В доказательстве этой теоремы используется следствие 1 для компактов $(\beta X)^n$, где βX – компактификация Стоуна–Чеха пространства X.

Ранее в [10] теорема 2 была доказана для компактного X с использованием СН.

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР
Москва

Поступило
15 X 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Евстигнеев И.В.* – ДАН, 1985, т. 283, № 5, с. 1065–1068. 2. *Евстигнеев И.В.* – ДАН, 1978, т. 238, № 1, с. 11–14. 3. *Янков В.* – ДАН, 1941, т. 30, № 7, с. 591–592. 4. *Левин В.Л.* Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике. М.: Наука, 1985. 352 с. 5. *Ionescu Tulcea A., Ionescu Tulcea C.* Topics in the theory of lifting. B.; Heidelberg; N.Y.: Springer, 1969. 6. *Graf S.* In: Measure theory. Proc. conf. Oberwolfach, 1979. Lect. Notes in Math., vol. 794. B.; Heidelberg; N.Y.: Springer, 1980, p. 117–140. 7. *Losert V.* Ibid., p. 153–159. 8. *Talagrand M.* – C.R., Sér. A, 1978, vol. 286, p. 1183–1185. 9. *Левин В.Л.* – ДАН, 1984, т. 276, № 5, с. 1059–1064. 10. *Левин В.Л., Милютин А.А.* – УМН, 1979, т. 34, № 3, с. 3–68.

УДК 519.21 МАТЕМАТИКА

Н.В. СМОРОДИНА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ НА ИЗМЕРИМЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И УСЛОВИЯ ГЛАДКОСТИ ПЛОТНОСТЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

(Представлено академиком Ю.В. Прохоровым 28 VI 1985)

1. Пусть f: $\Omega \to \mathbf{R}$ – случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Во многих задачах теории вероятностей важно иметь условия гладкости (и существования) плотности ее распределения Pf^{-1}. Интерес к этой задаче в последнее время связан с так называемым исчислением Маллявена, с помощью которого она решается для образов гауссовских мер под действием винеровских функционалов (см. [1]). Для дифференцируемых в смысле [2] мер в банаховых пространствах аналогичная задача другими методами рассматривалась в [3].

В настоящей работе строится дифференциальное исчисление функций и мер на произвольном измеримом пространстве $(\Omega, \mathfrak{F})$. Это исчисление применяется затем для получения условий гладкости плотности. Мы рассматриваем меру Pf^{-1} как обобщенную функцию и даем условия принадлежности ее одному из классов $\bar{W}_1^l$, $l \geqslant 1$, обобщенных функций, l-я производная которых – конечная мера. Об этих классах см. [4]. Отметим, что мерами мы называем не обязательно положительные счетно-аддитивные функции.

2. Частичное отображение D: $\mathbf{R}^\Omega \to \mathbf{R}^\Omega$ с областью определения $\operatorname{dom} D$ назовем дифференциальным оператором (первого порядка), если: 1) множество $\operatorname{dom} D$ замкнуто относительно гладких суперпозиций, т.е. для любого $n \geqslant 1$, любой функции φ: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ класса C^∞ и любых $g_1, \ldots, g_n \in \operatorname{dom} D$ отображение $\varphi(g_1, \ldots, g_n) \in$

$\in \operatorname{dom} D$; 2) справедливо обычное правило дифференцирования суперпозиции $D\varphi(g_1, \ldots, g_n) = \sum \partial_i \varphi(g_1, \ldots, g_n) Dg_i$.

Множества $\operatorname{dom}(D^k)$, $k \geqslant 1$, будем обозначать также $C_k = C_k(D)$. По определению $C_0(D) = \mathbf{R}^\Omega$.

Каждое сюръективное отображение ξ: $\tilde{\Omega} \to \Omega$ "переносит" дифференциальные операторы. Именно, на множестве $\operatorname{dom} D \circ \xi = \{g \circ \xi \mid g \in \operatorname{dom} D\}$ определен дифференциальный оператор $D \circ \xi$, действующий по формуле $(D \circ \xi)(g \circ \xi) = Dg \circ \xi$.

В примерах, рассматриваемых ниже, $\operatorname{dom} D$ содержится в пространстве $\mathcal{L}_0(\mathfrak{F})$ случайных величин на $(\Omega, \mathfrak{F})$, а сам оператор D не различает совпадающие $(\operatorname{mod} P)$ функции.

Пусть L – линейный функционал с областью определения $\operatorname{dom} L \subset \mathbf{R}^\Omega$. Его D-производной назовем линейный функционал DL с областью определения $\operatorname{dom} DL = \{g \in \operatorname{dom} D \mid Dg \in \operatorname{dom} L\}$, задаваемый формулой $(DL)(g) = -L(Dg)$. Очевидно, что $\operatorname{dom}(D^k L) = \{g \in \operatorname{dom}(D^k) \mid D^k g \in \operatorname{dom} L\}$ и $(D^k L)(g) = (-1)^k L(D^k g)$. Кроме того, $(D \circ \xi)(L \circ \xi) = DL \circ \xi$.

Введем необходимые для дальнейшего пространства линейных функционалов. Выбранные для них обозначения аналогичны используемым в теории обобщенных функций (см. [4]). Пусть $S \subset \mathbf{R}^\Omega$ – линейное множество. Будем говорить, что $L \in \bar{W}^0(S) = \bar{W}^0(D \mid S)$, если $\operatorname{dom} D \supset S$ и на S функционал L задается формулой $L(g) = \int g \, d\mu$, где μ – некоторая мера (представляющая мера для L), определяемая, вообще говоря, не однозначно. Более общим образом, пусть $S_0, \ldots, S_k$ – линейные подмножества $C_0(D), \ldots, C_k(D)$ соответственно, причем $DS_j \subset S_{j-1}$, $j = 1, \ldots, k$. Будем говорить, что $L \in \bar{W}^k(S_0, \ldots, S_k) = \bar{W}^k(D \mid S_0, \ldots, S_k)$, если $D^j L \in \bar{W}^0(D \mid S_j)$, $j = 0, \ldots, k$. При этом соотношения $\int Dg \, d\mu_{j-1} = -\int g \, d\mu_j$, $g \in S_j$, где μ_j – представляющая мера для $D^j L$, можно называть формулами интегрирования по частям. Если $L \in \bar{W}^k(D \mid S_0, \ldots, S_k)$, то $L \circ \xi \in \bar{W}^k(D \circ \xi \mid S_0 \circ \xi, \ldots, S_k \circ \xi)$.

Пример 1. Пусть $(X, \mathfrak{A})$ – еще одно измеримое пространство и для каждого $\epsilon \geqslant 0$ определено измеримое отображение G_ϵ: $\Omega \to X$, причем G_0 сюръективно. Определим $\tilde{C}_1 = \{\tilde{g}$: $X \to \mathbf{R} \mid$ при P-почти всех $\omega \in \Omega$ отображение $\epsilon \mapsto \tilde{g} \circ G_\epsilon(\omega)$ дифференцируемо в точке $\epsilon = 0\}$ и $(L_2)\tilde{C}_1$ аналогичным образом, понимая дифференцирование в смысле $L_2(P)$. Положим также $C_1 = \tilde{C}_1 \circ G_0$, $(L_2) C_1 = (L_2) \tilde{C}_1 \circ G_0$. Рассмотрим дифференциальный оператор D на C_1, действующий по формуле $D(\tilde{g} \circ G_0) = (\tilde{g} \circ G_\epsilon)'_{\epsilon=0}$.

Предложение 1. *Предположим, что меры PG_ϵ^{-1} на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ абсолютно непрерывны относительно PG_0^{-1}, а отображение $\epsilon \mapsto dPG_\epsilon^{-1}/dPG_0^{-1}$ $L_2(PG_0^{-1})$-дифференцируемо в точке $\epsilon = 0$.*

Тогда $P \in \bar{W}^1(D \mid L_1(P), L_2(P) \cap C_1 \cap (L_2) C_1)$.

В только что описанную схему укладываются известное преобразование Гирсанова, рассматривавшееся М. Бисмутом [5], и ряд примеров Ю.А. Давыдова [6].

Пример 2. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, состоящее из центрированных гауссовских величин на $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, со скалярным произведением $\langle X_1, X_2 \rangle = \mathbf{E} X_1 X_2$, $Y = (Y_1, Y_2, \ldots)$ – вспомогательная последовательность случайных величин на том же пространстве, независимых с H, $\mathfrak{F}_0 = \sigma(H, Y)$ – соответствующая σ-алгебра. Если $e = (e_1, e_2, \ldots)$ – ортонормированный базис в H, то $\mathfrak{F}_0$ порождается величинами e и Y, а потому каждая $\mathfrak{F}_0$-измеримая случайная величина f допускает представление $f(\omega) = f_e(e(\omega), Y(\omega))$, где f_e: $\mathbf{R}^\infty \times \mathbf{R}^\infty \to \mathbf{R}$ – борелевская функция, зависящая от выбора базиса e.

Ниже мы рассматриваем пространства функций со значениями в сепарабель-

ном гильбертовом пространстве Φ и в гильбертовых пространствах $\mathcal{L}^j_{(2)}(H, \Phi)$ линейных отображений Гильберта – Шмидта на H со значениями в Φ.

Зафиксируем набор чисел $p = (p(0), \ldots, p(r))$, $p(j) \geqslant 1$, $j = 0, \ldots, r$, и назовем функцию $u \in L_{p(0)}(\Omega, \mathfrak{F}_0, P, \Phi)$ H^p-дифференцируемой, если для любой возрастающей последовательности $\{Q_n\}$ конечномерных ортопроекторов в H, сильно сходящейся к тождественному оператору, найдется последовательность функций $\{u_n\}$, сходящаяся к u в $L_{p(0)}$ и обладающая свойствами:

1) для каждого ортобазиса e в H, начальные отрезки которого являются базисами в Q_nH при $n = 1, 2, \ldots$, отображения $h \mapsto u_{n,e}(e_1(\omega) + \langle e_1, h\rangle, \ldots, e_{d(n)}(\omega) + \langle e_{d(n)}, h\rangle, e_{d(n)+1}(\omega), \ldots, Y(\omega))$, $h \in Q_nH$, $d(n) = \dim Q_nH$, P-почти всюду r-кратно непрерывно дифференцируемы по Фреше (значение j-й производной в точке $h = 0$ мы обозначаем $u_n^{(j)}(\omega)$);

2) для каждого $j = 1, \ldots, r$ последовательность функций $\omega \mapsto u_n^{(j)}(\omega)(Q_n \cdot, \ldots, Q_n \cdot)$ сходится в $L_{p(j)}(\Omega, \mathfrak{F}_0, P, \mathcal{L}_2^{(j)}(H, \Phi))$.

Пределы указанных последовательностей будем называть производными функции u в смысле H^p и обозначать $u^{(j)}$. Они не зависят от выбора последовательностей $\{Q_n\}$ и $\{u_n\}$.

Далее, назовем функцию $u \in L_0(\Omega, \mathfrak{F}, P, \Phi)$ PH^p-дифференцируемой, если найдутся возрастающая последовательность $\{A_n\}$ $\mathfrak{F}_0$-измеримых множеств и последовательность $\{u_n\}$ H^p-дифференцируемых функций такие, что $P(A_n) \to 1$ и ограничения u и u_n на множество A_n совпадают при каждом n. Нетрудно проверить, что при этом последовательности производных $\{u_n^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$, $j = 1, \ldots, r$, сходятся P-почти всюду. Их пределы мы будем называть производными функции в смысле PH^p и по-прежнему обозначать $u^{(j)}$.

Для последующих формулировок определим вспомогательные наборы чисел. Пусть $r \geqslant 1$, $l > r$ – четное число. Положим $q = (l, \ldots, l)$ – набор длины $r + 1$ и $q(i) = (l/(l-i), \ldots, l/(l-i))$ – набор длины $i + 1$, $i = 1, \ldots, r$.

Пусть теперь K: $\Omega \to H$ – $\mathfrak{F}_0$-измеримая функция. Определим дифференциальный оператор D на множестве $\operatorname{dom} D = PH^{1,1}$ формулой $Dg = \langle g', K\rangle$.

Теорема 1. *Если $K \in H^q$, то $P \in \bar{W}^r(D \mid L_1(P), H^{q(1)}, \ldots, H^{q(r)})$. Более того, для каждого $i = 1, \ldots, r$ представляющую меру μ_i можно выбрать абсолютно непрерывной относительно P с плотностью $d\mu_i/dP \in L_{l/i}(P)$.*

Приведем набросок доказательства в случае $r = 1$, $l = 2$. Выберем $g \in H^{2,2}$ и рассмотрим аппроксимирующие последовательности $\{g_n\}$ и $\{K_n\}$, отвечающие последовательности проекторов $\{Q_n\}$. Прямым вычислением устанавливается соотношение $\mathrm{E}\langle g_n', K_n\rangle = \mathrm{E}g_n(\Sigma\langle K_n, e_i\rangle e_i - \operatorname{tr} K_n' \circ Q_n)$ (суммирование по $i \leqslant \dim Q_nH$). Предельный переход при $n \to \infty$ обосновывается с помощью одной оценки из [7] (см. также [2, с. 85]). Как известно, сумма и след по отдельности предела могут не иметь [1, 7].

Рассмотрим гауссовскую меру P со средним значением a на борелевской σ-алгебре сепарабельного банахова пространства B. В качестве H возьмем замкнутую линейную оболочку в $L_2(P)$ величин $(\cdot - a, e^*)$, $e^* \in B^*$, естественно отождествляемую [8, 9] с множеством допустимых направлений меры P.

Предложение 2. *Пусть $f \in L_{p(0)}(P)$ r-кратно непрерывно дифференцируема по Фреше, $\nabla^j f(x)$, $j = 1, \ldots, r$, – ее производные в точке $x \in B$. Предположим, что для каждого $j = 1, \ldots, r$ функция $x \mapsto \|\nabla^j f(x)\|$ принадлежит $L_{p(j)}(P)$.*

Тогда $f \in H^p$, причем $f^{(j)}(x)(h_1, \ldots, h_j) = \nabla^j f(x)(ih_1, \ldots, ih_j)$. Здесь i: $H \to B$ – каноническое вложение [8].

Рассмотрим теперь винеровский процесс w_t на $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ и возьмем в качестве H замкнутую линейную оболочку в $L_2(P)$ величин w_t, $t \in [0, T]$.

Предложение 3. *Пусть x_t, $t \in [0, T]$, – сильное решение стохастического уравнения $x_t = x_0 + \int_0^t a(s, x_s)\,ds + \int_0^t b(s, x_s)\,dw_s$ с коэффициентами класса $C_b^{0,r}$. Пусть, далее, f: $C[0, T] \to \mathbf{R}$ r-кратно непрерывно дифференцируема по Фреше, причем сама f и ее производные – функции полиномиального роста.*

Тогда случайная величина $f(x_\cdot) \in \bigcap_{p<\infty} H^p$.

Пример 3 (пуассоновский аналог примера 2). Пусть $G \subset \mathbf{R}$ – открытое множество, $\mathfrak{X}$ – пространство локально-конечных подмножеств G с естественной σ-алгеброй (см. [1, 10]), ν: $\Omega \to \mathfrak{X}$ – пуассоновская случайная мера в G, мерой интенсивности которой является мера Лебега.

Для каждого $X \in \mathfrak{X}$ рассмотрим гильбертово пространство $H(X) = \{h\colon X \to \mathbf{R} \mid \sum h^2(x) < \infty\}$ квадратично суммируемых функций на X. Введем измеримое поле гильбертовых пространств H: $\omega \mapsto H(X(\omega))$, $\omega \in \Omega$ (см. [11]). Конечномерным ортопроектором в H назовем семейство $Q = \{Q(\omega)\colon H(X(\omega)) \to H(X(\omega))\}$ отображений вида $h \mapsto \mathbf{1}_V h$, где $\mathbf{1}_V$ – индикатор неслучайного ограниченного множества V, являющегося конечной суммой открытых интервалов. Для $X \in \mathfrak{X}$ и $h \in H(X)$ определим сумму $X + h = \{x + h(x) \mid x \in X\}$ и отображение $T(X, h)$: $H(X + h) \to H(X)$, $T(X, h)(g)(x) = g(x + h(x))$. Подразумевается, что $X + h \in \mathfrak{X}$.

Теперь аналогично примеру 2 можно определить дифференцируемость в смысле H^p и PH^p для функций $\Omega \to R$, а также для сечений поля H. При определении дифференцируемости сечения K следует потребовать дифференцируемость по Фреше отображения $h \mapsto T(X(\omega), h)K(X(\omega) + h)$.

Для дифференциального оператора D, задаваемого формулой $Dg = \langle g', K\rangle$, справедлив результат, формулировка которого почти дословно повторяет формулировку теоремы 1. Нужно лишь дополнительно предположить, что аппроксимирующая последовательность K_n может быть выбрана таким образом, что $(K_n(X))_x = 0$, если $x \in \partial V_n$.

3. Пусть D – некоторый дифференциальный оператор, $g \in C_{r+1}(D)$. Обозначим $I(r, i) = \{(k_1, \ldots, k_r) \in \mathbf{Z}_+^r \mid \sum_j k_j = r - i\}$ и определим вспомогательные множества функций $(i = 0, \ldots, r)$ $S_i(D, g) = \{\varphi_1(g)\varphi_2(Dg)(D^2g)^{k_1} \ldots (D^{r+1}g)^{k_r} \mid \varphi_1, \varphi_2 \in C_b^\infty(\mathbf{R}), (k_1, \ldots, k_r) \in I(r, i)\}$.

Теорема 2. *Пусть f: $\Omega \to \mathbf{R}$ – случайная величина. Предположим, что существует такой дифференциальный оператор D, что*: 1) *$f \in C_{r+1}(D)$ и $P(Df \neq 0) = 1$*; 2) *$P \in \bar{W}^r(D \mid S_0, \ldots, S_r)$ для некоторых $S_i \supset S_i(D, f)$, $i = 0, \ldots, r$*; 3) *для каждого $i = 0, \ldots, r$ и каждого набора $(k_1, \ldots, k_r) \in I(r, i)$ конечен интеграл*

$$\int (Df)^{-r-k_1-\ldots-k_r}(D^2f)^{k_1} \ldots (D^{r+1}f)^{k_r}\,d\mu_i.$$

Тогда $Pf^{-1} \in \bar{W}_1^r$.

Следствие 1. *Пусть H – гильбертово пространство примера 2. Предположим, что $r \geqslant 2$, $f \in \bigcap_{p<\infty} H^p$ и при некотором $\delta > 0$ конечен интеграл $\int |f'|^{2-2r-\delta}\,dP$. Тогда $Pf^{-1} \in \bar{W}_1^{r-1}$.*

Следствие 2. *Пусть P – гауссовская мера на сепарабельном банаховом пространстве B, A: $B \to B^*$ – непрерывный линейный оператор, $f(x) = (Ax, x)$. Предположим, что $\dim(i^*AiH) > 2r$. Тогда $Pf^{-1} \in \bar{W}_1^r$.*

Следствие 3. *Пусть* $x_\cdot$ *и* f *удовлетворяют условиям предложения* 3 *и для некоторого* $\delta > 0$ *конечно* $\mathbf{E}\left[\int_0^T ds\, b^2(s, x_s) \cdot \left(\int_s^T V(t, s) \nabla f(x_\cdot, dt)\right)^2\right]^{-r-\delta}$,

где $V(t, s) = \exp\left\{\int_s^t \partial_x a(u, x_u) - \frac{1}{2}(\partial_x b(u, x_u))^2]\, du + \int_s^t \partial_x b(u, x_u)\, dw_u\right\}$.

Тогда $P[f(x)]^{-1} \in \overline{W}_1^r$.

Следствие 4. *Пусть* $x_\cdot$ *удовлетворяет условиям предложения* 3, $u \in C_b^r(\mathbf{R}^2)$. *Рассмотрим решение* y_t, $t \in [0, T]$, *уравнения* $\dot{y}_t = u(x_t, y_t)$ *и случайную величину* $f(x_\cdot) = y_T$. *Предположим, что* $b(0, x_0)\, \partial_x u(x_0, y_0) \neq 0$. *Тогда* $P[f(x_\cdot)]^{-1} \in \overline{W}_1^r$.

Результаты, аналогичные следствию 3, можно получить также для процессов с независимыми приращениями и для локально безгранично делимых процессов.

Другие примеры приведены в [12].

Автор благодарит И.А. Ибрагимова, Ю.А. Давыдова и С.А. Молчанова за внимание к работе.

Завод-ВТУЗ при производственном объединении турбостроения "Ленинградский металлический завод"

Поступило 25 IX 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ikeda N., Watanabe S.* Stochastic differential equations and diffusion processes. Amsterdam; Oxford; N.Y.; Tokyo: North Holland, Kodansha, 1981. 464 p. 2. *Далецкий Ю.Л., Фомин С.В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983. 384 с. 3. *Ефимова Е.И., Угланов А.В.* – ДАН, 1983, т. 271, № 6, с. 1302–1306. 4. *Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983. 288 с. 5. *Bismut J.-M.* – Z. Wahrsch., 1981, Bd. 56, № 4, S. 469–505. 6. *Давыдов Ю.А.* – Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1985, т. 142, с. 48–54. 7. *Ramer R.* – J. Funct. Anal., 1970, vol. 5, № 1, p. 94–124. 8. *Го Х.-С.* Гауссовские меры в банаховых пространствах. М.: Мир, 1979. 176 с. 9. *Давыдов Ю.А., Лифшиц М.А.* – Итоги науки и техники. Сер. Теор. вероятн., матем. статист., теор. киберн., 1984, т. 22, с. 61–158. 10. *Керстан Й., Маттес К., Мекке Й.* Безгранично делимые точечные процессы. М.: Наука, 1982. 392 с. 11. *Диксмье Ж.* C^*-алгебры и их представления. М.: Наука, 1974. 400 с. 12. *Смородина Н.В.* В кн.: Тез. докл. IV международ. вильнюсской конф. по теории вероятн. и матем. статистике. Вильнюс, 1985, т. 3, с. 143–145.