В. И. Малыхин, Л. Б. Шапиро, О псевдокомпактных группах без сходящихся последовательностей,
*Матем. заметки*, 1985, том 37, выпуск 1, 103–109

https://www.mathnet.ru/mzm5286

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 37, № 1 (1985)

# О ПСЕВДОКОМПАКТНЫХ ГРУППАХ БЕЗ СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В. И. Малыхин, Л. Б. Шапиро

Статья посвящена изучению вопроса о существовании сходящихся последовательностей в предкомпактных и псевдокомпактных топологических группах. Каждая предкомпактная и тем более псевдокомпактная группа является подгруппой бикомпактной группы, которая, будучи диадическим бикомпактом, содержит «много» сходящихся последовательностей. Поэтому вполне оправданным был вопрос, поставленный А. В. Архангельским: существуют ли псевдокомпактные группы без сходящихся последовательностей? С. Сирота [1] положительно ответил на этот вопрос, построив псевдокомпактную группу с указанным свойством, вес которой равен $\tau$, где $\tau$ — произвольное заранее заданное кардинальное число, удовлетворяющее условию $\tau^{\aleph_0} = \tau$. В связи с этим результатом он же поставил вопрос: существует ли псевдомкомпактная группа без сходящихся последовательностей, вес которой равен $\tau$ и $\tau^{\aleph_0} > \tau$? Мы покажем, что ответ на этот вопрос не зависит от системы ZFC аксиом теории множеств. В первой части статьи доказано, что в предположении обобщенной континуум-гипотезы *GCH* таких групп нет. Во второй части статьи строится в дополнительном предположении, совместном с любой кардинальной арифметикой псевдокомпактная группа веса $\aleph_1$ без сходящихся последовательностей. Результаты первой части статьи получены Л. Б. Шапиро, а результаты второй — В. И. Малыхиным.

I. Основным результатом здесь является следующая

ТЕОРЕМА 1 ($GCH$). *Во всякой предкомпактной группе веса* $\tau$, *где* $\tau^{\aleph_0} > \tau$, *есть сходящаяся последовательность.*

Доказательство. В силу предкомпактности $G$ ее пополнение $\widetilde{G}$ является бикомпактной группой, причем $w\widetilde{G} = wG$, так как $\widetilde{G}$ — диадический бикомпакт. В предположении $GCH$ из неравенства $\tau^{\aleph_0} > \tau$ следует, что $\mathrm{cf}(\tau) = \aleph_0$.

Следовательно, $\tau = \Sigma\ \{m_i: i \in \omega\}$, где $m_i < m_{i+1} < < \tau$. В группе $\widetilde{G}$ стандартным образом строим последовательность замкнутых нормальных делителей $\{N_i: i \in \omega\}$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $N_{i+1} \subset N_i$
2. $\bigcap \{N_i: i \in \omega\} = \{e\}$;
3. $\chi(N_i, \widetilde{G}) \leqslant m_i$.

Теперь покажем, что $|G \cap N_i| > 1$ для любого $i \in \in \omega$. Рассмотрим естественный гомоморфизм $h: \widetilde{G} \to \widetilde{G}/N_i$. Группа $\widetilde{G}/N_i$ является диадическим бикомпактом, характер которого не превосходит $m_i$ (в силу условия 3). Следовательно, $|\widetilde{G}/N_i| \leqslant 2^{m_i} \leqslant m_{i+1}$.

Если $|G \cap N_i| = 1$, то сужение гомоморфизма $h$ на группе $\widetilde{G}$ будет взаимно однозначно. Отсюда вытекает, что $|G| \leqslant m_{i+1}$. Но тогда $w\widetilde{G} \leqslant 2^{|G|} \leqslant 2^{m_{i+1}} < \tau$. Таким образом мы пришли к противоречию с нашим предположением о том, что $|G \cap N_i| = 1$. Следовательно, $|G \cap \cap N_i| > 1$. Для любого $i \in \omega$ выбираем точку $x_i \in G \cap \cap N_i$ такую, что $x_i \neq e$. Тогда $\{x_i: i \in \omega\}$ — искомая последовательность, сходящаяся к $e$. Теорема доказана.

Следующий несложный результат показывает, что отсутствие сходящихся последовательностей в предкомпактной абелевой топологической группе не накладывает никаких ограничений на алгебраическую структуру группы.

ТЕОРЕМА 2. *У любой абелевой алгебраической группы $G$ мощности $\tau$ существует предкомпактная топология без сходящихся последовательностей, вес которой не превосходит* $\tau^{\aleph_0}$.

Доказательство. Для каждого счетного подмножества $A \subset G$ построим гомоморфизм $\varphi_A$ группы $G$ в единичную окружность $\mathbf{T}$ такой, что $\varphi_A(A)$ не есть сходящаяся к 1 последовательность. Пусть $H(A)$ — подгруппа $G$, порожденная множеством $A$. Построим гомоморфизм $h$ группы $H(A)$ в $\mathbf{T}$, удовлетворяющий условию, что $h(A)$ не есть сходящаяся к 1 последовательность, тогда продолжение $h$ на всю группу $G$ будет искомым.

Рассмотрим два случая.

1. Группа $H(A)$ конечнопорожденная. Тогда, в силу одного результата В. Бельнова [2] существует гомоморфизм $h\colon H(A) \to \mathbf{T}$, такой что $h(A)$ всюду плотно в $\mathbf{T}$ и тем более $h(A)$ не есть сходящаяся к 1 последовательность.

2. Группа $H(A)$ не является конечнопорожденной. В этом случае гомоморфизм $h$ построим по индукции. Пусть мы определили $h$ на группе $H(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset A$. Определим $h$ на группе $H(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})$. При этом могут возникнуть следующие случаи:

а) $a_{n+1} \in H(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Тогда $H(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}) = H(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и, следовательно, $h$ уже определен на группе $H(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})$;

б) $a_{n+1} \notin H(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, но $k \cdot a_{n+1} \in H(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $k$ — наименьшее из натуральных чисел, обладающих этим свойством. Положим $h(a_{n+1}) = \exp\left(i\frac{m}{k}2\pi\right)$, где $m = [k/2]$ — целая часть $k/2$. Ясно, что число $h(a_{n+1})$ лежит в левой полуплоскости;

в) $k \cdot a_{n+1} \notin H(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ни при каком целом $k$. Тогда положим $h(a_{n+1}) = 1$.

Очевидно, что гомоморфизм $h\colon H(A) \to \mathbf{T}$ определен корректно и кроме того $h(A)$ не есть сходящаяся к 1 последовательность. Пусть $\varphi_A$ — продолжение $h$ на всю группу $G$. Тогда $\varphi = \Pi\{\varphi_A\colon A \subset G, |A| \leqslant \aleph_0\}$ — вложение $G$ в соответствующую степень группы $\mathbf{T}$. Ясно, что топология образа $G$ при этом вложении является искомой.

II. Ниже доказывается совместность с системой ZFC аксиом теории множеств следующего утверждения.

Мощность континуума $\mathfrak{c}$ может быть любым возможным кардиналом и при этом существует псевдокомпактная группа веса $\aleph_1$ без сходящихся последовательностей.

Сразу уточним, что эта группа есть всюду плотная подгруппа $D^{\omega_1}$. При построении этой группы будет использовано следующее утверждение.

ПП ($\aleph_1$). В $D^\omega$ существует семейство $\mathcal{T}$ мощности $\aleph_1$ подгрупп 2-го порядка, такое что для всякого счетного бесконечного подмножества $L \subset D^\omega$ найдется $\mathbf{T} \in \mathcal{T}$, для которого каждое из множеств $L \cap \mathbf{T}$, $L \setminus \mathbf{T}$ бесконечно [1]).

---

[1]) Легко видеть, что таких подгрупп будет несчетное число.

Доказательство совместности ПП ($\aleph_1$) с системой ZFC аксиом теории множеств будет проведено ниже. Перейдем к построению искомой группы.

Для всякого $\alpha \in \omega_1 \setminus \omega$ обозначим $\Pi\{D_\beta\colon \beta \in \alpha\}$ через $D^\alpha$. Ясно, что $D^\alpha$ изоморфно $D^\omega$. Разобьем $\omega_1 \setminus \omega$ на $\aleph_1$ дизъюнктных несчетных подмножеств, таких, что $\omega_1 \setminus \omega = \bigcup \{A_\alpha\colon \alpha \in \omega_1 \setminus \omega\}$ и $A_\alpha \cap \alpha = \varnothing$ для каждого $\alpha \in \omega_1 \setminus \omega$. Обозначим через $\mathcal{T}^\alpha$ семейство подгрупп в $D^\alpha$, существование которого гарантирует предположение ПП ($\aleph_1$). Пусть $\psi^\alpha\colon \mathcal{T}^\alpha \to A_\alpha$ — взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{T}^\alpha$ и $A_\alpha$.

Определим теперь искомую подгруппу $X \subset D^{\omega_1}$ следующим образом: точка $x \in D^{\omega_1}$ принадлежит $X$ если и только если для каждого $\alpha \in \omega_1 \setminus \omega$ условие:

$$x(\psi^\alpha(\mathbf{T})) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \pi_\alpha(x) \in \mathbf{T}, \\ 1, & \text{если} \quad \pi_\alpha(x) \notin \mathbf{T}, \end{cases} \tag{1}$$

выполнено для всех $\mathbf{T} \in \mathcal{T}^\alpha$, за исключением, возможно, счетного их числа.

Покажем, что $X$ группа. Пусть $x, y \in X$ и условие (1) выполнено для $\alpha$ и $\mathbf{T} \in \mathcal{T}^\alpha$. Возможны три случая.

1. $x(\psi^\alpha(\mathbf{T})) = 0$, $y(\psi^\alpha(\mathbf{T})) = 0$. Это значит, что $\pi_\alpha(x) \in \mathbf{T}$, $\pi_\alpha(y) \in \mathbf{T}$. Следовательно, $(x + y)(\psi^\alpha(\mathbf{T})) = 0$ и $\pi_\alpha(x + y) \in \mathbf{T}$, т. е. для точки $x + y$ выполнено условие (1), а это значит, что $x + y \in X$.

2. $x(\psi^\alpha(\mathbf{T})) = 0, y(\psi^\alpha(\mathbf{T})) = 1$. Тогда $(x + y)(\psi^\alpha(\mathbf{T})) = 1$, но $\pi_\alpha(x) \in \mathbf{T}$, а $\pi_\alpha(y) \notin \mathbf{T}$, следовательно, $\pi_\alpha(x + y) \notin \mathbf{T}$, т. е. для точки $x + y$ условие (1) выполнено.

3. $x(\psi^\alpha(\mathbf{T})) = 1$, $y(\psi^\alpha(\mathbf{T})) = 1$. Следовательно, $\pi_\alpha(x) \notin \mathbf{T}$, $\pi_\alpha(y) \notin \mathbf{T}$. Но так как $\mathbf{T}$ — подгруппа 2-го порядка $D^\alpha$, то $\pi_\alpha(x) + \pi_\alpha(y) \in \mathbf{T}$. Таким образом, получаем, что $(x + y)(\psi^\alpha(\mathbf{T})) = 0$ и $\pi_\alpha(x + y) = \pi_\alpha(x) + \pi_\alpha(y) \in \mathbf{T}$. Следовательно, условие (1) выполнено.

Покажем, что в $X$ нет сходящихся последовательностей. Пусть $L$ — счетное бесконечное подмножество $X$. Найдем $\alpha \in \omega_1 \setminus \omega$, для которого $\pi_\alpha \mid L$ — взаимно однозначно. Найдется такое $\mathbf{T} \in \mathcal{T}^\alpha$, что: во-первых, $\pi_\alpha(L) \cap \mathbf{T}$ и $\pi_\alpha(L) \setminus \mathbf{T}$ бесконечны; во-вторых, условие (1) выполняется для всех $x \in L$ при найденном $\alpha$ и $\mathbf{T}$. Пусть $L_1$ и $L_2$ — подмножества $L$, такие, что $\pi_\alpha(L_1) = \pi_\alpha(L) \cap \mathbf{T}$ и $\pi_\alpha(L_2) = \pi_\alpha(L) \setminus \mathbf{T}$. Так как условие (1) выполнено для всех $x \in L$ при данных $\alpha$ и $\mathbf{T}$, то $x(\psi^\alpha(\mathbf{T})) = 0$ для всех $x \in L_1$ и $x(\psi^\alpha(\mathbf{T})) = 1$ для всех $x \in L_2$, значит, $L$ не сходится ни к одной точке $D^{\omega_1}$.

Докажем псевдокомпактность $X$. Для этого достаточно доказать, что для любого $\alpha \in \omega_1 \setminus \omega$ отображение $\pi_\alpha$: $X \to D^\alpha$ есть отображение «на» (Б. А. Ефимов, см., например, [1]). Пусть $z_1$ — произвольная точка из $D^\alpha$. Пусть $x \in D^{\omega_1}$, $x \mid \alpha = z_1$, а для каждого $\beta \in \omega_1 \setminus \alpha$ определим $x(\beta)$ так, чтобы условие (1) выполнялось. Ясно, что $x \in X$ и $\pi_\alpha(x) = z_1$.

Доказательство совместности ПП ($\aleph_1$) с произвольной кардинальной арифметикой проведем методом итерированного форсинга. Опишем сначала однократное расширение.

Опишем частично упорядоченное множество условий $\mathscr{P}$. Условие $p$ есть гомоморфизм конечной подгруппы $\operatorname{dom} p \subset D^\omega$ в $\{0, 1\}$. Скажем, что $p \leqslant q$, если $\operatorname{dom} q \subseteq \operatorname{dom} p$ и $p \mid \operatorname{dom} q = q$.

Утверждение 1. *Множество $\mathscr{P}$ удовлетворяет условию Суслина.*

Доказательство этого утверждения есть в [3]. Приведем его здесь для полноты изложения.

Если $Q$ — несчетное подмножество $\mathscr{P}$, то в силу теоремы Эрдеша — Радо найдутся несчетное подмножество $Q_1 \subseteq Q$ и такая конечная подгруппа $\Delta \subset D^\omega$, что $\operatorname{dom} p \cap \operatorname{dom} q = \Delta$ для любых различных $p, q \in Q_1$. Так как $\Delta$ — конечная группа, то можно выбрать несчетное подмножество $Q_2 \subseteq Q_1$ такое, что $p \mid \Delta = q \mid \Delta$ для любых $p, q \in Q_2$. Возьмем $p, q \in Q_2$. Определим $r \in \mathscr{P}$ такое, что $r \leqslant p$, $r \leqslant q$. Положим $\operatorname{dom} r = \operatorname{dom} p + \operatorname{dom} q$. Очевидно, что $\operatorname{dom} r$ — конечная подгруппа $D^\omega$. Если $z \in \operatorname{dom} r$, то $z = x + y$, где $x \in \operatorname{dom} p$ и $y \in \operatorname{dom} q$. Положим $r(z) = p(x) + q(y)$. Ясно, что $r$ — гомоморфизм $\operatorname{dom} r$ в $\{0, 1\}$. Так как $r \leqslant p$ и $r \leqslant q$, то $Q_2$ не может состоять из несовместных условий.

Пусть $G$ — генерическое подмножество $\mathscr{P}$ и $\mathfrak{M}[G]$ — соответствующее генерическое расширение. Мы будем предполагать, что $\mathfrak{M}$ образует класс в $\mathfrak{M}[G]$. Значение этого для нас состоит в том, что мы можем употреблять $\mathfrak{M}$ во многих формулах.

Утверждение 2. *В $\mathfrak{M}[G]$ верно, что $D^\omega \cap \mathfrak{M}$ есть подгруппа $D^\omega$.*

Это утверждение очевидно, так как если $x, y \in D^\omega \cap \mathfrak{M}$, то и $(x + y) \in D^\omega \cap \mathfrak{M}$. Обозначим эту подгруппу через $T'$.

Утверждение 3. *В $\mathfrak{M}[G]$ верно, что если $l$ — счетное бесконечное подмножество $D^\omega$ и $l \in \mathfrak{M}$, то $l \cap T'$ и $l \setminus T'$ бесконечны.*

Действительно, нетрудно убедиться, что для любого $n \in \omega$ множество условий $\{p\colon |p^{-1}(0) \cap l| > n$ и множество условий $\{p\colon |p^{-1}(1) \cap l| > n\}$ плотны в $\mathcal{P}$.

Очевидно, в $\mathfrak{M}[G]$ на $T'$ определен гомоморфизм $h'$ на $\{0, 1\}$. Нам необходимо продолжить гомоморфизм $h'$ на всю группу $D^\omega$. Это можно сделать в силу того, что $D^\omega$ состоит из элементов второго порядка.

Итак, справедливо

Утверждение 4. *В $\mathfrak{M}[G]$ на $D^\omega$ существует подгруппа $T$ второго порядка такая, что если $l$ — бесконечное счетное подмножество $D^\omega$ и $l \in \mathfrak{M}$, то $l \cap T$ и $l \setminus T$ бесконечны.*

Пусть теперь $\mathfrak{M}_0$ — модель с произвольной кардинальной арифметикой, в частности, в $\mathfrak{M}_0$ мощность континуума $\mathfrak{c}$ есть какой-нибудь произвольный не счетноконфинальный кардинал. Будем предполагать, что $\mathfrak{M}_0$ достаточно простая модель (см. замечание выше).

По трансфинитной индукции по всем ординалам $\alpha \leqslant \omega_1$ определим возрастающее семейство моделей $\mathfrak{M}_\alpha$. Если $\alpha$ — непредельный ординал, то $\mathfrak{M}_\alpha$ определяется как генерическое расширение $\mathfrak{M}[G_{\alpha-1}]$ модели $\mathfrak{M}_{\alpha-1}$ с помощью частично упорядоченного множества $\mathcal{P}$, определение которого дано выше. Если $\alpha$ — предельный ординал, то $\mathfrak{M}_\alpha$ определяется как естественное замыкание до модели суммы $\bigcup \{\mathfrak{M}_\beta\colon \beta < \alpha\}$. Модель $\mathfrak{M}_{\omega_1}$ — искомая. Покажем это.

Действительно, в $\mathfrak{M}_{\omega_1}$ есть семейство подгрупп $\{T_\alpha\colon \alpha \in \omega_1\}$ второго порядка в $D^\omega$. Каждая такая подгруппа $T_\alpha$ появилась уже в модели $\mathfrak{M}_{\alpha+1}$. Далее, если в $\mathfrak{M}_{\omega_1}$ верно, что $L$ — счетное бесконечное подмножество $D^\omega$, то в $\mathfrak{M}_{\omega_1}$ верно, что $L \in \mathfrak{M}_\alpha$ для некоторого $\alpha \in \omega_1$. Но тогда $L \cap T_\alpha$, $L \setminus T_\alpha$ бесконечны.

Конечно, вместо возрастающего семейства моделей $\{\mathfrak{M}_\alpha\colon \alpha \leqslant \omega_1\}$ можно говорить о возрастающем семействе частично упорядоченных множеств $\mathcal{P}_\alpha$ в $\mathfrak{M}$, затем построить из этого семейства некоторое заключительное частично упорядоченное множество $\mathcal{P}_{\omega_1}$ и с его помощью генерически расширить $\mathfrak{M}$. Так как $c(\mathcal{P}_\alpha) \leqslant \aleph_0$ для всякого $\alpha \leqslant \omega_1$ (см. [4, с. 106]), и $|\mathcal{P}_\alpha| \leqslant \mathfrak{c}$ для всякого $\alpha \leqslant \omega_1$, то можно доказать по индукции, что расширение $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}_{\omega_1}$ сохраняет кардиналы и степенную функцию, значит, $\mathfrak{c}$ в $\mathfrak{M}_{\omega_1}$ остался на прежнем месте.

Несколько подробнее аналогичное построение модели с помощью итерированного форсинга см. в [3].

Отметим в заключение, что Ван Дауэн [5] в предположении аксиомы Мартина построил счетнокомпактную группу без сходящихся последовательностей.

Московский институт
управления

Поступило
30.03.83

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Сирота С. Произведение топологических групп и экстремальная несвязность.— Мат. сб., 1969, т. 79, № 2, с. 179—192
[2] Бельнов В. К. Об одном свойстве тора.— Докл. АССР, 1973, т. 213, № 4, с. 764—765.
[3] Van Douwen E. K., Fleissner W. G. The definable forcing axiom: an alternative to Martins axiom.— Preprint.
[4] Йех Т. Теория множеств и метод форсинга.—М.: Мир, 1973.
[5] Van Douwen E. K. The products of two countably compact topological groups — Trans. Amer. Math. Soc., 1980, v. 262, № 2, p. 417—427.