеся к R- и R^C-операциям, для случая, когда исходное пространство индексов $I=(i)$ имеет мощность $\tau=\aleph_\nu$, а R-операция — счетную глубину цепей. Мы пользуемся терминологией, введенной в работах [1]—[6], и применяем ее без оговорок к случаю пространства индексов I мощности τ.

Обозначим через $\mathfrak{R}$ основное пространство, множества которого изучаются. Пусть N есть база $\Delta\Sigma$-операции, удовлетворяющая по отношению к любому классу множеств $K \ni \varnothing, \mathfrak{R}$ следующим условиям:

1°. Операции типа R_N сильнее операций Φ_{N^C}, $\bigcup\limits_\tau$ и $\bigcap\limits_\tau$ относительно класса множеств K.

2°. Операции типа (N, d) равносильны операции Φ_N относительно класса множеств K, и операции типа (N^C, d) равносильны операции Φ_{N^C} относительно того же класса, или

2′. $R_{R_N} \lesssim R_N$, $(R_N^C, d) \lesssim R_N^C$. Тогда операции типа (R_N^α, R_N^α) равносильны операции типа R_N^α относительно класса множеств K, операции типа $R_{R_{M_\alpha}}$ не сильнее операций типа R_{M_α}, где $\Phi_{M_\alpha} \equiv R_N^\alpha$, $R_N^\beta(K) \subset R_N^\alpha(K)$ и $R_N^{\beta C}(K) \subset R_N^\alpha(K)$ при $\beta < \alpha$ [1].

Систему множеств, инвариантную относительно операции $\bigcap\limits_\tau$, назовем Δ-системой. Пусть N есть база некоторой $\Delta\Sigma$-операции. Через N^i обозначается множество всех цепей базы N, содержащих индекс $i \in I$, и через $N^{i_1, \ldots, i_\beta, \ldots}$ — множество всех цепей базы N, содержащих индексы $i_1, \ldots, i_\beta, \ldots$ пространства I. Δ-систему, построенную на совокупности баз N и $(N^i)_{i \in I}$, обозначим $\Delta(N)$.

Лемма. *Пусть класс множеств $K \ni \varnothing$ и база N такова, что для любой базы M, принадлежащей $\Delta(N)$, выполняется соотноше-*

ние: $\Phi_M(K)\subset\Phi_N(K)$ *или* $\Phi_M(K)\subset\Phi_Q(K)$, *где* Φ_Q — *некоторая* $\Delta\Sigma$-*операция.*

Тогда

$$\Phi_{M_1\setminus M_2}(K)\subset\Phi_N(K) \text{ и } \Phi_{M_1\setminus \bigcup\limits_{\beta<\Omega_\nu} M_1^{i_\beta}}(K)\subset\Phi_N(K)$$

или

$$\Phi_{M_1\setminus M_2}(K)\subset\Phi_Q(K) \text{ и } \Phi_{M_1\setminus \bigcup\limits_{\beta<\Omega_\nu} M_1^{i_\beta}}(K)\subset\Phi_Q(K),$$

где M_1, $M_2\in\Delta(N)$.

Первое соотношение следует из леммы З. И. Козловой [1]. Чтобы доказать второе соотношение, будем рассуждать следующим образом. Пусть дано произвольное семейство множеств $(E_i)_{i\in I}$ класса K. Определим семейство множеств $(H_i)_{i\in I}$, положив $H_i=E_i$, если $i\neq i_\beta$ при любом $\beta<\Omega_\nu$; $H_i=\varnothing$, если $i=i_\beta$. Тогда

$$\Phi_{M_1\setminus \bigcup\limits_{\beta} M_1^{i_\beta}}\{E_i\}=\Phi_N\{H_i\} \text{ или } \Phi_{M_1\setminus \bigcup\limits_{\beta} M_1^{i_\beta}}\{E_i\}=\Phi_Q\{H_i\}.$$

Теорема 1. *Пусть* N — *жесткая база* $\Delta\Sigma$-*операции и* M — *база* $\Delta\Sigma$-*операции типа* R_N. *Пусть выполнены следующие условия*: а) $\underset{\tau}{\bigcup}\precsim M$; б) $(M^C, d)\precsim M^C$; в) *если* $L\in\Delta(N)$, *то* $L\precsim N$.

Тогда $M^{i_1,\dots,i_\beta,\dots}\precsim M$, *а операция* $\Phi_{M^{Ci_1,\dots,i_\beta,\dots}}$ *не сильнее операции* Φ_{M^C} *относительно любого класса множеств* $K\ni\varnothing$.

Доказательство. 1. Пусть $\Phi_M\equiv T_{\langle N_i\rangle}$, где $(N_i)_{i\in I}$ есть R_N-семейство баз. Базы семейства (N_i) получены сдвигами f_i базы N на попарно непересекающиеся цепи $(\eta^i)_{i\in I}$, где $0\in\eta^i$, $i\in\eta^i$, т. е. $N_i=f_i(N)$. Рассмотрим операцию $\Phi_{M^{i_1,\dots,i_\beta,\dots}}$, где $i_1,\dots,i_\beta,\dots$—произвольная последовательность индексов, имеющая тип Ω_ν.

а) Если ни одна T_N-цепь не содержит всех индексов $(i_\beta)_{\Omega_\nu}$, то $\Phi_{M^{i_1,\dots,i_\beta,\dots}}\{E_i\}=\varnothing$ для любого семейства множеств $(E_i)_{i\in I}$, т. е. в этом случае $M^{i_1,\dots,i_\beta,\dots}\precsim M$.

б) Пусть индексы $(i_\beta)_{\Omega_\nu}$ принадлежат хотя бы одной T_N-цепи. Некоторые из этих индексов могут быть попарно подчинены. Возьмем совокупность всех индексов, которым подчинены индексы $(i_\beta)_{\Omega_\nu}$, включая их самих. Рассмотрев порядковое подчинение индексов этой совокупности, получим некоторое дерево, корнем которого является нуль, а ветвями служат последовательности подчиненных друг другу индексов. При этом длина совершенно упорядоченных подцепей не более чем ω.

Пусть r_l является началом некоторой ветви, а $r_l, r_{l+1},\dots,r_{l+m}$ — подчиненные индексы, расположенные в порядке взаимного подчинения. Пусть $r^1_{l+m+1}, r^2_{l+m+1},\dots,r^\beta_{l+m+1},\dots$ $(\beta<\Omega_\nu)$ суть индексы, являющиеся началами новых ветвей дерева (в частности, число их может быть конечным). Положим $\underline{N}_{r_k}=N_{r_k}^{r_{k+1}}$ при $l\leqslant k<l+m$, $\underline{N}_{r_{l+m}}=N_{r_{l+m}}^{r^1_{l+m+1},\dots,r^\beta_{l+m+1},\dots}$, $\underline{N}_j=N_j$ в остальных случаях. Тогда $\Phi_{M^{i_1,\dots,i_\beta,\dots}}\{E_i\}=T_{\langle \underline{N}_j\rangle}\{E_i\}$, где $(E_i)_{i\in I}$ — произвольное семейство множеств.

Покажем, что $M^{i_1, \dots, i_\beta, \dots} \lessdot M$. В самом деле, если $r_{k+1} = f_{r_k}(j_{k+1})$, где $j_{k+1} \in I$, то $N_{r_k}^{r_{k+1}} = f_{r_k}(N^{j_{k+1}})$. Если $r^\beta_{l+m+1} = f_{r_{l+m}}(j^\beta_{l+m+1})$ при $\beta = 1, 2, \dots$, то $N_{r_{l+m}}^{(r^\beta_{l+m+1})_{\Omega_\nu}} = f_{r_{l+m}}(N^{(j^\beta_{l+m+1})_{\Omega_\nu}})$. Так как $N^{j_{k+1}} \in \Delta(N)$ и $N^{(j^\beta_{l+m+1})_{\Omega_\nu}} \in \Delta(N)$, то $N^{j_{k+1}} \lessdot N$ и $N^{(j^\beta_{l+m+1})_{\Omega_\nu}} \lessdot N$. Отсюда следует, что $T_{\langle \underline{N_j} \rangle} \lessdot T_N$, т. е. $M^{i_1, \dots, i_\beta, \dots} \lessdot M$.

2. Рассмотрим операцию $\Phi_{M^{C i_1, \dots, i_\beta, \dots}}$. Если индексы $(i_\beta)_{\Omega_\nu}$ не принадлежат ни одной цепи операции Φ_{M^C}, то $\Phi_{M^{C i_1, \dots, i_\beta, \dots}}\{E_i\} = \varnothing$ для любого семейства множеств $(E_i)_{i \in I}$. Следовательно, в данном случае $M^{C i_1, \dots, i_\beta, \dots} \lessdot M^C$. Если индексы $(i_\beta)_{\Omega_\nu}$ принадлежат хотя бы одной цепи базы M^C, то рассмотрим следующие случаи.

1) Индексы $(i_\beta)_{\Omega_\nu}$ принадлежат цепи $\eta_{j'} \in N^C_{j'}$ при некотором $j' \in I$. Так как мы рассматриваем только жесткие цепи, то это значит, что индекс $i_\beta \in \eta^\beta_{j'} \in N_{j'}$, причем если индекс $i_\alpha \in (i_\beta)_{\Omega_\nu}$ и $\alpha \neq \beta$, то $i_\alpha \overline{\in} \eta^\beta_{j'}$. Выпишем все индексы, которым подчинен индекс j': $r_1 = 0, r_2, \dots, r_s = j'$, где индекс r_k подчинен индексу r_m, если $1 \leqslant m < k \leqslant s$. Пусть

$$E_j^* = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } j = r_1, r_2, \dots, r_s, \\ E_j & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Положим

$$\underline{N}_j^C = \begin{cases} \left(N_{r_s} \diagdown \bigcup\limits_\beta N_{r_s}^{i_\beta}\right)^C, & j = r_s \\ N_j^C, & j \neq r_s. \end{cases}$$

Тогда $\Phi_{M^{C i_1, \dots, i_\beta, \dots}}\{E_j\} = \bigcap\limits_\beta E_{i_\beta} \bigcap T^C_{\langle \underline{N}_j^C \rangle}\{E_j^*\}$. На основании леммы $\Phi_{N_{r_s} \diagdown \bigcup\limits_\beta N_{r_s}^{i_\beta}}(K) \subset \Phi_N(K)$, где $K \ni \varnothing$. Тогда ([1], следствие теоремы 3.17.1) имеем $T^C_{\langle \underline{N}_j^C \rangle} \lessdot T^C_N$. Так как $T^C_{\langle N_j^C \rangle}(K) \supset K$, $\bigcap\limits_\tau \lessdot T^C_N$ и $(T^C_N, d) \lessdot T^C_N$, то получим, что $\Phi_{M^{C i_1, \dots, i_\beta, \dots}}(K) \subset \Phi_{M^C}(K)$.

2) Индексы $(i_\beta)_{\Omega_\nu}$ попарно не подчинены друг другу и имеют разный порядок подчинения нулю.

Рассмотрим совокупность данных индексов и индексов, которым они подчинены. Определим порядковое подчинение этих индексов. Получим дерево, корнем которого является нуль, а концевыми вершинами служат индексы данной последовательности $(i_\beta)_{\Omega_\nu}$.

Пусть $E_j^* = \varnothing$, если j принадлежит дереву и $j \overline{\in} (i_\beta)_{\Omega_\nu}$, а в остальных случаях $E_j^* = E_j$. По условию все индексы $(i_\beta)_{\Omega_\nu}$ принадлежат разным ветвям. Пусть $i_\alpha \in (i_\beta)_{\Omega_\nu}$. Обозначим через r^α индекс, которому непосредственно подчинен индекс i_α. Положим

$$\underline{N}_j^C = \begin{cases} (N_{r^\alpha} \diagdown N_{r^\alpha}^{i_\alpha})^C, & j = r^\alpha; \\ N_j^C & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда $\Phi_{M^{Ci_1,\ldots,i_\beta,\ldots}}\{E_j\}=\bigcap_\beta E_{i_\beta}\bigcap T^C_{\langle N_j^C\rangle}\{E_j^*\}$, откуда следует, как в первом случае, что если $K\ni\varnothing$, то $\Phi_{M^{Ci_1,\ldots,i_\beta,\ldots}}(K)\subset\Phi_{M^C}(K)$.

Другие возможные случаи представляют собой комбинацию этих двух случаев. Таким образом, $\Phi_{M^{Ci_1,\ldots,i_\beta,\ldots}}$ не сильнее Φ_{M^C} относительно любого класса множеств $K\ni\varnothing$. Аналогичным образом доказывается

Теорема 1'. *Пусть N — жесткая база $\Delta\Sigma$-операции и Φ_M есть операция типа R_N. Пусть выполнены следующие условия*: а) $\bigcup_\tau\lesssim M$; б) $(M^C, d)\lesssim M^C$; в*) $R_{R_N}\lesssim R_N$; г*) *из того, что $L\in\Delta(N)$, следует, что $L\lesssim M$.*

Тогда $M^{i_1,\ldots,i_\beta,\ldots}\lesssim M$, а операция $\Phi_{M^{Ci_1,\ldots,i_\beta,\ldots}}$ не сильнее операции Φ_{M^C} относительно любого класса множеств $K\ni\varnothing$.

Теорема 2. *Пусть N и N^C — жесткие базы $\Delta\Sigma$-операции и Φ_{M_α} есть операция типа R_N^α, где $0\leqslant\alpha<\Omega_{\nu+1}$. Пусть база N удовлетворяет по отношению к классу множеств $K\ni\varnothing$, $\mathfrak{N}$ следующим условиям*: а) *операции типа R_N сильнее операций Φ_{N^C}, $\bigcup_\tau$ и $\bigcap_\tau$ относительно класса множеств K*; б) *операции типа (N, d) равносильны операции Φ_N относительно класса множеств K, и операции типа (N^C, d) равносильны операции Φ_{N^C} относительно того же класса*; в) *если $L\in\Delta(N)$, то $L\lesssim N$.*

Тогда операция $\Phi_{M_{\alpha+1}^{i_1,\ldots,i_\beta,\ldots}}$ (а также операция $\Phi_{M_0^{i_1,\ldots,i_\beta,\ldots}}$) не сильнее операции $\Phi_{M_{\alpha+1}}$ (соответственно операции Φ_{M_0}) относительно любого класса множеств $K\ni\varnothing$, $\mathfrak{N}$, а $\Phi_{M_\alpha^{Ci_1,\ldots,i_\beta,\ldots}}$ не сильнее $\Phi_{M_\alpha^C}$ относительно тех же классов.

Доказательство. Так как N — жесткая база $\Delta\Sigma$-операции, удовлетворяющая условиям а)—в), то в силу теоремы 1 $M_0^{i_1,\ldots,i_\beta,\ldots}\lesssim M_0$, где Φ_{M_0} есть операция типа R_N^0. На основании теоремы 1 $\Phi_{M_0^{Ci_1,\ldots,i_\beta,\ldots}}$ не сильнее $\Phi_{M_0^C}$ относительно класса множеств $K\ni\varnothing$, $\mathfrak{N}$. Это значит, что $\Delta(M_0^C)$ таково, что если $L\in\Delta(M_0^C)$, то Φ_L не сильнее $\Phi_{M_0^C}$ относительно любого класса множеств $K\ni\varnothing$, $\mathfrak{N}$. Базы операций $\Phi_{M_0}\equiv T_{\langle N_i\rangle}$ и $\Phi_{M_0^C}\equiv T^C_{\langle N_i^C\rangle}$ могут быть взяты жесткими ([6], [1]).

Допустим, что операция $\Phi_{M_{\alpha+1}^{i_1,\ldots,i_\beta,\ldots}}$ не сильнее $\Phi_{M_{\alpha+1}}$ и операция $\Phi_{M_{\alpha+1}^{Ci_1,\ldots,i_\beta,\ldots}}$ не сильнее $\Phi_{M_{\alpha+1}^C}$ относительно класса множеств $K\ni\varnothing$, $\mathfrak{N}$, где $\alpha<\Omega_{\nu+1}$. Базы $M_{\alpha+1}$ и $M_{\alpha+1}^C$ можно взять жесткими. Это значит, что $\Delta(M_{\alpha+1}^C)$ удовлетворяет условию **в**). Тогда на основании теоремы 1 операция $\Phi_{M_{\alpha+2}^{i_1,\ldots,i_\beta,\ldots}}$ не сильнее $\Phi_{M_{\alpha+2}}$, а операция $\Phi_{M^{Ci_1,\ldots,i_\beta,\ldots}_{\alpha+2}}$ не сильнее $\Phi_{M^C_{\alpha+2}}$ относительно класса множеств $K \ni \varnothing, \mathfrak{N}$.

Допустим, что утверждение верно для всех $\alpha < \gamma$, где γ — предельное трансфинитное число, меньшее $\Omega_{\nu+1}$. Пусть $(\alpha_i) \to \gamma$, где $\alpha_i < \gamma$. Тогда $\Phi_{M^{Ci_1,\ldots,i_\beta,\ldots}_\gamma}\{E_j\} = \bigcup_{\alpha_i<\gamma} \Phi_{M^{Ci_1,\ldots,i_\beta,\ldots}_{\alpha_i}}\{E_j\}$. Так как в силу допущения операция $\Phi_{M^{Ci_1,\ldots,i_\beta,\ldots}_{\alpha_i}}$ не сильнее $\Phi_{M^C_{\alpha_i}}$ относительно класса множеств $K \ni \varnothing, \mathfrak{N}$, то $\Phi_{M^{Ci_1,\ldots,i_\beta,\ldots}_\gamma}(K) \subset \bigcup_{\alpha_i<\gamma} \Phi_{M^C_{\alpha_i}}(K) = \Phi_{M^C_\gamma}(K)$, т. е. операция $\Phi_{M^{Ci_1,\ldots,i_\beta,\ldots}_\gamma}$ не сильнее $\Phi_{M^C_\gamma}$ относительно класса $K \ni \varnothing, \mathfrak{N}$. Если все операции $\Phi_{M^C_{\alpha_i}}$ и операция объединения семейства множеств, когда мощность семейства не более τ, имеют жесткие базы, то и итерация этих операций имеет жесткие базы ([6], [1]). Следовательно, базу M^C_γ можно считать жесткой. Это значит, что $\Delta(M^C_\gamma)$ удовлетворяет условию в). Каждая из баз M_α и M^C_α при $\alpha < \Omega_{\nu+1}$ удовлетворяет условиям а), б) (см. [1], часть II, § 2). Так как $R_{M^C_\gamma} \equiv \Phi_{M_{\gamma+1}}$, то, используя теорему 1, получим, что операция $\Phi_{M^{i_1,\ldots,i_\beta,\ldots}_{\gamma+1}}$ не сильнее $\Phi_{M_{\gamma+1}}$, а операция $\Phi_{M^{Ci_1,\ldots,i_\beta,\ldots}_{\gamma+1}}$ не сильнее $\Phi_{M^C_{\gamma+1}}$ относительно класса множеств $K \ni \varnothing, \mathfrak{N}$.

Таким образом, для всякого числа $\alpha < \Omega_{\nu+1}$, операция $\Phi_{M^{i_1,\ldots,i_\beta,\ldots}_{\alpha+1}}$ (операция $\Phi_{M^{i_1,\ldots,i_\beta,\ldots}_0}$) не сильнее операции $\Phi_{M_{\alpha+1}}$ (операции Φ_{M_0}) относительно любого класса множеств $K \ni \varnothing, \mathfrak{N}$, а $\Phi_{M^{Ci_1,\ldots,i_\beta,\ldots}_\alpha}$ не сильнее $\Phi_{M^C_\alpha}$ относительно тех же классов множеств. Теорема доказана. Аналогично доказывается

Теорема 2′. *Пусть N и N^C — жесткие базы $\Delta\Sigma$-операции и Φ_{M_α} есть операция типа R^α_N, где $0 \leqslant \alpha < \Omega_{\nu+1}$. Пусть база N удовлетворяет по отношению к классу множеств $K \ni \varnothing, \mathfrak{N}$ следующим условиям:* а) *операции типа R_N сильнее операций Φ_{N^C}, $\bigcup_\tau$ и $\bigcap_\tau$ относительно класса множеств K;* б*) $(R^C_N, d) \lessdot R^C_N$; в*) $R_{R_N} \lessdot R_N$; г*) *если $L \in \Delta(N)$, то $L \lessdot M$.*

Тогда операция $\Phi_{M^{i_1,\ldots,i_\beta,\ldots}_{\alpha+1}}$ (а также операция $\Phi_{M^{i_1,\ldots,i_\beta,\ldots}_0}$) не сильнее операции $\Phi_{M_{\alpha+1}}$ (соответственно операции Φ_{M_0}) относительно любого класса множеств $K \ni \varnothing, \mathfrak{N}$, а операция $\Phi_{M^{Ci_1,\ldots,i_\beta,\ldots}_\alpha}$ не сильнее операции $\Phi_{M^C_\alpha}$ относительно тех же классов.

Если исходная операция $\Phi_N \equiv \bigcup_\tau$, то R^α_N-операция обозначается R^α.

Следствие. Если $\tau = \aleph_0$ и в качестве базы $\bigcup$-операции взята жесткая база, то при любом $\alpha < \Omega$ операция $\Phi_{M^{i_1,\ldots,i_n,\ldots}_{\alpha+1}}$ (а также операция $\Phi_{M_0^{i_1, \ldots, i_n, \ldots}}$) не сильнее операции $\Phi_{M_{\alpha+1}}$ (соответственно операции Φ_{M_0}) относительно класса множеств $K \ni \varnothing$, $\mathfrak{N}$, а $\Phi_{M_\alpha^{Ci_1, \ldots, i_n, \ldots}}$ не сильнее $\Phi_{M_\alpha^C}$ относительно того же класса, где Φ_{M_α} есть операция типа R^α с жесткой базой.

Действительно, если N — жесткая база $\bigcup$-операции, то N удовлетворяет условиям а), б*), в*) [3]; $\Delta(N)$ есть d-система, удовлетворяющая условию г*). Тогда для операций R^0, $R^{\alpha+1}$ и $R^{\alpha C}$ при любом числе $\alpha < \Omega$ будут справедливы теоремы 1, 1′, 2, 2′.

Из изложенных здесь результатов следует, что теоремы о кратной отделимости, доказанные в работе [7], имеют место для случая R-операции с пространством индексов мощности τ при условии, что рассматриваются R-множества, построенные с помощью таких же R-операций.

г. Волгоград

Поступило
19 VIII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлова З. И. Теория операций над множествами и дескриптивная теория множеств. М., „Наука“, 1967.

2. Ляпунов А. А. Об операциях над множествами. В кн.: Алгебра и логика, т. 2, вып. 2, Изд. СО АН СССР, 1963, с. 47—56.

3. Ляпунов А. А. Об операциях над множествами, допускающих трансфинитные индексы. Тр. Моск. матем. о-ва, т. 6, 1957, с. 195—230.

4. Канторович Л. В., Ливенсон Е. М. Memoir on the analytical operations and projective sets, I. Fundam. math., v. 18, 1932, p. 214—271.

5. Очан Ю. С. О переместимости δs-операций. Матем. сб., т. 10 (52) : 3, 1942, с. 151—163.

6. Ляпунов А. А. О признаках вырождения для R-множеств. ИАН СССР. Сер. матем., т. 17, № 6, 1953, с. 563—578.

7. Ляпунов А. А. О кратной отделимости для δs-операций. ДАН СССР, т. 53, № 5, 1946, с. 399—402.