В. Н. Старовойтов, Об однозначной разрешимости линейной параболической задачи с нелокальными по времени данными,
*Сиб. матем. журн.*, 2021, том 62, номер 2, 417–421

https://www.mathnet.ru/smj7564

*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2021. Том 62, № 2*

*УДК 517.954*

# ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ПО ВРЕМЕНИ ДАННЫМИ

**В. Н. Старовойтов**

**Аннотация.** Рассматривается задача для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве. Вместо начальных данных задано условие, включающее интеграл от решения по всему интервалу времени, на котором решается задача. Доказано, что задача имеет единственное решение на произвольном интервале времени, при этом на некоторые данные задачи наложено условие типа положительности.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.212

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве, нелокальные по времени данные, единственность решения, разрешимость.

## 1. Введение

Пусть $A$ и $B$ — самосопряженные положительные (аккретивные) операторы в гильбертовом пространстве $H$. Поскольку мы будем иметь дело со спектрами операторов, удобнее считать, что $H$ — комплексное гильбертово пространство. Оператор $A$ может быть неограниченным, и его область определения $\mathscr{D}(A)$, конечно, плотна в $H$, что необходимо для его самосопряженности. Оператор $B$ ограниченный и $\mathscr{D}(B) = H$.

Пусть $t$ — вещественная переменная, которую будем называть *временем* и которая изменяется на отрезке $[0,T]$, $T < \infty$. В данной работе рассмотрим задачу об определении функции $u : [0,T] \to H$, удовлетворяющей в $H$ следующим уравнениям:

$$\frac{du}{dt} + Au = f, \tag{1}$$

$$u(0) + \int_0^T \gamma(t)\, Bu(t)\, ds = g, \tag{2}$$

где функции $f : [0,T] \to H$ и $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}$, а также $g \in H$ предполагаются заданными. Все результаты, полученные в данной работе, справедливы также, если в условии (2) стоит не интеграл по $t$, а сумма:

$$u(0) + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k\, Bu(t_k) = g,$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_k \in \mathbb{R}$, $t_k \in (0,T]$ для всех $k = 1,\dots,n$. При этом формулировки теорем необходимо соответствующим образом изменить.

Задачам типа (1), (2) посвящены многочисленные работы (см. [1–9] и библиографию в них). В силу небольшого размера статьи не будем приводить подробный обзор работ, где изучаются задачи с нелокальными по времени данными.

Оператор $A$ порождает в пространстве $H$ сильно непрерывную (и даже аналитическую) полугруппу операторов $e^{-At}$. Если введем обозначение $\eta = u(0)$, то, как следует из (1),

$$u(t) = e^{-At}\eta + \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s)\, ds \quad \text{при } t \in [0, T]. \tag{3}$$

Учитывая это представление, задачу (1), (2) можно переписать в виде следующего уравнения:

$$\eta + S\eta = F, \tag{4}$$

где

$$S\eta = \int_0^T \gamma(t)\, B\, e^{-At}\eta\, dt, \quad F = g - \int_0^T \gamma(t)\, B \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s)\, ds dt.$$

Если $\gamma \in L^1(0,T)$, то $S$ является ограниченным оператором в $H$. Если дополнительно $f \in L^1(0,T;H)$, то $F \in H$. Таким образом, при выполнении этих условий можно рассматривать (4) как уравнение в пространстве $H$. Кроме того, функция $u : [0,T] \to H$, определенная равенством (3), непрерывна. Если потребовать от функций $\gamma$ и $f$ большей гладкости, то получим дифференцируемость функции $u$ и эквивалентность задач (1), (2) и (4). В связи с этим назовем *обобщенным решением задачи* (1), (2) непрерывную функцию $u : [0,T] \to H$, для которой справедливо представление (3), где $\eta \in H$ является решением уравнения (4).

Уравнение (4) однозначно разрешимо для произвольного $F \in H$ тогда и только тогда, когда $-1$ является регулярным значением оператора $S$. Это заведомо будет так, если $\|S\| < 1$. Последнее условие достаточно для однозначной разрешимости задачи, но оно предполагает наличие некоторого ограничения на величину $T$ при заданных $\gamma$ и $B$. Фактически получается только локальная однозначная разрешимость задачи. Заметим, что условие малости встречается во всех работах по данной тематике, где для доказательства разрешимости используются теоремы о неподвижных точках (см. [1, 2, 6–9]). Использование этих теорем оправдано в нелинейных задачах, однако, как видно из предыдущих рассуждений, локальность получаемого решения связана не только с нелинейностью задачи.

В данной работе исследован вопрос однозначной разрешимости задачи без наложения на $T$, $B$ и $\gamma$ условия малости. Исчерпывающий ответ на поставленный вопрос в случае, когда $B$ является тождественным оператором, получен в [4, 5]. В [5] показано, что нетривиальных решений однородного уравнения (4) с $B = I$ не существует, если ни одно из решений $\lambda$ характеристического уравнения

$$1 + \int_0^T \gamma(t)\, e^{-\lambda t}\, dt = 0$$

не принадлежит точечному спектру оператора $A$, который предполагается просто замкнутым. Это условие, в частности, выполнено, если $A$ — симметрический оператор, а функция $\gamma$ неотрицательна. В этом случае собственные числа оператора $A$ вещественны, а характеристическое уравнение не имеет вещественных решений. Рассуждения в [5] не годятся для случая отличного от тождественного оператора $B$.

## 2. Однозначная разрешимость задачи

Для нормы элемента гильбертова пространства $H$ и нормы ограниченного оператора в $H$ будем использовать одно и то же обозначение $\|\cdot\|$, что не должно привести к путанице. Через $(\cdot,\cdot)$ будем обозначать скалярное произведение в $H$. Если $G$ — какой-либо ограниченный оператор на $H$, то $\sigma(G)$ — его спектр. Основным результатом данной работы является доказательство следующего утверждения.

**Теорема 1.** *Пусть $A$ и $B$ — самосопряженные положительные операторы в гильбертовом пространстве $H$, причем оператор $B$ ограниченный. Если $\gamma$ — неотрицательная функция из $L^1(0,T)$, то для произвольных $f\in L^1(0,T;H)$ и $g\in H$ задача* (1), (2) *имеет единственное обобщенное решение.*

Доказательство. Достаточно показать, что $-1\notin\sigma(S)$. Сначала заметим, что $S=BG$, где $G\eta=\int\limits_0^T\gamma(t)\,e^{-At}\eta\,dt$ для всех $\eta\in H$. Нетрудно видеть, что $G$ является ограниченным самосопряженным положительным оператором на $H$, поэтому существует единственный ограниченный положительный оператор $E$ такой, что $E^2=G$. Согласно лемме Якобсона [10, задача № 61]

$$\sigma(BG)\cup\{0\}=\sigma(BEE)\cup\{0\}=\sigma(EBE)\cup\{0\}.$$

В силу положительности $B$ оператор $EBE$ тоже положительный, откуда следует, что $\sigma(EBE)\subset[0,+\infty)$. Таким образом, $\sigma(S)=\sigma(BG)\subset[0,+\infty)$, и теорема доказана. $\square$

В представленном доказательстве можно было бы использовать квадратный корень из оператора $B$, а не $G$.

При доказательстве единственности решения в теории дифференциальных уравнений обычно используют метод скалярного умножения уравнения на разность двух решений. Этот метод не всегда работает и в нашем случае дает более слабый результат, чем теорема 1. В самом деле, для доказательства единственности обобщенного решения задачи (1), (2) необходимо показать, что однородное уравнение $\eta+S\eta=0$ имеет в $H$ только нулевое решение. Будем действовать от противного. Предположим, что это уравнение имеет ненулевое решение $\eta$, и попытаемся прийти к противоречию. Умножив уравнение скалярно в $H$ на $\eta$, получим, что $\|\eta\|^2+(S\eta,\eta)=0$. Это соотношение означает, что $-1\in W(S)$, где $W(S)=\{(S\eta,\eta)\mid \eta\in H,\ \|\eta\|=1\}$ — числовой образ оператора $S$. Вообще говоря, нахождение числового образа оператора является сложной задачей, тем более что у нас $S$ не является ни самосопряженным, ни даже нормальным оператором. Однако можно заметить, что $\|\eta\|$ — вещественное число, поэтому $(S^*\eta,\eta)=(\eta,S\eta)=\overline{(S\eta,\eta)}=-\|\eta\|^2$, где $S^*$ — сопряженный к $S$ оператор, а черта означает комплексное сопряжение. Таким образом, $((S+S^*)\eta,\eta)=-2\|\eta\|^2$, т. е. $-2\in W(S+S^*)$. Оператор $S+S^*$ уже является самосопряженным, и поэтому для выпуклой оболочки его спектра имеем следующее равенство: $\operatorname{conv}\sigma(S+S^*)=\overline{W(S+S^*)}$ [10, задача № 171], т. е. для получения противоречия необходимо показать, что $-2 < \inf \sigma(S + S^*)$, однако имеющихся сведений об операторе $S$ недостаточно для справедливости этого неравенства. Даже если известно, что спектр оператора $S$ вещественный и неотрицательный, что гарантирует единственность решения, это неравенство может не выполняться. Действительно, рассмотрим простой пример с матрицей $2 \times 2$. Пусть $\beta$ — положительное вещественное число и

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $\sigma(S_0) = \sigma(S_0^*) = \{1\} \subset [0, \infty)$ и $\sigma(S_0 + S_0^*)$ состоит из вещественных чисел $\lambda$, являющихся решением квадратного уравнения $(1-\lambda)^2 - \beta^2 = 0$. Поэтому для любого вещественного числа $\lambda_0$, увеличивая $\beta$, можно добиться того, что будет выполняться неравенство $\inf \sigma(S_0 + S_0^*) < \lambda_0$. Для того чтобы было справедливо неравенство $\inf \sigma(S_0 + S_0^*) > -2$, нужно наложить ограничение на величину числа $\beta$. Это ограничение фактически соответствует тому, что $\|S_0\| < 1$ — неравенство, которое ранее уже упоминалось.

В теореме 1 для получения однозначной разрешимости задачи (1), (2), а точнее, уравнения (4) использовалась положительность как функции $\gamma$, так и операторов $A$ и $B$. На самом деле если $e^{-At}$ является компактным оператором при $t > 0$, то от положительности можно отказаться и доказать однозначную разрешимость задачи в более общей постановке. Во-первых, будем считать, что $H$ является не гильбертовым, а банаховым пространством. Далее, предположим, что $u$ удовлетворяет (1) и следующему условию:

$$\alpha\, u(0) + \int_0^T \gamma(t)\, Bu(t)\, ds = g, \tag{5}$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$, функции $f : [0,T] \to H$ и $\gamma : [0,T] \to \mathbb{C}$, а также $g \in H$ предполагаются заданными.

**Теорема 2.** *Пусть оператор $A$ генерирует компактную полугруппу $e^{-At}$ в банаховом пространстве $H$, $B$ — ограниченный оператор в $H$ и $\gamma \in L^1(0,T)$. Тогда существует такое множество $\Gamma \subset \mathbb{C}$, что для каждого $\delta > 0$ множество $\{z \in \Gamma \mid |z| > \delta\}$ является конечным, и для произвольных $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, $f \in L^1(0,T;H)$ и $g \in H$ задача (1), (5) имеет единственное обобщенное решение.*

Доказательство. Поскольку оператор $e^{-At}$ компактен при $t > 0$, компактным будет и оператор $\int_0^T \gamma(t) e^{-At}\, dt$. Это следует из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Тем самым в силу ограниченности $B$ оператор $S = B \int_0^T \gamma(t) e^{-At}\, dt$ тоже компактен. Следовательно, спектр $\sigma(S)$ оператора $S$ состоит из нуля и множества ненулевых собственных значений конечной кратности, которое не имеет ненулевых предельных точек. Отсюда следует утверждение теоремы с $\Gamma = -\sigma(S)$. $\square$

Множество $\Gamma$, о котором идет речь в теореме 2, можно описать точно лишь в исключительных случаях. Однако эта теорема позволяет заключить, что задача (1), (5) однозначно разрешима для некоторого $\alpha$ из сколь угодно малой окрестности любого числа из $\mathbb{C}$. Условие компактности оператора $e^{-At}$ выполняется во многих конкретных задачах, например, если $A$ — оператор Лапласа с однородными условиями Дирихле в ограниченной области в $\mathbb{R}^n$.

## *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Шелухин В. В.* Задача со средними по времени данными для нелинейных параболических уравнений // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 2. С. 154–165.
**2.** *Шелухин В. В.* Вариационный принцип в нелокальных по времени задачах для линейных эволюционных уравнений // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 2. С. 191–207.
**3.** *Pao C. V.* Reaction diffusion equations with nonlocal boundary and nonlocal initial conditions // J. Math. Anal. Appl. 1995. V. 195, N 3. P. 702–718.
**4.** *Тихонов И. В.* О разрешимости задачи с нелокальным интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 6. С. 841–843.
**5.** *Тихонов И. В.* Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений // Изв. РАН. Сер. мат. 2003. Т. 67, № 2. С. 133–166.
**6.** *Кожанов А. И.* Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 1. С. 51–60.
**7.** *Кожанов А. И.* Разрешимость краевых задач для линейных параболических уравнений в случае задания интегрального по временной переменной условия // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 4. С. 20–30.
**8.** *Уварова М. В.* О некоторых нелокальных краевых задачах для эволюционных уравнений // Мат. труды. 2010. Т. 13, № 2. С. 179–207.
**9.** *Buhrii O., Buhrii N.* Nonlocal in time problem for anisotropic parabolic equations with variable exponents of nonlinearities // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 473, N 2. P. 695–711.
**10.** *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970.

*Поступила в редакцию 20 июля 2020 г.*
*После доработки 20 июля 2020 г.*
*Принята к публикации 9 октября 2020 г.*

Старовойтов Виктор Николаевич
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
`starovoitov@hydro.nsc.ru`