С.Г.Бобков

ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ КАК БЕСКОНЕЧНОМЕРНОГО ГАУССОВСКОГО СДВИГА

Пусть $x_1,\dots,x_n$ – выборка, извлеченная из непрерывного на вещественной прямой $\mathbb{R}$ распределения F. Известно, что для выборочного распределения F_n "нормализованные" случайные функции $\xi_n(t)=\sqrt{n}\,(F_n(t)-F(t))$ сходятся по распределению к броуновскому мосту W^0, точнее – к распределению $\mathcal{L}(\xi)$ гауссовского случайного процесса $\xi(t)=W^0(F(t))$. Поэтому, при больших n функцию ξ_n можно рассматривать как одноэлементную выборку из $\mathcal{L}(\xi)$ или, что то же самое, выборочную функцию F_n – как одноэлементную выборку из распределения процесса $\frac{1}{\sqrt{n}}\xi+F$, и следовательно, по одному "наблюдению" F_n неизвестное $F=E\{\frac{1}{\sqrt{n}}\xi+F\}$ можно оценивать как сдвиг центрированного гауссовского процесса. Несколько неформальное (поскольку корреляционная функция ξ зависит от F) применение метода максимального правдоподобия к оцениванию бесконечномерного сдвига гауссовского процесса с известной корреляционной функцией (см.[I]) приводит к следующему определению.

Пусть V – произвольное семейство плотностей на $\mathbb{R}$. По набору $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$ определим $\hat{p}_n\in V$ равенством

$$\hat{p}_n=\arg\max_{p\in V}\left\{\frac{p(x_1)+\dots+p(x_n)}{n}-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}p(t)^2\,dt\right\}. \qquad (I)$$

Определение (I) нужно понимать так: если точка максимума в правой части (I) существует, то плотность $\hat{p}_n\in V$ – одна (любая) из этих точек. В следующем утверждении V таково, что $\hat{p}_n$ определена для почти всех значений выборки $x_1,\dots,x_n$ из распределения F, плотность которого $p\in V$.

ТЕОРЕМА. Предположим, что каждая плотность из V является функцией ограниченной вариации, причем

$$C=\sup_{q\in V}\operatorname{var} q<\infty. \qquad (2)$$

Тогда п.н.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{p}_n(t)-p(t)|^2\,dt\le 4C\max_{|t|}|F_n(t)-F(t)|. \qquad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Распределение случайной величины в правой части (3) не зависит от F, поэтому для истинного p с заданным уровнем значимости можно построить "доверительный" шар в $L^2(\mathbb{R},dx)$ с центром в $\hat{p}_n$ и радиусом порядка $const\cdot n^{-1/4}$. 2. В силу (2) $\int p^2(t)\,dt<\infty$ для всех $p\in V$ и, при этом, правая часть в (I) ограничена.

Доказательство теоремы основано на следующей ниже лемме.

© С.Г. Бобков, 1989

Пусть $V \subset H \subset E$, E – линейное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_E$, H – линейное подпространство E, причем определена билинейная форма $\langle \eta, x\rangle$ на $H \times E$ со свойствами: I) $\forall \eta_1, \eta_2 \in H$ $\langle \eta_1, \eta_2\rangle = \langle \eta_2, \eta_1\rangle$, 2) $\forall \eta \in H$ $\langle \eta, \eta\rangle \geqslant 0$, 3) $\forall \eta \in V$ $|\langle \eta, x\rangle| \leqslant C \cdot \|x\|_E$ при любом $x \in E$.

Свойства I)–2) задают на $H \times H$ скалярное произведение (быть может, без свойства отделимости), которое порождает в H евклидово расстояние $\|\eta - \theta\|_H$. Определим, как и в (I)

$$\hat{\theta}(x) = \arg\max_{\eta \in V} \langle \eta, x\rangle - \frac{1}{2}\|\eta\|_H^2, \tag{4}$$

при условии, что максимум в (4) существует, и $\hat{\theta}(x)$ – любая из точек максимума.

ЛЕММА. Для всех $\theta \in V$ и всех $x \in E$, для которых $\hat{\theta}(x)$ определено, $\|\hat{\theta}(x) - \theta\|_H^2 \leqslant 4C\|x - \theta\|_E$.

Чтобы применить лемму к теореме, нужно положить: E – пространство конечных мер на прямой (функций ограниченной вариации) с равномерной нормой $\|x\|_E = \sup_t |x(t)|$, H состоит из тех $\eta \in E$, для которых существует плотность η' ограниченной вариации,

$$\langle \eta, x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta'(t)\, dx(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, d\eta'(t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. $\|\hat{\theta}(x) - \theta\|_H \geqslant \varepsilon \Rightarrow \exists \eta \in V, \|\eta - \theta\|_H \geqslant \varepsilon$, такое что $\langle \eta, x\rangle - \frac{1}{2}\|\eta\|_H^2 = \sup_{\eta \in V}\{\langle \eta, x\rangle - \frac{1}{2}\|\eta\|_H^2\} \geqslant \langle \theta, x\rangle - \frac{1}{2}\|\theta\|_H^2 \Rightarrow$ $\exists \eta \in V, \|\eta - \theta\|_H \geqslant \varepsilon$, такое что $\langle \eta - \theta, x\rangle \geqslant \frac{1}{2}(\|\eta\|_H^2 - \|\theta\|_H^2) \Rightarrow$ $\exists \eta \in V$, $\|\eta - \theta\|_H \geqslant \varepsilon$, такое что $\langle \eta - \theta, x - \theta\rangle \geqslant \frac{1}{2}(\|\eta\|_H^2 - \|\theta\|_H^2) - \langle \eta - \theta, \theta\rangle = \frac{1}{2}\|\eta - \theta\|_H^2 \geqslant \frac{\varepsilon^2}{2}$. Но $\langle \eta - \theta, x - \theta\rangle \leqslant 2C\|x - \theta\|_E$ в силу 3). Имеем: $\|\hat{\theta}(x) - \theta\|_H \geqslant \varepsilon \Rightarrow 2C\|x - \theta\|_E \geqslant \frac{\varepsilon^2}{2}$. Остается положить $\varepsilon = \|\hat{\theta}(x) - \theta\|_H$.

Приведем пример непараметрического семейства. Пусть V_c состоит из плотностей, равных нулю на $(-\infty, 0]$, невозрастающих и непрерывных на $(0, +\infty)$ слева, причем предел слева в нуле $\leqslant C$. В этом случае плотность $\hat{p}_n$ имеет вид: $\hat{p}_n = \alpha_1$ на $(0, x_1]$, $\hat{p}_n = \alpha_2$ на $(x_1', x_2], \ldots$, $\hat{p}_n = \alpha_n$ на (x_{n-1}', x_n'), $\hat{p}_n = 0$ на $(x_n', +\infty)$, где $x_n' < \ldots < x_n'$ – вариационный ряд, построенный по выборке, а постоянные α_K реализуют максимум ($\Delta_K = x_K' - x_{K-1}'$, $\Delta_1 = x_1'$)

$$\max_{\substack{C \geqslant \alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n \geqslant 0 \\ \alpha_1 \Delta_1 + \ldots + \alpha_n \Delta_n = 1}} \left\{ \frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n} - \frac{1}{2}(\alpha_1^2 \Delta_1 + \ldots + \alpha_n^2 \Delta_n) \right\}.$$

Литература

I. Цирельсон Б.С. Геометрический подход к оценке максимального правдоподобия для бесконечномерного гауссовского сдвига. I.–Теория вероятн. и ее примен., 1982, т.XXVII, №2, с.388–395.