



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Хачатрян, О восстановлении дифференциального уравнения по спектру,
Функц. анализ и его прил., 1976, том 10, выпуск 1, 93–94

<https://www.mathnet.ru/faa2142>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.171

28 апреля 2025 г., 14:35:59



О ВОССТАНОВЛЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПО СПЕКТРУ

И. Г. Хачатрян

Рассмотрим следующую краевую задачу на отрезке $0 \leq x \leq \pi$:

$$(-1)^m y^{(2m)} + q(x) y = \lambda y, \quad (1)$$

$$y^{(2\nu)}(0) = y^{(2\nu)}(\pi) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2)$$

с $m \geq 1$ и $q(x) \in L_2(0, \pi)$. Обозначим через $\{\lambda_n\}_1^\infty$ последовательность собственных значений задачи (1), (2). Поставим вопрос об определении функции $q(x)$ по заданным собственным значениям $\{\lambda_n\}_1^\infty$. Будем предполагать, что

$$q(x) = q(\pi - x). \quad (3)$$

Ограничение (3) естественно, поскольку замена $q(x)$ на $q(\pi - x)$ не меняет спектра. Вещественность функции $q(x)$ не предполагается. Не нарушая общности, считаем, что

$$\int_0^\pi q(x) dx = 0. \quad (4)$$

Обозначим через $L_2'(0, \pi)$ класс функций из $L_2(0, \pi)$, удовлетворяющих условиям (3) и (4). В случае $m = 1$ при условии (3) и естественном предположении относительно последовательности $\{\lambda_n\}_1^\infty$ доказаны единственность и существование решения обратной задачи (см. [1]—[4]). В настоящей работе при $m \geq 2$ предполагается, что последовательность $\{\lambda_n\}_1^\infty$ (вообще комплексная) мало уклоняется от последовательности $\{n^{2m}\}_1^\infty$ собственных значений задачи (1), (2) с $q(x) \equiv 0$, и доказывается существование и единственность соответствующей функции $q(x)$, принадлежащей некоторому шару $\|q\|_2 < \rho$ пространства $L_2^*(0, \pi)$. Показано, что вне указанного шара в общем случае могут существовать другие функции $q(x)$, порождающие тот же спектр.

Целью настоящей заметки является следующее утверждение, которое мы формулируем при $m \geq 2$.

Т е о р е м а. Пусть дана последовательность чисел $\{\lambda_n\}_1^\infty$, удовлетворяющая условию

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n - n^{2m}|^2 \right)^{1/2} < \frac{1}{5} (2^{2m} - 1).$$

Тогда в шаре $\|q\|_2 < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[(2^{2m} - 1) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n - n^{2m}|^2 \right)^{1/2} \right]$ пространства $L_2'(0, \pi)$

существует и единственна функция $q(x)$ такая, что $\{\lambda_n\}_1^\infty$ является последовательностью собственных значений задачи (1), (2) с этой функцией. При этом функцию $q(x)$ можно найти методом последовательных приближений из следующего уравнения:

$$q(x) = f(x) + 2 \sum_{j=2}^{\infty} \underbrace{\int_0^\pi \dots \int_0^\pi}_{j} \Phi(x, t_1, \dots, t_j) q(t_1) \dots q(t_j) dt_1 \dots dt_j, \quad (5)$$

где

$$f(x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^{2m}) \cos 2nx, \quad (6)$$

$$\Phi(x, t_1, \dots, t_j) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [\sin nt_1 G_n(t_1, t_2) \dots G_n(t_{j-1}, t_j) \sin nt_j] \cos 2nx,$$

а $G_n(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_k \frac{\sin kx \sin kt}{\lambda_n - k^{2m}}$ (суммирование ведется по k таким, что $k \neq n$ и $k+n$ четно).

Сделаем несколько замечаний.

1°. Для сходимости ряда, стоящего в правой части (5), достаточно, чтобы было $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \|q\|_2 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n - n^{2m}|^2 \right)^{1/2} < 3^{2m} - 1$. Уравнение (5) при этом может быть решено относительно $q(x)$ методом последовательных приближений при условии

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n - n^{2m}|^2 \right)^{1/2} < \frac{3^{2m} - 1}{10 \sqrt{2\pi}}. \quad (7)$$

2°. Покажем, что решение $q(x)$ уравнения (5) является решением обратной задачи. Действительно, из (5) получаем, что

$$\frac{1}{2} \int_0^n q(x) \cos 2nx \, dx = -\frac{\pi}{2} (\lambda_n - n^{2m}) + \sum_{j=2}^{\infty} \int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi} \underbrace{\sin nt_1 G_n(t_1, t_2) \dots G_n(t_{j-1}, t_j)}_j \sin nt_j q(t_1) \dots q(t_j) dt_1 \dots dt_j, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Положив

$$y_n(x) = \sin nx + \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi} G_n(x, t_1) G_n(t_1, t_2) \dots G_n(t_{j-1}, t_j) \sin nt_j q(t_1) \dots q(t_j) dt_1 \dots dt_j,$$

непосредственной проверкой найдем, что $y_n(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$y_n(x) = \sin nx + \int_0^{\pi} G_n(x, t) q(t) y_n(t) dt, \quad (8)$$

причем $y_n^{(2\nu)}(0) = y_n^{(2\nu)}(\pi) = 0$, $\nu = 0, 1, \dots, m-1$. Из приведенных формул для $y_n(x)$ следует, что

$$\int_0^{2\pi} \sin nxy_n(x) [q(x) - \lambda_n + n^{2m}] dx = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

Дифференцируя (8) $2m$ раз, учитывая (9) и формулу для $G_n(x, t)$, окончательно получаем

$$(-1)^m y_n^{(2m)}(x) + q(x) y_n(x) = \lambda_n y_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

3°. Покажем, что в общем случае решение обратной задачи может быть неединственным. Пусть для простоты $m = 5$. Последовательности чисел $\{\lambda_n'\}_{1}^{\infty}$ и $\{\lambda_n''\}_{1}^{\infty}$ определим следующим образом: $\lambda_n' = n^{10}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), $\lambda_1'' = 2^{10}$, $\lambda_2'' = 1$, $\lambda_n'' = n^{10}$ ($n = 3, 4, 5, \dots$). Существенно, что обе последовательности удовлетворяют неравенству (7). Составим две функции $f(x)$ (см. (6)): $f_1(x) \equiv 0$ и $f_2(x) = -2(2^{10} - 1)(\cos 2x - \cos 4x)$. Из уравнения (5) в первом случае получим $q_1(x) \equiv 0$, а во втором случае $q_2(x) \not\equiv 0$, так как $f_2(x) \not\equiv 0$.

В заключение приношу благодарность В. Б. Лидскому за постановку задачи и постоянное внимание при выполнении работы.

Институт проблем механики
АН СССР

Поступило в редакцию
11 июня 1975 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Borg G., Acta Math. 78, № 2 (1946), 1—96.
2. Крейн М. Г., ДАН СССР 76, № 3, (1951), 345—348.
3. Гельфанд И. М., Левитан Б. М., Изв. АН СССР, серия матем. 15 (1951), 309—360.
4. Левитан Б. М., Гасымов М. Г., УМН XIX, вып. 2 (1964), 3—63.