З. А. Янсон, Волны Лява типа SH в анизотропной упругой среде. Кинематический подход. II, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 1994, том 218, 206–219

З. А. Янсон

ВОЛНЫ ЛЯВА ТИПА SH В АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД. II

В настоящей заметке автор развивает тот подход и идеи, которые были применены в [1] в связи с задачей построения главного члена асимптотики поперечно-поляризованных волн Лява (типа SH) на поверхности Σ анизотропного упругого тела. Примененный в данной работе алгоритм определения направлений распространения по Σ поперечных волн Лява дает математическое обоснование построениям, содержащихся в [1]. Так же, как и в [1, 2], мы основываемся на общей постнановке задачи, не связанной с конкретной структурой тензора упругих постоянных среды (будем называть его в дальнейшем тензором упругости). При такой постановке задачи изотропная упругая среда рассматривается как частный тип симметрии упругой среды. С физической точки зрения мы изучаем поверхностные упругие волны, которые могут быть отнесены к волнам сдвига. Для такого типа волн искажение элемента среды не связано с изменением его объема, а скорость волны пропорциональна жесткости среды. В нашем случае волной сдвига является лишь главный член асимптотики нормальной волны.

Предложенный метод определения направлений распространения поверхностной волны (в этом и есть суть кинематического подхода) иллюстрируется рядом примеров для частных типов симметрии упругой среды. К числу этих примеров относятся трансверсально-изотропная среда (гексагональная система) и некоторые известные классы симметрии кристаллов [6, 7]. В рассмотренных примерах условия возникновения поперечных поверхностных волн оказываются менее жесткими, так что волне Лява соответствуют не отдельные направления на Σ, а поле лучей, определяемых уравнением эйконала на поверхности Σ. В этих случаях, как показано в [2, 3], возможно провести построение асимптотики волн Лява в виде пространственно-временных (ПВ) лучевых разложений, содержащих функции Эйри, см. также [4, 5].

1. Формулы для нулевого приближения асимптотики

Ссылаясь на результаты [1, 2], приведем лишь основные формулы, поясняющие постановку задачи построения асимптотики собственных функций (в нашем случае волн Лява типа SH) вблизи поверхности Σ анизотропного тела. Уравнения движения упругой среды и краевые условия в криволинейной системе координат q^1, q^2, q^3 имеют вид

$$\nabla_i(G^{i\alpha}\sigma_{\alpha j}) - \rho\frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} = 0, \quad i, j, \alpha = 1, 2, 3, \tag{1.1}$$

$$\sigma_{3j}\big|_\Sigma = 0, \tag{1.2}$$

где $\vec{U} = (U_1, U_2, U_3)$ – вектор смещений упругой среды, t – время, $\rho(q^1, q^2, q^3)$ – плотность среды, q^1, q^2 – криволинейные координаты на Σ, $q^3 = n$ – расстояние от точки наблюдения M до Σ; ∇_i – символ ковариантной производной, (G^{ij}) – метрический тензор; σ_{ij} – тензор напряжения, компоненты которого связаны с компонентами тензора деформации ε_{rs} равенством

$$\sigma_{ij} = a_{ij\alpha\beta}G^{r\alpha}G^{s\beta}\varepsilon_{rs}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i U_j + \nabla_j U_i), \quad r, s, \alpha, \beta = 1, 2, 3,$$

причем по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Возникающий здесь тензор $a_{ij\alpha\beta}$ есть тензор упругих постоянных среды (тензор упругости) с известными свойствами симметрии. Компоненты этого тензора будем считать достаточно гладкими функциями координат.

Волновое поле $\vec{U}(\vec{q}, t)$ для собственных волн ищем в форме ПВ лучевого ряда, содержащего функцию Эйри $v(\tau)$ и ее производную $v'(\tau)$, а именно

$$\vec{U}_\nu(q^1, q^2, q^3, t) =$$
$$= \left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\vec{A}^k}{(ip)^k}\,v(-p^{2/3}m) + ip^{-1/3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\vec{B}^k}{(ip)^k}\,v'(-p^{2/3}m)\right\}e^{ipl}, \quad i = \sqrt{-1}, \tag{1.3}$$

где

$$m\big|_\Sigma = \gamma, \quad \gamma = \gamma_\nu = \varkappa_\nu/p^{2/3}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{1.4}$$

$-\varkappa_\nu$ – корни функции $v'(\tau) = 0$; $\vec{A}^k$, $\vec{B}^k$, m, l – искомые функции координат q^j и t; параметр $p \gg 1$ – аналог частоты, параметр γ_ν можно считать, в свою очередь, малым параметром задачи. Для коэффициентов $\vec{A}^k$, $\vec{B}^k$ разложения (1.3) возникает рекуррентная система двух векторных уравнений того же вида, как и в изотропной среде [5], выражающаяся через известные операторы $\vec{N}_\xi$, $\vec{M}_\xi$ ПВ лучевого метода. В нулевом приближении ($k = 0$) эта система имеет вид

$$\begin{cases} \vec{N}_l\vec{A}^0 + m\vec{N}_m\vec{A}^0 + 2m\vec{N}_{lm}\vec{B}^0 = 0, \\ 2\vec{N}_{lm}\vec{A}^0 + \vec{N}_l\vec{B}^0 + m\vec{N}_m\vec{B}^0 = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Операторы $\vec{N}_\xi$, $\vec{N}_{\xi\eta}$ определены равенствами

$$(\vec{N}_\xi\vec{C})_j \equiv a_{ij\alpha\beta}\xi^i\xi^\alpha C^\beta - \rho(\xi_t)^2 C_j,$$

$$(N_{\xi\eta}\vec{C})_j \equiv a_{ij\alpha\beta}(\xi^i\eta^\alpha + \xi^\alpha\eta^i)C^\beta - 2\rho\xi_t\eta_t C_j,$$

$$C^j = G^{j\alpha}C_\alpha, \; \xi^i = G^{i\alpha}\frac{\partial\xi}{\partial q^\alpha}.$$

Система (1.5) дает возможность определить вблизи Σ эйконалы и амплитуды для падающих на поверхность и отраженных от нее волн согласно формулам

$$\tau_{1,2} = l \mp \frac{2}{3}m^{3/2}, \quad \vec{U}^{\,0}_{1,2} = m^{-1/4}\vec{A}^0 \mp m^{1/4}\vec{B}^0$$

и получить в результате, см. [1, 2], соотношение*)

$$a_{3\alpha j\beta}(A^0)^\alpha(A^0)^\beta l^j\big|_{n=0,\gamma_\nu=0} = 0 \tag{1.6}$$

Равенство (1.6) является необходимым условием образования поверхностей волны Лява как в рассматриваемом случае, так и в случае волн Лява, изученных в [4].

Из (1.5) в нулевом приближении по $\gamma_\nu(\gamma_\nu = 0)$ на Σ получаем

$$(\vec{N}_l\vec{A}^0)_{\Sigma,\gamma_\nu=0} = 0 \quad \text{или} \quad a_{ij\alpha\beta}l^i l^\alpha(A^0)^\beta = \rho l_t^2(A^0)_j \tag{1.7}$$

Индекс ν у параметра γ_ν будем в дальнейшем опускать.

Таким образом, коэффициент $\vec{A}^0$ является на Σ (при $\gamma = 0$) собственным вектором матрицы 3×3 вида

$$\mathbb{A} \equiv (a_{\alpha i\beta j}l^\alpha l^\beta), \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{1.7a}$$

а $\lambda = \rho l_t^2$ – собственные значения этой матрицы.

Граничные условия (1.2) приводят при $\gamma = 0$, в свою очередь, к следующим условиям на собственный вектор $\vec{A}^0$

$$(\vec{\xi}_j, \vec{A}^0) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \tag{1.8}$$

*)Это соотношение может быть получено в виде $(\vec{N}_{lm}\vec{A}^0, \vec{A}^0)_\Sigma = 0$ как условие разрешимости 2-го уравнения системы (1.5) при определении $\vec{B}^0$.

где

$$\vec{\xi}_j = (a_{3j\alpha1}l^\alpha,\ a_{3j\alpha2}l^\alpha,\ a_{3j\alpha3}l^\alpha).$$

Равенства (1.8) могут быть записаны в виде

$$\mathcal{A}\vec{A}^0 = 0, \tag{1.8а}$$

где $\mathcal{A}$ – матрица, составленная из компонент векторов $\vec{\xi}_j$. Необходимым условием существования вектора $\vec{A}^0 \neq 0$ является равенство $\det\mathcal{A} = 0$, что означает компланарность векторов $\vec{\xi}_j$.

Итак, коэффициент $\vec{A}^0$ должен быть одновременно собственной функцией как оператора $\mathbb{A}$, так и оператора $\mathcal{A}$ (соответствует при этом собственному значению $\lambda = 0$ матрицы $\mathcal{A}$).

Обращаясь далее к системе (1.7) и проектируя $\vec{N}_l\vec{A}^0$ на $\vec{n}$, получим на Σ при $\gamma = 0$

$$A_n^0\big|_\Sigma = 0, \quad \gamma = 0 \tag{1.7б}$$

Полученное равенство (1.7а) и система (1.8) приводят к требованию коллинеарности касательных к Σ компонент векторов $\vec{\xi}_j$, т.е.

$$(\vec{\xi}_i)_s \times (\vec{\xi}_j)_s = 0, \quad i,j = 1,2,3, \tag{1.9}$$

$$(\vec{\xi}_j)_s = (a_{3j\alpha1}l^\alpha,\ a_{3j\alpha2}l^\alpha).$$

Другим важным следствием равенств (1.8) является следующее утверждение: если (1.8) выполнены, то выполнено (1.6), в чем можно убедиться, придавая (1.6) вид

$$(\vec{\xi}_1,\vec{A}^0)(A^0)^{(1)} + (\vec{\xi}_2,\vec{A}^0)(A^0)^{(2)} + (\vec{\xi}_3,\vec{A}^0)(A^0)^{(3)} = 0. \tag{1.6а}$$

Соотношения (1.9) (из трех равенств независимыми являются только два), с необходимостью должны выполняться на Σ и выделяют в каждой точке $M \in \Sigma$ возможные направления $\nabla l = (l^1, l^2, l^3)$ распространения поверхностной волны.

В [1] мы решали задачу (1.7) для собственного вектора $\vec{A}^0$ с поляризацией типа

$$\vec{A}_n^0\big|_\Sigma = 0, \quad (\vec{A}^0, (\vec{\xi}_3)_s)\big|_\Sigma = 0 \tag{1.10}$$

как задачу определения тех направлений ∇l, на которых выполнены (1.9) и (1.6а). ((1.10) выражает факт поперечной поляризации волны Лява, и вектор $(\vec{\xi}_3)_s$ выбран по аналогии с изотропным случаем, где $(\vec{\xi}_3)_s \times (\nabla l)_s = 0$.) В такой постановке задачи (1.7) для $\vec{A}^0$ величины $\lambda = \rho l_t^2$ оказываются собственными значениями оператора $\tilde{\mathbb{A}} = (a_{ij'\alpha\beta'}l^i l^\alpha)$, $j', \beta' = 1, 2$, с матрицей 2×2. Предложенный в [1] алгоритм решения задачи (1.7), (1.10) основан на использовании как этого факта, так и на процедуре совместного решения равенств (1.9), приводящей к определению допустимых направлений ∇l в пространстве (l_1, l_2, l_3), $l_j = \frac{\partial l}{\partial q^j}$.

2. Характеристическое уравнение оператора $\mathbb{A}$

Будем решать задачу (1.7), используя, в отличие от [1], характеристическое уравнение матричного оператора $\mathbb{A}$ из (1.7а) (считая $A_n^0\big|_\Sigma \neq 0$), а затем уже применим алгоритм, позволяющий выделить из множества направлений (l^1, l^2, l^3) в каждой точке Σ те, на которых выполнены равенства (1.9) и $A_n^0\big|_\Sigma = 0$.

Введем в рассмотрение вектор $\vec{\zeta}^0$ по формуле

$$\vec{A}^0\big|_\Sigma = \varphi^0(q^1, q^2)\vec{\zeta}^0,$$

где скалярная функция φ^0 определяет амплитуду собственного вектора (волны Лява), а $\vec{\zeta}^0$ – его поляризацию. Вектор поляризации допускает ту или иную нормировку и является предметом дальнейших построений.

Предполагая для простоты координаты q^1, q^2, q^3 декартовыми, запишем систему (1.7) для вектора $\vec{\zeta}^0 = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_n)$ в виде

$$\begin{cases} (\hat{a}_{i1\alpha1} - \rho l_t^2)\zeta_1 + \hat{a}_{i1\alpha2}\zeta_2 + \hat{a}_{i1\alpha3}\zeta_n = 0, \\ \hat{a}_{i2\alpha1}\zeta_1 + (\hat{a}_{i2\alpha2} - \rho l_t^2)\zeta_2 + \hat{a}_{i2\alpha3}\zeta_n = 0, \\ \hat{a}_{i3\alpha1}\zeta_1 + \hat{a}_{i3\alpha2}\zeta_2 + (\hat{a}_{i3\alpha3} - \rho l_t^2)\zeta_n = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\hat{a}_{ij\alpha\beta} \equiv a_{ij\alpha\beta}l^i l^\alpha$ и в коэффициентах системы (2.1) по свободным индексам $i, \alpha = 1, 2, 3$ предполагается суммирование. Разлагая определитель системы (2.1) по элементам 3-ей строки, представим характеристическое уравнение матрицы $\mathbb{A}$ в следующей форме

$$\det(\mathbb{A} - \rho l_t^2 I) = (\hat{a}_{i3\alpha3} - \rho l_t^2)\big\{[\rho l_t^2 - \hat{a}_{i1\alpha1})(\rho l_t^2 - \hat{a}_{i2\alpha2}) - \\ - (\hat{a}_{i1\alpha2})^2] + \mathcal{E}(q^1, q^2, l^j)\big\} = 0, \tag{2.2}$$

$$\mathcal{E}(q^1, q^2, l^j) \equiv \hat{a}_{3i\alpha1}\big[\hat{a}_{3\alpha i2}\hat{a}_{i1\alpha2} + (\rho l_t^2 - \hat{a}_{i2\alpha2})\hat{a}_{3\alpha i1}\big] + \\ + \hat{a}_{3i\alpha2}\big[(\rho l_t^2 - \hat{a}_{i1\alpha1})\hat{a}_{3\alpha i2} + \hat{a}_{3\alpha i1}\hat{a}_{i2\alpha1}\big],$$

I – единичная матрица.

Далее, пользуясь уравнениями системы (2.1), для функции $\mathcal{E}$ получим

$$\vec{\mathcal{E}}(q^1,q^2,l^j)=$$
$$=\frac{(\zeta_n)^2(\rho l_t^2-\hat{a}_{i3\alpha 3})}{\zeta_1\zeta_2}\left[(\rho l_t^2-\hat{a}_{i3\alpha 3})+\hat{a}_{3i\alpha 1}\hat{a}_{3i\alpha 2}\right] \quad (2.3)$$

Равенство (2.2) – уравнение 3-ей степени относительно $\lambda=\rho l_t^2$, и в силу симметрии матрицы $\mathbb{A}$, все корни λ_r, $r=1,2,3$, этого уравнения вещественны. Пусть $\lambda=\lambda_0$ – один из этих корней и пусть $\zeta_n|_\Sigma=0$. Тогда из (2.2), (2.3) и результатов [1] немедленно следует, что λ_0 – один из корней уравнения

$$(\rho l_t^2-a_{i1\alpha 1}l^il^\alpha)(\rho l_t^2-a_{i2\alpha 2}l^il^\alpha)=(a_{i1\alpha 2}l^il^\alpha)^2. \quad (2.4)$$

Корни $(\rho l_t^2)_{1,2}$ полученного биквадратного уравнения (2.4) различны и имеют вид

$$(\rho l_t^2)_{1,2}=\frac{(\hat{a}_{i1\alpha 1}+\hat{a}_{i2\alpha 2})\mp\sqrt{D}}{2}. \quad (2.4a)$$

Отметим, что на некторых направлениях ∇l возможно совпадение одного из корней уравнения (меньшего) с корнем уравнения $\rho l_t^2-\hat{a}_{i3\alpha 3}=0$. В этих случаях происходит поляризационное вырождение волны, связанное с существованием кратного корня, что, в частности, имеет место в изотропной упругой среде.

Мы можем таким образом сформулировать

Утверждение 1. *Поверхностная волна с амплитудой $\vec{A}^0$ и поляризацией $A_n^0\big|_\Sigma=0$ может возникнуть на поверхности Σ только в том случае, если корень характеристического уравнения оператора $\mathbb{A}=(a_{ij\alpha\beta}l^il^\alpha)$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения (2.4) оператора $\tilde{\mathbb{A}}=(a_{ij'\alpha\beta'}l^il^\alpha)$, $j',\beta'=1,2$.*

Пусть $A_n^0\big|_\Sigma=0$, или, что то же, $\zeta_n|_\Sigma=0$. Тогда система (2.1), а следовательно, и (1.7), переопределена, и как мы только что установили, собственное число $\lambda=\rho l_t^2$ матрицы $\mathbb{A}$ оказывается корнем уравнения (2.4). В то же время при $\zeta_n|_\Sigma=0$ из 3-его уравнения системы (2.1) следует

$$(\vec{\zeta}^0,\vec{\eta}_0)=0,\quad \vec{\eta}_0=(a_{3i\alpha 1}l^il^\alpha,\ a_{3i\alpha 2}l^il^\alpha), \quad (2.6)$$

что полностью определяет поляризацию вектора $\vec{\zeta}^0=(\zeta_1,\zeta_2)$ на поверхности Σ.

Очевидно, равенства (2.6) и $\zeta_n|_\Sigma=0$ не являются независимыми и выполняются в каждой точке $M\in\Sigma$ лишь при определенной взаимосвязи l_1, l_2, l_3 (компоненты вектора $\vec{\eta}_0$ из (2.6) – функции l_j). Опишем процедуру, позволяющую в текущей точке $M \in \Sigma$ выделить те значения $l_j = \frac{\partial l}{\partial q^j}$, $j = 1, 2, 3$ (установить их взаимосвязь), на которых $\zeta_n = 0$ ($A_n^0 = 0$).

Введем тройку линейно-независимых векторов $\vec{\zeta}^0, \vec{n}, \vec{\eta}$, так что $(\vec{\zeta}^0 \times \vec{n})\vec{\eta} \neq 0$ (вектор $\vec{\eta}$ пока не определен). Проектируя (2.1), или векторное уравнение (1.7), соответственно на $\vec{\zeta}^0, \vec{\eta}$ и $\vec{n}$, получим систему (на Σ):

$$\begin{cases} \hat{a}_{ij\alpha\beta}\zeta_j\zeta_\beta = \rho l_t^2|\vec{\zeta}^0|^2, \; i,j,\alpha,\beta = 1,2,3 & (2.7а)\\ \hat{a}_{ij\alpha\beta'}\zeta_j\eta_{\beta'} = \rho l_t^2(\vec{\zeta}^0, \vec{\eta}_s), & (2.7б)\\ \hat{a}_{3j\alpha\beta}\zeta_\beta = \rho l_t^2\zeta_n, \quad (\vec{\eta} = \vec{\eta}_s + \eta_n\vec{n}) & (2.7в) \end{cases}$$

Пусть $\zeta_n|_\Sigma = 0$. Полагая $\vec{\eta}_s = \vec{\eta}_0$ из (2.6) и учитывая, что уравнение (2.7в) в этом случае совпадает с (2.6), получим систему двух уравнений, к которой сводится (2.7а, б, в):

$$\begin{cases} a_{ij'\alpha\beta'}\zeta_{j'}\zeta_{\beta'} = \rho l_t^2|\vec{\zeta}^0|^2, & (2.8а)\\ (\chi - \frac{1}{\chi})\hat{a}_{i1\alpha2} = \hat{a}_{i2\alpha2} - \hat{a}_{i1\alpha1}, & (2.8б) \end{cases}$$

где обозначено

$$\zeta_{2/\zeta_1} = \chi \equiv -\frac{\hat{a}_{3i\alpha1}}{\hat{a}_{3i\alpha2}}. \tag{2.8в}$$

Равенство (2.8б), где χ определено (2.8в), выражает два факта: во-первых, определяет зависимость между l_1, l_2, l_3 в точке M поверхности Σ, и, во-вторых, на направлениях $\nabla l = (l_1, l_2, l_3)$, выделяемых (2.8б), выполняется (2.6), т.е. векторы $\vec{\zeta}^0 = (\zeta_1, \zeta_2)$ и $\vec{\eta}_0$ ортогональны. Геометрически (2.8б) можно интерпретировать как поверхность в пространстве направлений (l_1, l_2, l_3) (каждой точке поверхности Σ соответствует своя поверхность 2.8б).

Можно показать, что собственное число $\lambda = \rho l_t^2$, определяемое системой (2.8а), (2.8б), является решением уравнения (2.4), что согласуется с Утверждением 1. Заметим, что уравнение (2.8а) при учете (2.8в) аналогично соотношению (15) из [1].

Итак, приходим к следующему результату:

Утверждение 2. *Собственный вектор $\vec{A}^0$ оператора $\mathbb{A}$ из (1.7), такой что*

$$A_n^0|_\Sigma = 0, \quad (\vec{A}^0, \vec{\eta}_0) = 0,$$

($\vec{\eta}_0$ – вектор из (2.6)) является одновременно собственным вектором матричного оператора $\tilde{\mathbb{A}} = (a_{ij'\alpha\beta'}l^i l^\alpha)$ только для тех $l_j = \frac{\partial l}{\partial q^j}$, $j = 1, 2, 3$, которые удовлетворяют равенству (2.8б), где $\chi \equiv -\hat{a}_{3i\alpha1}/\hat{a}_{3i\alpha2}$.

Следствие. *Равенство* (2.8б) *определяет зависимость между* l_1, l_2, l_3 *в каждой точке* $M(q^1, q^2) \in \Sigma$, *так что* l_3 *может быть найдена из этого равентсва как функция* l_1, l_2, q^1, q^2.

3. Алгоритм нахождения поперечно-поляризованной волны

Используя полученные выше результаты, поставим целью построить алгоритм определения избранных значений l_i, $i = 1, 2, 3$, (в каждой точке M поверхности Σ) таким образом, чтобы, оставаясь в рамках решения задачи (1.7) для собственного вектора $\vec{A}^0$, удовлетворить равенствам (1.8), т.е. краевым условиям (1.2) при $\gamma_\nu = 0$ или, что то же, уравнению (1.8а).

1. Так же, как и в предыдущем параграфе, запишем систему (2.1) в виде (2.7а,б,в), но в качестве вектора $\vec{\eta}$ возьмем теперь $\vec{\xi}_3$, т.е. положим $\vec{\eta}_s \equiv (\vec{\xi}_3)_s = (a_{33\alpha1} l^\alpha,\ a_{33\alpha2} l^\alpha)$, см. (1.9). Полагая

$$\zeta_n|_\Sigma = 0, \quad (\vec{\zeta}^0, (\vec{\xi}_3)_s) = 0, \tag{3.1}$$

мы получим систему (2.8а,б), (2.7в), где $\zeta_n = 0$, причем теперь

$$\chi \equiv -\hat{a}_{33\alpha1} l^\alpha / \hat{a}_{33\alpha1} l^\alpha. \tag{3.1а}$$

В данном случае системе (2.8а,б) (согласно Утверждению 2) соответствует задача определения двухкомпонентного собственного вектора $\vec{\zeta}^0$ (с поляризацией (3.1)) матричного оператора $\tilde{\mathbb{A}}$, см. выше.

Рассмотрим два множества направлений в пространстве (l_1, l_2, l_3), фиксируя точку M на Σ. Первое множество $\mathfrak{M}_1$ мы свяжем с системой (2.8а,б) при учете (3.1а). Очевидно, $\mathfrak{M}_1$ –это множество значений l_i, $i = 1, 2, 3$, принадлежащих поверхности (2.8б) (назовем ее S_1) на которой выполнено (3.1а). Второе множество $\mathfrak{M}_2$ свяжем с уравнением (2.7в), где $\zeta_n = 0$. В качестве $\mathfrak{M}_2$ рассмотрим поверхность конуса S_2, на котором векторы $(\vec{\xi}_1)_s$, $(\vec{\xi}_2)_s$ коллинеарны, [1], т.е. $(\vec{\xi}_1)_s \times (\vec{\xi}_2)_s = 0$, см. (1.9). На линии пересечения множеств $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$ (назовем ее $\mathcal{L}$), уравнение (2.7в) сводится к равенству

$$(\vec{\zeta}^0, (\vec{\xi}_1)_s) = 0, \quad \vec{\zeta}^0 = (\zeta_1, \zeta_2),$$

и вследствие (3.1), естественно потребовать, чтобы на $\mathcal{L}$ были коллинеарны векторы $(\vec{\xi}_{j'})_s$, $j' = 1, 2$ и $(\vec{\xi}_3)_s$ т.е.

$$(\vec{\xi}_{j'})_s \times (\vec{\xi}_3)_s = 0. \tag{3.2}$$

Равенство (3.2) является следствием наших рассуждений и согласуется с (1.9). В то же время (3.2) может быть обосновано математически, см. Приложение, откуда следует, что полученный в результате описанного алгоритма вектор $\vec{\zeta}^0$ (с поляризацией (3.1)) является собственным вектором не только матрицы $\mathbb{A}$, но и матрицы $\mathcal{A}$ из (1.8а).

Итак, мы приходим к следующему выводу:

Допустимые значения l_i, $i = 1, 2, 3$, (определяющие направления распространения волн Лява по Σ), на которых $\vec{A}^0$ удовлетворяет условиям (1.8), должны быть точками пересечения поверхностей S_1, S_2, S_3 в пространстве (l_1, l_2, l_3). Уравнения этих поверхностей имеют соответственно вид (2.8б), (3.1а) и (1.9).

2. Представим уравнения поверхностей S_1, S_2, S_3 в виде:

$$\begin{aligned}
S_1: \quad & a_{33\alpha1}l^\alpha\bigl\{l_3[(\xi_3)_2(\xi_1)_1 - (\xi_3)_1(\xi_1)_2]+\\
& + [(a_{33\alpha2}l^\alpha)\hat{a}_{\alpha1i'1} - (a_{33\alpha1}l^\alpha)\hat{a}_{\alpha2i'1}]\bigr\} =\\
& a_{33\alpha2}l^\alpha\bigl\{l_3[(\xi_3)_1(\xi_2)_2 - (\xi_3)_2(\xi_2)_1]+\\
& + [(a_{33\alpha1}l^\alpha)\hat{a}_{\alpha2i'2} - (a_{33\alpha2}l^\alpha)\hat{a}_{\alpha1i'2}]\bigr\},\\
& \alpha = 1, 2, 3; \qquad i' = 1, 2 \qquad\qquad (3.3)\\
S_2: \quad & (\xi_1)_1(\xi_2)_2 = (\xi_1)_2(\xi_2)_1 \quad \text{или}\\
& (a_{31\alpha1}l^\alpha)(a_{32\alpha2}l^\alpha) = (a_{31\alpha2}l^\alpha)(a_{32\alpha1}l^\alpha) \qquad\qquad (3.4)\\
S_3: \quad & (\xi_3)_1(\xi_1)_2 = (\xi_3)_2(\xi_1)_1 \quad \text{или}\\
& (a_{33\alpha1}l^\alpha)(a_{31\alpha2}l^\alpha) = (a_{33\alpha2}l^\alpha)(a_{31\alpha1}l^\alpha), \qquad\qquad (3.5)
\end{aligned}$$

$(\vec{\xi}_j)_{1,2}$ – компоненты векторов $(\vec{\xi}_j)_s$ из (1.9).

Мы оставляем в стороне вопрос о совместном решении уравнений (3.3), (3.4), (3.5) в общем случае тензора упругости (очевидное решение $l_1 = l_2 = l_3 = 0$ мы исключаем).

Тем не менее, пользуясь равенствами (3.3), (3.4), (3.5), представляющими собой необходимые условия возникновения поперечных волн Лява, мы можем указать те частные случаи анизотропных сред (типы симметрии упругой среды), когда какие-либо из этих равенств являются тождествами. Для приводимых ниже примеров анизотропных сред выражение для $\rho l_t^2 = H_0^2(q^1, q^2, l_j)$, определяемое из уравнения (2.4), оказывается на поверхности Σ уравнением эйконала для поля лучей волн Лява.

Поясним, какое именно решение уравнения (2.4) порождает упомянутое уравнение эйконала. Обратимся к системе (2.8а, б). Нетрудно убедиться, вводя в уравнение (2.8а) отношение $\chi = \zeta_2/\zeta_1$, что выражение для ρl_t^2, получаемое из (2.8а, б), удовлетворяет уравнению (2.4). Из физических соображений очевидно, см., [6], что полученное таким образом значение ρl_t^2 должно совпадать с

$(\rho l_t^2)_1 = (\rho l_t^2)_{\min}$ из (2.4а) (волна Лява распространяется по поверхности Σ с наименьшей из возможных скоростей).

Покажем, что ρl_t^2 будет наименьшим, если выполнено неравенство

$$\hat{a}_{i1\alpha 2} \cdot \frac{a_{33\alpha 1} l^\alpha}{a_{33\alpha 2} l^\alpha} > 0. \tag{3.6}$$

Действительно, выражая ρl_t^2 из (2.8а) через $\chi = -\frac{\hat{a}_{33\alpha 1}}{\hat{a}_{33\alpha 2}}$ (см. формулу (15) из [1]) и предполагая выполненным (3.6), легко видеть, что (2.8а) дает $\rho l_t^2 = (\rho l_t^2)_1$ из (2.4а).

а) Рассмотрим те частные случаи анизотропных сред (или, что то же, те типы симметрии упругой среды), для которых условия возникновения волн Лява приводят на Σ к равенству $\frac{\partial l}{\partial n}\Big|_{\gamma=0} = l_3\Big|_{\gamma=0} = 0$. Иными словами, множество допустимых значений $l_j = \frac{\partial l}{\partial q^j}$ есть плоскость (l_1, l_2). В этом случае в [1] были построены два типа симметрии среды для матрицы (c_{rs}) размера 6×6, к которой приводится тензор $(a_{ij\alpha\beta})$, [6, 7]. Векторы $(\vec{\xi}_j)_s$ находятся в виде:

$$(\vec{\xi}_2)_s = \vec{0}, \quad (\vec{\xi}_1)_s = (c_{51} l_1, c_{51} l_2), \quad (\vec{\xi}_3)_s = (c_{31} l_1, c_{31} l_2), \tag{3.6а}$$

так что равенства (3.4), (3.5) оказываются тождествами для любых l_1, l_2. При $l_3 = 0$ равенство (3.3) является полиномом 4 степени относительно $l_{j', j'=1,2}$. Если положить $c_{16} = c_{26} = 0$, то этот полином имеет вид

$$l_1^2 \left[(c_{12} + c_{66})\frac{c_{13}}{c_{23}} - (c_{11} - c_{66})\right] = \left[(c_{12} + c_{66})\frac{c_{23}}{c_{13}} - (c_{22} - c_{66})\right] l_2^2$$

и является тождеством, в частности, при условии

$$c_{11} = c_{22}, \quad c_{13} = c_{23}, \quad c_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2}. \tag{3.7}$$

Итак, получаем две матрицы c_{rs} (для 2-х типов анизотропии), которые определяются соответственно следующими равенствами

$$1) \qquad c_{41} = c_{42} = c_{46} = c_{56} = c_{36} = c_{26} = c_{16} = 0, \quad c_{15} = c_{25} \tag{3.8а}$$

$$2) \qquad c_{51} = c_{52} = c_{56} = c_{46} = c_{36} = c_{26} = c_{16} = 0, \quad c_{14} = c_{24} \tag{3.8б}$$

а также равенствами (3.7) как в случае 1), так и 2). В обоих случаях матрицы (c_{rs}) содержат 10 независимых параметров. К полученным типам симметрии среды могут быть отнесены как трансверсально-изотропная среда (в том числе изотропная), так и некоторые классы симметрии кристаллов, например, ромбические кристаллы (ортотропия), среды с осью симметрии 4-го порядка.

Можно, используя равенства (3.3), (3.4), (3.5), построить матрицу c_{rs} для того частного случая анизотропной среды, когда равенства (3.4), (3.5) оказываются тождествами относительно l_1, l_2, l_3, зависимость же l_3 от l_1, l_2 в каждой точке $M \in \Sigma$ определяется из равенства (3.3), которые в данном случае (с учетом (3.4), (3.5)) оказывается уравнением 3 степени относительно l_3. Но соответствующих вычислений мы здесь не приводим.

б) Обсудим физические следствия, связанные с результатами предыдущего пункта, и дадим им математическую интерпретацию.

Используя (3.8а, б), легко видеть, что в случаях 1) и 2)

$$\vec{\xi}_0 \equiv (\vec{\xi}_3)_s = (c_{31}\nabla_s l)_{n=0,\gamma=0},$$

где $\nabla_s l$ – касательная к Σ компонента ∇l, и что условие (3.6) выполнено при любых l_1, l_2 и имеет вид $(c_{12}+c_{66})l_1^2 > 0$. Обращаясь к системе (2.8а, б), где $\zeta_2/\zeta_1 = -(\xi_0)_1/(\xi_0)_2$, получим, что (2.8б) является тождеством, а (2.8а) (или, что то же, (15) из [1]) дает на Σ (при $\gamma = 0$)

$$\rho l_t^2 = \frac{c_{11} - c_{12}}{2}(\nabla_s l)^2, \quad c_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2}, \tag{3.9}$$

и, как легко убедиться, ρl_t^2 совпадает с $\lambda_1 = (\rho l_t^2)_1$ из (2.4а) – наименьшим из 2-х корней уравнения (2.4).

Уравнение (3.9) дает ПВ уравнение эйконала на поверхности Σ (в нашем случае эта поверхность – плоскость), так что волна Лява типа SH в нулевом приближении асимптотики является волной сдвига. Параметр $c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$ (модуль сдвига) характеризует жесткость упругой среды и определяет скорость упомянутой волны $v^2 = c_{66}/\rho$.

в) Остановимся на математическом аспекте примененного алгоритма, приводящего к равенствам (3.3), (3.4), (3.5). Если эти равенства выполнены, то $A_n^0\big|_\Sigma = 0$ (или $\vec{\zeta}^0\big|_{\vec{n}} = 0$) при $\gamma = 0$, и из (2.2), (2.3) получаем

$$\det(\mathbb{A} - \lambda I) = -(\lambda - \hat{a}_{i3\alpha 3})\left[(\lambda - \hat{a}_{i2\alpha 2})(\lambda - \hat{a}_{i1\alpha 1}) - (\hat{a}_{i1\alpha 2})^2\right] = 0$$
$$\lambda \equiv \rho l_t^2, \tag{3.10}$$

В силу (2.4), (2.4а) выражение (3.10) означает, что матрица $\mathbb{A}$ приведена к главным осям в системе координат $(\vec{\zeta}^0, \vec{\xi}_0, \vec{n})$ (на поверхности Σ). Специфический же вид левой части (3.10) характеризует вещественную матрицу $\mathbb{A}$, согласно [8], как двуосный симметрический тензор с различными собственными значениями

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, такими, что $\lambda_{1,2} = (\rho l_t^2)_{1,2}$ – суть корни (2.4а) уравнения (2.4), а $\lambda_3 = \hat{a}_{i3\alpha 3}$. При этом должно выполняться неравенство

$$\lambda_1 < \lambda_3 < \lambda_2. \tag{3.10a}$$

Пусть упругая среда трансверсально-изотропная, тогда $c_{44} = c_{55}$ и в силу $l_3\big|_{\Sigma} = 0$ имеем

$$\lambda_3 = \hat{a}_{i3\alpha 3} = (c_{44}(\nabla_s l)^2)_{n=0}, \quad \lambda_1 = (\rho l_t^2)_1 = \mu(\nabla_s l)^2,$$

и (3.10а) приводит к требованию

$$c_{44} > \mu, \quad \mu \equiv \frac{c_{11} - c_{12}}{2}.$$

Отметим, что это неравенство возникает не из физических соображений, а как следствие [8].

Приложение

Приведем доказательство колинеарности векторов $(\vec{\xi}_{j'})_s$ $(\vec{\xi}_3)_s$ на пересечении $\mathcal{L} := \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$ множеств $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$. На линии $\mathcal{L}$ по построению имеем $A_n^0 = 0\,(\zeta_n = 0)$ и если ρl_t^2 – корень уравнения (2.4а), то в силу (2.2), (2.3) на Σ должно выполняться равенство $\mathcal{E}(q^1, q^2, l^j) = 0$. Полагая $(\rho l_t^2) = (\rho l_t^2)_1$ из (2.4а), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \hat{a}_{i1\alpha 2}\Bigg\{ (\hat{a}_{3i\alpha 1})^2 \left[\frac{\hat{a}_{3i\alpha 2}}{\hat{a}_{3i\alpha 1}} + \frac{(\hat{a}_{i1\alpha 1} - \hat{a}_{i2\alpha 2}) - \sqrt{D}}{2\hat{a}_{i1\alpha 2}} \right] + \\ + (\hat{a}_{3i\alpha 2})^2 \left[\frac{\hat{a}_{3i\alpha 1}}{\hat{a}_{3i\alpha 2}} + \frac{(\hat{a}_{i2\alpha 2} - \hat{a}_{i1\alpha 1}) - \sqrt{D}}{2\hat{a}_{i1\alpha 2}} \right] = 0. \end{aligned} \tag{1_1}$$

На множестве $\mathfrak{M}_1$ (поверхность S_1) из (2.8б), где $\chi = -\frac{(\xi_3)_1}{(\xi_3)_2}$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{(\hat{a}_{i2\alpha 2} - \hat{a}_{i1\alpha 1}) - \sqrt{D}}{2\hat{a}_{i1\alpha 2}} &= -\frac{(\xi_3)_1}{(\xi_3)_2}, \\ \frac{(\hat{a}_{i1\alpha 1} - \hat{a}_{i2\alpha 2}) - \sqrt{D}}{2\hat{a}_{i2\alpha 2}} &= -\frac{(\xi_3)_2}{(\xi_3)_1}. \end{aligned} \tag{1_2}$$

Таким образом, на $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$, как следует из ($1_1$) и ($1_2$), должно выполняться соотношение

$$\frac{(\xi_3)_1}{(\xi_3)_2} = \frac{\hat{a}_{3i\alpha 1}}{\hat{a}_{3i\alpha 2}}, \tag{1_3}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{a}_{3i\alpha 1} &= l_1(\xi_1)_1 + l_2(\xi_2)_1 + l_3(\xi_3)_1, \\ \hat{a}_{3i\alpha 2} &= l_1(\xi_1)_2 + l_2(\xi_2)_2 + l_3(\xi_3)_2, \end{aligned} \tag{1_4}$$

где векторы $(\vec{\xi}_1)_s$ и $(\vec{\xi}_2)_s$ по предположению (см. §3) коллинеарны, т.е. $(\vec{\xi}_2)_s = \delta(\vec{\xi}_1)_s$, $\delta = \text{const}$. Но тогда из (1_3), (1_4) следует

$$\frac{(\xi_3)_1}{(\xi_3)_2} = \frac{(\xi_1)_1}{(\xi_1)_2},$$

т.е. на $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$ (множество допустимых значений l_i, $i = 1,2,3$) векторы $(\vec{\xi}_3)_s$ и $(\vec{\xi}_{j'})_s$, $j' = 1,2$ должны быть коллинерны, что и требовалось доказать.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–011–16148).

Литература

1. З. А. Янсон, *Нестационарные волны Лява типа SH в анизотропной среде. Кинематический подход.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **210** (1994), 262–276.
2. З. Я. Янсон, *К вопросу о нестационарных волнах Лява вблизи поверхности анизотропного упругого тела.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **203** (1992), 166–172.
3. З. А. Янсон, *Нестационарные волны Лява вблизи поверхности трансверсально-изотропного упругого тела.* — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. т. 30, Л, 1990, с. 113–125.
4. В. Д. Ажоткин, В. М. Бабич, *О распространении волн Лява вдоль поверхности анизотропного тела произвольной формы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **165** (1987), 9–14.
5. В. М. Бабич, З. А. Янсон, *О распространении волн Лява вдоль поверхности упругого тела произвольной формы.* — Изв. АН СССР, Физика Земли No.5 (1985), 17–27.
6. Г. И. Петрашень, *Распространение волн в анизотропных упругих средах.* Л, 1980.
7. И. Н. Снеддон, Д. С. Берри, *Классическая теория упругости.* М, 1961.
8. Ф. И. Федоров, *Оптика анизотропных сред.* Минск, 1958.

Yanson Z. A. Kinematic approach to nonstationary *SH* Love waves in anisotropic elastic media. II.

In this paper the author continues the study of high-frequency surface Love waves (analogous with well-known transversal shear waves) in anisotropic elastic media. Since the setting of the problem does not depend on a specific form of the elasticity tensor, it becomes possible to develop an algorithm relating the direction in which a surface wave propagates to its polarization transversity. The proposed algorithm was expoited to single out the special cases of anisotropy where the directions found correspond to the eikonal equation on the surface of an elastic body. The space-time ray technuque in these cases enables the construction of the of Love wave under study.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 25 июля 1994 г.