



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. V. Proskurin, Cubic symplectic theta-functions,
Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 1987, Volume 162, 186–
188

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that
you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.83

January 21, 2025, 11:36:43



КУБИЧЕСКИЕ СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ТЭТА-ФУНКЦИИ

1.1. Мы анонсируем здесь существование двух металеитических форм θ_V и θ_Λ , которые, следуя известной аналогии называем кубическими симплектическими тэта-функциями. Они определены на пространстве $X = \mathbb{C}^4 \times \mathbb{R}_+^{*2}$, которое изоморфно как вещественное аналитическое многообразие $Sp(4, \mathbb{C})/Sp(4)$. Посредством изоморфизма доставляемого разложением Ивасава на X определяется действие группы $Sp(4, \mathbb{C})$. Пусть Γ — главная конгруэнц-подгруппа $\text{mod } z$ в $Sp(4, \mathbb{C})$, \mathcal{O} — кольцо целых чисел поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Металеитические формы θ_V, θ_Λ автоморфны относительно Γ и имеют системой мультипликаторов кубический гомоморфизм Басса-Милнора-Серра $\Psi: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$, [1].

1.2. Аналогия, упомянутая выше, основана на конструкции Мааса [3] квадратичной тэта-функции как вычета ряда Эйзенштейна. В силу этой аналогии функцию исследованную Куботой и Паттерсоном, смотрите [4], называют кубической тэта-функцией на $SL(2, \mathbb{C})/Su(2)$; мы обозначим ее θ_* . Еще одна кубическая тэта-функция была найдена в моей работе [6], она определена на $SL(3, \mathbb{C})/Su(3)$. Из результатов Каждана и Паттерсона [2] следует, что кубических тэта-функций на $SL(n, \mathbb{C})/Su(n)$, $n > 4$, нет.

1.3. Все предварительные построения анонсированы нами ранее в [7]. Пусть $E(\cdot, s; \theta_*) : X \rightarrow \mathbb{C}$ — ряд Эйзенштейна соответствующий θ_* ; $s \in \mathbb{C}$. Из теорем 1,2 [7] и 8.1 [4] следует, что постоянный член этого ряда Эйзенштейна равен

$$\frac{3^{\frac{5}{2}}}{2} D_{0,0}(s, \frac{2}{3}) J_{0,0}(u, y, s, \frac{2}{3}); \quad u, y \in \mathbb{R}_+^*, s \in \mathbb{C}; \quad (1)$$

здесь

$$D_{0,0}(s, \frac{2}{3}) = \frac{\zeta_x(3s-9)\zeta_x(\frac{3}{2}s-5)}{\zeta_x(3s-8)\zeta_x(\frac{3}{2}s-3)}, \quad \zeta_x(s) = (1 - \frac{1}{3^s})\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(s), \quad (2)$$

а $J_{0,0}$ определяется интегралом, который вычисляется явно, —

$$J_{0,0}(u, y, s, \eta) = \frac{2^5 3^{-\frac{15}{2}} \eta^3 u^{-\frac{2}{3}} y^{6-s}}{(s-3)(s-\eta-2)(s+\eta-4)}. \quad (3)$$

Из свойств дзета-функции Дедекинда $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}$ следует, что посто-

янный член ряда Эйзенштейна имеет простые полюса в точках $\frac{10}{3}$ и 4.

I.4. Мы полагаем:

$$\theta_V = \operatorname{Res}_{s=\frac{10}{3}} E(\cdot, s; \theta_*) ; \theta_\Lambda = \operatorname{Res}_{s=4} E(\cdot, s; \theta_*). \quad (4)$$

Функции (4) являются кубическими симплектическими металегитимскими формами в смысле определения данного в [7]; они, конечно, $\neq 0$.

I.5. Пусть F одна из функций (4) и $c_{\mu, \nu}(u, y, F)$ ее коэффициент Фурье, $\mu, \nu \in (\sqrt{-3})^{-3} \mathcal{O}$, $u, y \in \mathbb{R}_+^*$ смотрите (4) [7]. Эти коэффициенты, в принципе, могут быть вычислены на основе теорем 2 [7] и 8.I [4].

I.6. Проще всего найти коэффициенты Фурье с $\mu = \nu = 0$:

$$c_{0,0}(u, y, \theta_V) = 2^{-4} 3^{-\frac{1}{2}} \pi^4 \log 3 \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(0) \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(2) u^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{8}{3}}, \quad (5)$$

$$c_{0,0}(u, y, \theta_\Lambda) = 2^{-1} 3^{-\frac{5}{2}} 5^{-1} \pi^4 \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(4)^{-1} u^{-\frac{2}{3}} y^2.$$

I.7. Несколько сложнее вычисление коэффициентов Фурье с $\mu=0$, $\nu \neq 0$:

$$c_{0,\nu}(u, y, \theta_V) = 2^{-5} 3^{-\frac{13}{2}} \pi^2 \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(2)^{-2} \tilde{Q}'(\nu, 1) J_{0,\nu}(u, y; \frac{10}{3}, \frac{2}{3}), \quad (6)$$

$$c_{0,\nu}(u, y, \theta_\Lambda) = 2^{-\frac{7}{3}} 5^{-1} \pi^{\frac{5}{3}} \Gamma(\frac{2}{3})^{-1} \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(2)^{-1} \frac{\overline{\tau(\nu)}}{|\nu|^{\frac{1}{3}}} J_{0,\nu}(u, y; 4; \frac{2}{3}) \quad (7)$$

здесь: τ из теоремы 8.I[4]; $J_{0,\nu}(u, y, s, \frac{2}{3})$ определено в [7] для s с достаточно большой $\operatorname{Re} s$ и продолжается до мероморфной функции на \mathbb{C} , регулярной в точках $s = \frac{10}{3}, 4$; $\tilde{Q}'(\nu, \cdot)$ обозначает производную функции $\tilde{Q}(\nu, \cdot)$. Я не имею в настоящий момент явных формул для $\tilde{Q}'(\nu, 1)$.

I.8. Существенно сложнее вычислить коэффициенты Фурье

$c_{\mu, \nu}(u, y, \theta_V)$ и $c_{\mu, \nu}(u, y, \theta_\Lambda)$ с $\mu \neq 0$. Здесь, в частности, необходимо знать вычеты в точке $\frac{10}{3}$ функций $P(\nu, \cdot)$ определяемых рядом Дирихле

$$P(\nu, s) = \sum_{\substack{c+1+q \\ (c,\nu)=1}} \frac{S(\nu, c)^2}{|c|^s} \quad (8)$$

в области $\operatorname{Re} s > 4$ (и продолжающихся мероморфно на \mathbb{C}). Ряды (8) с $\nu = 1$ исследовались Паттерсоном [5]. В частном случае, когда

$\mu = \nu = 1$, мы имеем просто

$$c_{1,1}(u, \varphi, \theta_\nu) = 2^{-3} 3^2 \sum_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})} (2)^{-1} \overline{\text{Res}}_{s=\frac{10}{3}} P(1,5) J_{\mu,\nu}(u, \varphi, \frac{10}{3}, \frac{4}{3}), \quad (9)$$

где $J_{\mu,\nu}$ из [7]. Полные вычисления будут проведены позднее.

Литература

1. H. Bass, J. Milnor and S.-J. Serre, "Solution of the congruence subgroup problem for SL_n ($n \geq 3$) and Sp_{2n} ($n \geq 2$)", Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., No. 33, 59-137 (1967).
2. D. A. Kazhdan and S. J. Patterson, "Metaplectic forms", Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., No. 59, 35-142 (1984).
3. H. Maass, "Konstruktion ganzer Modulformen halbzahliger Dimension", Abh. Math. Semin. Univ. Hamb. 12, 133-162 (1937).
4. S. J. Patterson, "On cubic analogue of the theta series I, II", J. Reine Angew. Math. 296, 125-161, 217-220, (1977).
5. S. J. Patterson, "On Dirichlet series associated with cubic Gauss sums", J. Reine Angew. Math. 303/304, 102-143 (1978).
6. N. V. Proskurin "Automorphic functions and the Bass-Milnor-Serre homomorphism, I, II", Zap. Nauch. Sem. LOMI, 129, 85-126, 127-163, (1983). (Translation from Russian to English: Journal of Soviet Mathematics, vol. 29, No. 2, april 1985, 1150-1191, 1192-1218).
7. N. V. Proskurin, "On cubic symplectic metaplectic forms", LOMI Preprint E-1-87, 1987.