



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Р. Романовский, Асимптотические свойства аналитических решений нелинейного уравнения Больцмана,
Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1986, том 26, номер 4, 545–551

<https://www.mathnet.ru/zvmmf4020>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

30 апреля 2025 г., 08:07:55



УДК 517.958:530.1

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

РОМАНОВСКИЙ Ю. Р.

(Ленинград)

Рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения Больцмана. Начальное распределение предполагается достаточно близким к равновесному и аналитическим по пространственной переменной. При малых числах Кнудсена строится приближенное решение, которое отличается от известного локального максвеллиана поправкой, обеспечивающей равномерную асимптотическую точность на фиксированном замкнутом отрезке времени, включающем начальный слой.

В работе [1] получены следующие результаты. Задача Коши для нелинейного уравнения Больцмана имеет единственное классическое решение $f(t)$ на конечном промежутке времени $t \in [0, t_0]$, если начальная функция распределения f_0 достаточно близка к нормализованному глобальному распределению Максвелла $\omega(\xi) = (2\pi)^{-3/2} \exp(-|\xi|^2/2)$ и аналитична по пространственной переменной x . При этом f_0 и t_0 не зависят от входящего в уравнение Больцмана безразмерного параметра $\varepsilon > 0$, который имеет смысл масштаба длины свободного пробега молекулы и называется числом Кнудсена. Для любого $t \in (0, t_0]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение $f(t)$ сходится к локальному максвеллиану $f^0(t)$. Отвечающие $f^0(t)$ плотность $\rho(t, x)$, массовая скорость $v(t, x)$ и температура $T(t, x)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений газовой динамики, а при $t=0$ определяются соответствующими моментами f_0 . Оценка скорости сходимости пропорциональна величине $(\varepsilon/t^2)^p$, $p < 1/2$.

В настоящей статье предлагается такая поправка к $f^0(t)$, которая обеспечивает равномерную асимптотическую точность $O(\varepsilon)$ на всем замкнутом отрезке времени $[0, t_0]$. Согласно развитому для сингулярно-возмущенных уравнений методу пограничных функций [2], решение $f(t)$ ищется в виде

$$f(t) = f^0(t) + \Pi^0(\tau) + \omega^{1/2} R(t), \quad \Pi^0(\tau) = F^0(\tau) - f^0(0), \quad \tau = t/\varepsilon,$$

где $F^0(\tau)$ — решение пространственно-однородного уравнения Больцмана с тем же начальным распределением f_0 . Построение $f^0(t)$ и $\Pi^0(\tau)$ дается в § 2. В § 3 доказывается, что остаточный член $R(t)$ имеет порядок ε (при $\varepsilon \rightarrow 0$) равномерно по $t \in [0, t_0]$. В § 1 уточняется постановка задачи, определяются функциональные пространства, излагаются важные предварительные сведения.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для нелинейного уравнения Больцмана:

$$(1.1a) \quad \partial_t f + Df = \varepsilon^{-1} Q[f, f], \quad D = \sum_{j=1}^3 \xi_j \partial_{x_j}, \quad t > 0,$$

$$(1.1b) \quad f = f_0, \quad t = 0,$$

где $f=f(t, x, \xi)$, $f_0=f_0(x, \xi)$, $(x, \xi) \in R^3 \times R^3$, ε — произвольное положительное число, билинейный интегральный оператор Q действует только по переменной ξ и рассматривается для жестких, обрезанных по Грэду потенциалов межмолекулярного взаимодействия [3]. После замены $f_0 = \omega + \omega^{1/2}u_0$, $f = \omega + \omega^{1/2}u$ задача (1.1) принимает вид

$$(1.2a) \quad \partial_t u = Bu + \varepsilon^{-1} \Gamma[u, u], \quad B = -D + \varepsilon^{-1}L, \quad t > 0,$$

$$(1.2b) \quad u = u_0, \quad t = 0,$$

где линейный оператор L и билинейный оператор Γ действуют по формулам

$$Lu = 2\omega^{-1/2}Q[\omega, \omega^{1/2}u], \quad \Gamma[u, v] = \omega^{-1/2}Q[\omega^{1/2}u, \omega^{1/2}v].$$

Теорема существования и единственности решения задачи (1.2) в определенном ниже функциональном пространстве Y доказана в [1]. Без ссылки на эту теорему разрешимость задачи (1.2) устанавливается ниже попутно при выводе неравенства (3.3). Построение равномерной по $t \in [0, t_0]$ асимптотики решения задачи (1.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ и получение оценки остаточного члена являются целью всех последующих рассуждений. Основные результаты сформулированы в теоремах 1–3. Их интерпретация в терминах исходной функции распределения $f(t)$ не составляет труда и кратко представлена во введении.

Через $X[\alpha, l, \beta]$ обозначим банахово пространство измеримых функций $u(x, \xi)$, удовлетворяющих условиям

$$\|u\|_X = \|u\|_{\alpha, l, \beta} = \sup_{k, \xi \in R^3} (1 + |k|)^l (1 + |\xi|)^\beta e^{\alpha|k|} |F_x u| < \infty,$$

$$\|F_k \chi(r) F_x u\|_{\alpha, l, \beta} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty,$$

где F_x — преобразование Фурье:

$$F_x u = (2\pi)^{-3/2} \int_{R^3} u(x, \xi) \exp(-ik \cdot x) dx,$$

F_k — обратное к нему: $\alpha, l, \beta \geq 0$; $k \cdot x$ здесь и далее означает скалярное произведение в R^3 ; $\chi(r)$ — характеристическая функция области $|k| + |\xi| > r$. Если $\alpha > 0$, то $u \in X[\alpha, l, \beta]$ аналитична по $z = x + iy$ в области $|y| < \alpha$.

Через $Y[l, \beta]$ обозначим банахово пространство

$$Y = \{u(t) \mid \exp(-\gamma t |k|) F_x u(t) \in B^0([0, t_0]; K)\},$$

$$\|u\|_Y = \sup_{t \in [0, t_0]} \|u\|_{\alpha - \gamma t, l, \beta},$$

где произвольные положительные числа α, γ, t_0 раз и навсегда фиксированы так, чтобы $\alpha - \gamma t_0 \geq 0$; K — образ $X[\alpha, l, \beta]$ под действием преобразования Фурье, норма элемента из пространства K по определению совпадает с нормой его прообраза; $B^0([0, t_0]; K)$ — здесь и далее пространство ограниченных непрерывных функций на отрезке $[0, t_0]$ со значениями в банаховом пространстве K .

Через $B[l, \beta]$ обозначим замкнутое подпространство пространства $B^0([0, \infty]; X[\alpha, l, \beta])$, элементы которого удовлетворяют дополнительно му условию

$$\|u\|_\sigma = \sup_{\tau \in [0, \infty)} e^{-\sigma \tau} \|u(\tau)\|_{\alpha, l, \beta} < \infty, \quad \sigma > 0.$$

Напомним теперь некоторые фундаментальные свойства линейного оператора столкновений, полученные в [3]. Оператор L является самосопряженным и неположительным в пространстве $L^2=L^2(R^3)$. Точка $\lambda=0$ есть его изолированное собственное значение кратности 5. Ортонормированным базисом в отвечающем ему собственном подпространстве служит система функций

$$(1.3) \quad \{\psi_j\} = \{\omega^{1/2}, \xi_1 \omega^{1/2}, \xi_2 \omega^{1/2}, \xi_3 \omega^{1/2}, 6^{-1/2}(|\xi|^2 - 3)\omega^{1/2}\}.$$

Соответствующий собственный проектор обозначим через P_0 . Тогда $P_0 \Gamma[u, v] = 0$ для любых u, v .

Другой важный результат связан с исследованием спектра возмущенного оператора столкновений: $A(k) = L - ik \cdot \xi$ в пространстве L^2 . Впервые такое исследование было дано для модели твердых шаров в [4]. Аналогичный результат для всего рассматриваемого класса потенциалов получен в [5]. Полная формулировка здесь не приводится. Отметим лишь наиболее существенные при дальнейшем изложении факты. Имеются такие положительные постоянные r_0 и σ_0 , что при $|k| < r_0$ в полуплоскости $\text{Re } \lambda > -\sigma_0$ спектр $A(k)$ состоит лишь из конечного числа собственных значений $\{\lambda_j(|k|)\}$ общей кратности 5, о которых известно, что $\lambda_j(r) \in C^\infty([-r_0, r_0])$, $\text{Re } \lambda_j \leq 0$, и справедливо асимптотическое разложение

$$(1.4) \quad \lambda_j(|k|) = i\lambda_j^1 |k| - \lambda_j^2 |k|^2 + O(|k|^3), \quad |k| \rightarrow 0,$$

где λ_j^1 — вещественные числа, а $\lambda_j^2 > 0$. Для соответствующих собственных проекторов $P_j(k)$ также имеет место разложение

$$(1.5) \quad P_j(k) = P_j^0(q) + |k| P_j^1(q) + O(|k|^2), \quad |k| \rightarrow 0, \quad q = k/|k|,$$

где P_j^0 — ортопроекторы на взаимно ортогональные подпространства в L^2 , $\sum P_j^0 = P_0$.

В [1] доказано следующее. Оператор B порождает сильно непрерывную полугруппу операторов $E(t)$, действующих в пространстве $X[\alpha, l, \beta]$. Если $\beta > 3/2$, то

$$(1.6) \quad \|E(t)u\|_Y \leq C \|u\|_X$$

для любого $u \in X[\alpha, l, \beta]$ и не зависящей от ε положительной постоянной $C < \infty$. Оператор H действует по формуле

$$Hf = E(t) * Q_0 \varepsilon^{-1} \Lambda f(t),$$

где $Q_0 = I - P_0$; Λ — оператор умножения на известную функцию $v(|\xi|)$, которая называется частотой столкновений [3]; символ $*$ здесь и далее обозначает операцию свертки по t :

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-s) f_2(s) ds.$$

Если $\beta > 5/2$, то

$$(1.7) \quad \|Hf\|_Y \leq C(1 + \gamma^{-1}) \|f\|_Y$$

для любого $f \in Y[l, \beta]$ и не зависящей от ε положительной постоянной $C < \infty$. Наконец, если $l > 3$, то верна оценка

$$(1.8) \quad \|L^{-1} \Gamma[u, v]\|_X \leq C \|u\|_Y \|v\|_X$$

для любых $u, v \in Y[l, \beta]$ и некоторой положительной постоянной $C < \infty$.

§ 2. Построение асимптотики

Асимптотику решения задачи (1.2) будем искать в виде суммы: $u^0 + G^0$. Компонента u^0 соответствует локальному максвеллиану и является решением уравнения

$$(2.1) \quad u^0 = E^0(t)v_0 + H^0\Lambda^{-1}\Gamma[u^0, u^0], \quad v_0 = P_0u_0,$$

полученного в [1, с. 329]. Операторы $E^0(t)$ и H^0 действуют по формулам

$$E^0(t)u = \Sigma E_j^0(t)u, \quad F_x E_j^0(t)u = \exp(i\lambda_j^1 |k|t) P_j^0 F_x u,$$

$$H^0\Lambda^{-1}\Gamma[u, v] = E^0(t) * J[u, v] - L^{-1}\Gamma[u, v],$$

$$J[u, v] = \Sigma J_j[u, v], \quad F_x J_j[u, v] = |k| P_j^0 F_x \Gamma[u, v],$$

где $\lambda_j^1, P_j^0, P_j^1$ те же, что в (1.4) и (1.5). Похожее уравнение независимо было рассмотрено в [6]. Отличие состоит в том, что предложенное в [6] уравнение не содержит члена с оператором $L^{-1}\Gamma$.

Теорема 1. Пусть $l > 3, \beta > 5/2$. Тогда существуют положительные постоянные a_0 и a_1 такие, что если $\|v_0\|_X < a_0, X = X[\alpha, l, \beta]$, то верно следующее:

1) уравнение (2.1) имеет единственное в пространстве $Y[l, \beta]$ решение u^0 , удовлетворяющее условию $\|u^0\|_X \leq a_1 \|v_0\|_X$, и для этого решения справедливо равенство

$$(2.2) \quad Lu^0 + \Gamma[u^0, u^0] = 0;$$

2) функция u^0 , рассматриваемая как элемент пространства $B = B^0([0, t_0]; X[\alpha - \gamma t_0, l-1, \beta])$, имеет в нем сильную производную $\partial_t u^0 \in Z = Y[l-1, \beta]$, причем

$$(2.3) \quad \|u^0(t) - u^0(s)\|_{\alpha - \gamma t, l-1, \beta} \leq |t-s| \|\partial_t u^0\|_Z, \quad 0 \leq s \leq t \leq t_0,$$

$$(2.4) \quad Mu^0 = 0, \quad M = P_0[\partial_t + D].$$

Замечание. Равенство (2.2) означает, что $f^0 = \omega + \omega^{1/2}u^0$ есть локальный максвеллиан:

$$f^0 = \rho(2\pi T)^{-3/2} \exp[-|\xi - v|^2/2T],$$

а из (2.4) следует, что функции $\rho(t, x), v(t, x), T(t, x)$ удовлетворяют системе уравнений Эйлера [1, с. 313].

Доказательство. Операторы $E^0(t)$ и H^0 (аналогично операторам $E(t)$ и H) обладают оценками вида (1.6) и (1.7) соответственно. Поэтому утверждение (1) есть очевидное следствие работы [4]. Чтобы установить справедливость (2), обозначим $v^0 = P_0u^0$. Тогда $v^0 = E^0(t)v_0 + E^0(t) * J[u^0, u^0]$, что означает существование в B сильной производной $\partial_t v^0 = \Omega v^0 + J[u^0, u^0] \in Z$, где оператор Ω действует по формуле [5]

$$\Omega v^0 = -\{\psi_0 \operatorname{div} n + \psi \cdot \operatorname{grad} [n_0 + (2/3)^{1/2}n_4] + \psi_4 (2/3)^{1/2} \operatorname{div} n\},$$

$v^0 = \psi_0 n_0(t, x) + \psi \cdot n(t, x) + \psi_4 n_4(t, x), n = (n_1, n_2, n_3), \psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3), \{\psi_j\}$ те же, что в (1.3). Из (2.2) вытекает соотношение

$$(2.5) \quad S_h[\Delta u^0] = \Delta v^0,$$

где $\Delta u = u(t+h) - u(t), S_h[u] = u + L^{-1}\Gamma[w_h, u], w_h = u^0(t+h) + u^0(t)$. Постоянная a_0 считается выбранной так, чтобы

$$(2.6) \quad \|u^0\|_X \leq 1/2C,$$

где C та же, что в (1.8). Тогда S_h имеет ограниченный обратный на B оператор, причем S_h^{-1} непрерывно зависит от h в равномерной операторной топологии. А это вместе с (2.5) означает, что существует в B сильная производная $\partial_t u^0$ и справедливо равенство $S_0[\partial_t u^0] = \partial_t v^0$. Из условия (2.6) заключаем, что S_0 имеет ограниченный обратный на Z оператор. Следовательно, $\partial_t u^0 \in Z$. Для доказательства (2.3) заметим, что

$$u^0(t) - u^0(s) = \int_s^t \partial_\tau u^0(\tau) d\tau, \quad 0 \leq s \leq t \leq t_0,$$

откуда

$$\begin{aligned} \|u^0(t) - u^0(s)\|_{\alpha-\tau t, l-1, \beta} &\leq |t-s| \sup_{\tau \in [s, t]} \|\partial_\tau u^0\|_{\alpha-\tau t, l-1, \beta} \leq \\ &\leq |t-s| \sup_{\tau \in [s, t]} \|\partial_\tau u^0\|_{\alpha-\tau t, l-1, \beta} \leq |t-s| \|\partial_t u^0\|_Z. \end{aligned}$$

Для получения (2.4) напомним, что при любом u из области определения оператора Ω справедливо (см. [5]) $ME^0(t)u=0$. Но тогда $Mu^0 = J[u^0, u^0] - P_0 DL^{-1} \Gamma[u^0, u^0]$, откуда

$$F_x M u^0 = |k| [\Sigma P_j^1 Q_0 - P_0(iq \cdot \xi) L^{-1} Q_0] F_x \Gamma[u^0, u^0].$$

Из (1.5) и перестановочности операторов $P_j(k)$, $A(k)$ следует, что выражение в квадратных скобках равно нулю. Теорема доказана.

Пограничная функция G^0 является решением задачи

$$(2.7a) \quad \partial_t G^0 = \varepsilon^{-1} (L G^0 + 2 \Gamma[u_0^0, G^0] + \Gamma[G^0, G^0]), \quad t > 0,$$

$$(2.7b) \quad G^0 = G_0^0 = u_0 - u_0^0, \quad u^0 = u_0^0, \quad t = 0.$$

После замены $F^0 = \omega + \omega^{1/2}(u^0 + G^0)$ задача (2.7) принимает вид

$$\partial_t F^0 = \varepsilon^{-1} Q[F^0, F^0], \quad t > 0, \quad F^0 = f_0, \quad t = 0.$$

Разрешимость пространственно-однородного уравнения Больцмана для всего рассматриваемого класса потенциалов при весьма общих ограничениях на начальное распределение f_0 доказана в [7]. Там же установлена сходимость решения к функции $f^0(0)$ при $\tau \rightarrow \infty$, $\tau = t/\varepsilon$. Однако в этой общей ситуации не удается получить оценку скорости сходимости.

Перейдем в (2.7) к внутренней переменной $\tau = t/\varepsilon$ и рассмотрим интегральное уравнение

$$(2.8) \quad G^0 = e^{\tau L} Q_0 G^0 + 2U \Lambda^{-1} \Gamma[u_0^0, G^0] + U \Lambda^{-1} \Gamma[G^0, G^0],$$

где оператор U действует по формуле $Uf = e^{\tau L} * Q_0 \Lambda f(\tau)$. Если в теореме 2.3 из [1] положить $k=0$, то из нее вытекает следующая

Лемма 1. Если $\beta > 5/2$, то существует $\sigma > 0$ такое, что

$$\|e^{\tau L} Q_0 u\|_\sigma \leq C_1 \|u\|_X, \quad \|Uv\|_\sigma \leq C_2 \|v\|_\sigma$$

для любых $u \in X[\alpha, l, \beta]$, $v \in B[l, \beta]$ и некоторых положительных постоянных C_1, C_2 .

Теорема 2. Пусть $l > 3$, $\beta > 5/2$. Тогда существуют положительные постоянные b_0, b_1 и σ такие, что если $\|G_0^0\|_X < b_0$, $X = X[\alpha, l, \beta]$, то задача (2.7) имеет единственное решение G^0 , удовлетворяющее условию

$$(2.9) \quad \|G^0(t)\|_X \leq b_1 \|G_0^0\|_X \exp(-\sigma t \varepsilon^{-1}).$$

Доказательство. Задачу (2.7) будем решать методом сжатых отображений в интегральном уравнении (2.8). Обозначим правую часть

(2.8) через VG^0 . Из леммы 1 вытекает, что оператор V в пространстве $B[l, \beta]$ имеет оценки

$$\begin{aligned} \|VF\|_{\sigma} &\leq C_1 \|G_0^0\|_x + 2C_2 \|u_0^0\|_x \|F\|_{\sigma} + C_2 \|F\|_{\sigma}^2, \\ \|VF - VG\|_{\sigma} &\leq C_2 (\|F + G\|_{\sigma} + 2\|u_0^0\|_x) \|F - G\|_{\sigma}, \end{aligned}$$

где $\sigma > 0$ то же, что в лемме 1. Постоянная a_0 в теореме 1 считается выбранной так, чтобы $C = 1 - 2C_2 \|u_0^0\|_x > 0$. Тогда если $b_0 = (C^2/4)C_1C_2$, то в шаре радиуса $r = [C - (C^2 - 4C_1C_2 \|G_0^0\|_x)^{1/2}] / 2C_2$ пространства $B[l, \beta]$ оператор V будет сжимающим с коэффициентом сжатия $\mu = 2C_2(r + \|u_0^0\|_x) < 1$. Легко видеть, что в качестве b_1 можно взять величину C_1/C . Теорема доказана.

§ 3. Оценка остаточного члена

На основании теорем 1, 2 будем считать, что $u^0 \in Y = Y[l+1, \beta+1]$, $G^0(\tau) \in B[l+1, \beta+1]$, $l > 3$, $\beta > 5/2$. Всюду в этом параграфе под обозначением $\|\cdot\|$ будем понимать норму в пространстве $Y[l, \beta]$.

Решение задачи (1.2) будем искать в виде $u = u^0 + G^0 + R$. Тогда, в силу (2.2), (2.4) и (2.7), для остаточного члена R получаем задачу

$$(3.1a) \quad \partial_t R = BR + \varepsilon^{-1}(2\Gamma[u^0 + G^0, R] + \Gamma[R, R]) + N, \quad t > 0,$$

$$(3.1b) \quad R = 0, \quad t = 0,$$

где $N = -DG^0 - Q_0[\partial_t + D]u^0 + 2\varepsilon^{-1}\Gamma[u^0 - u_0^0, G^0]$. Будем решать ее методом интегрального оператора:

$$R = WR, \quad WR = 2H\Lambda^{-1}\Gamma[u^0 + G^0, R] + H\Lambda^{-1}\Gamma[R, R] + h,$$

где $h = h_1 + h_2 + h_3$, $h_1 = -E(t) * DG^0$, $h_2 = -\varepsilon H\Lambda^{-1}[\partial_t + D]u^0$, $h_3 = 2H\Lambda^{-1}\Gamma[u^0 - u_0^0, G^0]$. Но прежде установим, что имеет место

Лемма 2. *Существует не зависящая от ε положительная постоянная $C < \infty$ такая, что*

$$(3.2) \quad \|h\| \leq C\varepsilon.$$

Доказательство. Оценку вида (3.2) достаточно получить для каждого слагаемого h_j . Для h_1 она следует из (2.9) и из цепочки соотношений

$$\|h_1\| \leq C \sup_{t \in [0, t_0]} \int_0^t \|G^0(s)\|_{\alpha, l+1, \beta+1} ds \leq \varepsilon C b_1 \sigma^{-1} \|G_0^0\|_{\alpha, l+1, \beta+1};$$

C та же, что в (1.6), b_1, σ те же, что в теореме 2. Для h_2 из (1.7) и из утверждения 2) теоремы 1 следует, что

$$\|h_2\| \leq \varepsilon C (1 + \gamma^{-1}) (\|\partial_t u^0\| + \|u_0^0\|_Y).$$

Используя известное разбиение полугруппы $E(t)$ (см. [1, с. 321]), оценим h_3 :

$$\|h_3\| \leq \varepsilon C_1 b_1 \sigma^{-1} \|u^0 - u_0^0\|_Y \|G_0^0\|_{\alpha, l+1, \beta} + p C_2 b_1 \|G_0^0\|_{\alpha, l, \beta},$$

где

$$p = \sup_{s \in [0, t_0]} \|u^0(s) - u_0^0\|_{\alpha - \gamma s, l, \beta} \exp(-\sigma \varepsilon^{-1}).$$

Требуемая оценка величины p вытекает из (2.3). Лемма доказана.

Теорема 3. *Существуют положительные постоянные ε_0 и C_0 такие, что при всех $\varepsilon < \varepsilon_0$ задача (3.1) имеет единственное в пространстве $Y[l, \beta]$*

решение R , удовлетворяющее условию

$$(3.3) \quad \|R\| \leq C_0 \varepsilon.$$

Доказательство. Из (1.7) ясно, что оператор W имеет оценки

$$\|WF\| \leq \|h\| + 2C(1+\gamma^{-1}) \|u^0 + G^0\| \|F\| + C(1+\gamma^{-1}) \|F\|^2,$$

$$\|WF - WG\| \leq C(1+\gamma^{-1}) (\|F+G\| + 2\|u^0 + G^0\|) \|F-G\|.$$

Постоянные a_0 и b_0 в теоремах 1, 2 считаются выбранными так, чтобы $m = 1 - 2C(1+\gamma^{-1}) \|u^0 + G^0\| > 0$. Используя (3.2), выбираем ε_0 так, чтобы $\|h\| < m^2/4C(1+\gamma^{-1})$. Тогда W является сжимающим в шаре радиуса $r = [m - (m^2 - 4C(1+\gamma^{-1}) \|h\|)^{1/2}] / 2C(1+\gamma^{-1})$ с коэффициентом сжатия $\mu = 2C(1+\gamma^{-1}) (r + \|u^0 + G^0\|) < 1$. Замечание о том, что $r < m^{-1} \|h\|$, вместе с (3.2) приводит к (3.3). Теорема доказана.

В заключение хочу выразить глубокую благодарность Н. Б. Масловой за внимание к работе и обсуждение результатов.

Литература

1. Ukai S., Asano K. The Euler limit and initial layer of the nonlinear Boltzmann equation. — Hokkaido Math. J., 1983, v. 12, № 3, p. 311–332.
2. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
3. Грэд Г. Асимптотическая теория уравнения Больцмана. II. — В кн.: Некоторые вопр. кинетич. теорий газов. М.: Мир, 1965, с. 7–92.
4. Арсеньев А. А. Задача Коши для линейризованного уравнения Больцмана. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 5, с. 864–882.
5. Ellis R., Pinsky M. The first and second fluid approximations to the linearized Boltzmann equation. — J. math. pures et appl., 1975, v. 54, p. 125–156.
6. Лукшин Ан. В. Об одном методе получения замкнутых систем уравнений для макропараметров функции распределения при малых числах Кнудсена. — Докл. АН СССР, 1983, т. 270, № 4, с. 869–873.
7. Маслова Н. Б., Чубенко Р. П. Предельные свойства решений уравнения Больцмана. — Докл. АН СССР, 1972, т. 202, № 4, с. 800–803.

Поступила в редакцию 12.IX.1984