В. А. Владимиров, Пример эквивалентности эффектов плотностной стратификации и вращения, *Докл. АН СССР*, 1985, том 284, номер 2, 310–313

Доклады Академии наук СССР
1985. Том 284, № 2

УДК 532 ГИДРОМЕХАНИКА

В.А. ВЛАДИМИРОВ

ПРИМЕР ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЭФФЕКТОВ ПЛОТНОСТНОЙ СТРАТИФИКАЦИИ И ВРАЩЕНИЯ

(Представлено академиком В.В. Новожиловым 1 III 1984)

1. Существование сходства (аналогии) между свойствами вращающихся и стратифицированных по плотности течений жидкости впервые отмечено Рэлеем в 1916 г. [1]. С тех пор опубликован ряд работ, в которых такое сходство успешно использовалось при решении задач теории волн, теории устойчивости, описания вторичных режимов и моделировании турбулентности (см. [2, 3]). В настоящей работе изучается класс движений во вращающейся жидкости, наиболее близких по свойствам к движениям стратифицированной жидкости.

2. Рассматриваются неустановившиеся движения несжимаемой однородной по плотности идеальной жидкости во вращающейся с постоянной скоростью $\underline{\Omega}/2$ системе координат. Система уравнений движения имеет вид [4]

$$D_0 \boldsymbol{u} + \Omega \times \boldsymbol{u} = -\nabla p^*, \quad D_0 \equiv \partial/\partial t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0; \tag{1}$$

здесь $\boldsymbol{u}$ — вектор скорости; p^* — модифицированное давление, включающее в себя "центробежную добавку", ∇ — вектор-градиент.

Пусть $\boldsymbol{n}$ — постоянный вектор, задающий фиксированное (во вращающейся системе) направление и составляющий с вектором $\underline{\Omega}$ угол θ, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. В настоящей работе изучается класс решений (1), поля скорости которых не изменяются вдоль направления $\boldsymbol{n}$.

Пусть в системе декартовых координат x, y, z ось x совпадает с направлением $\boldsymbol{n}$, а вектор $\underline{\Omega}$ лежит в плоскости x, y. Тогда $\underline{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, 0) = \Omega(\cos\theta, \sin\theta, 0)$, $\Omega \equiv |\underline{\Omega}|$. Для компонент поля скорости принимаем обозначения $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$. В исследуемом классе движений поля скорости и давления не зависят от координаты x:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(y, z, t), \quad p^* = p^*(y, z, t). \tag{2}$$

После введения формальных обозначений ρ и $\boldsymbol{g}$,

$$\rho \equiv u + \Omega_2 z, \quad \boldsymbol{g} = (0, 0, g) \equiv (0, 0, \Omega_2), \tag{3}$$

система уравнений (1) для движений (2) может быть преобразована к форме

$$\begin{aligned} &Dv = -p_y, \quad Dw = -p_z + \rho g, \\ &D\rho = 0, \quad v_y + w_z = 0, \quad D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}; \end{aligned} \tag{4}$$

здесь $p \equiv p^* - \Omega_1\psi + (\Omega_2 z)^2/2$, ψ — функция тока, для которой $v = -\psi_z$, $w = \psi_y$. Индексы из независимых переменных повсюду в статье обозначают частные производные. Для класса стационарных движений замена неизвестных $v \equiv \sqrt{\rho}\, v_c$, $w \equiv \sqrt{\rho}\, w_c$ приводит систему (4) к виду

$$\begin{aligned} &\rho D_c v_c = -p_y, \quad \rho D_c w_c = -p_z + \rho g, \\ &D_c\rho = 0, \quad \frac{\partial v_c}{\partial y} + \frac{\partial w_c}{\partial z} = 0, \quad D_c \equiv v_c\frac{\partial}{\partial y} + w_c\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \tag{5}$$

Видно, что величину ρ в (4), (5) можно формально трактовать как плотность жидкости, а g — как направленное вдоль оси y однородное поле тяжести. При этом система (5) совпадает с точными уравнениями движения стратифицированной жидкости, а (4) — с их приближенным видом, известным как "приближение Буссинеска" [5]. Следует отметить, что в уравнениях (5) величины v_c, w_c не компоненты скорости, однако если ограничиться только видом (5) и граничными условиями непротекания на твердых границах, то v_c и w_c можно формально трактовать как таковые.

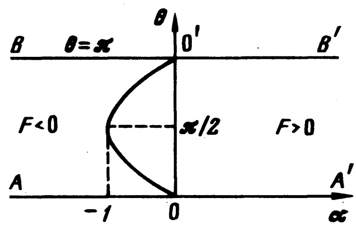

Рис. 1

Форма уравнений (4), (5) дает основание для перенесения как конкретных результатов, так и общих качественных представлений с хорошо изученного случая течений стратифицированной жидкости на движения из класса (2).

Нетрудно видеть, что для произвольной функции $u_0(z)$ течение (2) частного вида

$$(6) \qquad u = u_0(z), \quad v \equiv 0, \quad w \equiv 0$$

в терминах (4), (5) эквивалентно состоянию гидростатического равновесия с плотностью $\rho(z) = u_0(z) + \Omega_2 z$. "Архимедова" устойчивость или неустойчивость этого равновесия определяется знаком выражения

$$(7) \qquad F = F(\theta, \alpha) \equiv g\rho_z = \Omega^2 \sin\theta(\alpha + \sin\theta),$$

где $\alpha \equiv u_{0z}/\Omega$. Область определения функции $F(\theta, \alpha)$ есть полоса $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $-\infty < \alpha < +\infty$ (рис. 1). Равенство $F = 0$ имеет место на границах полосы AA' ($\theta = 0$), BB' ($\theta = \pi$) и на кривой OCO' ($\alpha = -\sin\theta$). Области $F > 0$ и $F < 0$ расположены правее и левее кривой OCO' соответственно. Знакопеременность F означает, что все движения (6), по крайней мере локально, расщепляются на три качественно различные группы: при $F > 0$ — убывание, при $F < 0$ — нарастание "плотности" ρ "вверх", равенство $F = 0$ соответствует нейтральной "стратификации" $\rho = \text{const}$. Если во всем течении $F > 0$, то в классе возмущений (2) поток устойчив, малые возмущения имеют вид внутренних волн. В противоположном случае $F < 0$ возмущения развиваются в "конвективные" движения.

Несколько более общее, чем (6), течение

$$(8) \qquad u = u_0(z), \quad v = v_0(z), \quad w \equiv 0$$

в терминах (4), (5) эквивалентно параллельному потоку стратифицированной жидкости со сдвигом скорости. Теория устойчивости таких потоков глубоко разработана [2, 6]. Величина F (7) здесь также играет ключевую роль, представляя собой квадрат "частоты Брента–Вяйсяля". В частности, к исследованию свойств профилей (8) приводит постановка задачи устойчивости параллельного течения во вращающейся щели между двумя плоскостями. Эта задача изучалась как независимая [7], однако значительное количество утверждений и, в частности, результаты [7] можно получить прямым перенесением со случая параллельных течений стратифицированной жидкости.

Для более общих полей (2) с $u_y \neq 0$ также и $\rho_y \neq 0$ (3). Последнее означает, что "плотность" ρ изменяется поперек "ускорения силы тяжести" g. Гидростатического равновесия в этом случае существовать не может. Поэтому задание начальных данных с $u_y \neq 0$, $v = w = 0$ всегда будет приводить к нестационарному движению.

3. Довольно распространены качественные представления, согласно которым общее твердотельное вращение жидкости "стабилизирующим" образом воздействует

на любые движения в ней. Под "стабилизацией" понимается вполне определенное качественное изменение свойств движений (решений (1)) при переходе от случая $\Omega = 0$ к $\Omega \neq 0$. Обычно подразумеваются два типа изменений: а) движения приобретают волновой характер (т.е. появляется набор собственных частот); б) происходит "усиление" свойств устойчивости течений. Для движений из класса (2) таким представлениям можно придать наиболее ясную трактовку на основе знака величины F. Из рис. 1 видно, что общее твердотельное вращение может играть три качественно различные роли, соответствующие "стабилизации" $F > 0$, "дестабилизации" $F < 0$ и полному отсутствию влияния на движения жидкости $F = 0$.

В то же время следует подчеркнуть, что в пределе возмущений бесконечно малой амплитуды имеет место только "стабилизация", поскольку при $\alpha \to 0$ все движения попадают на отрезок OO' оси $\alpha = 0$ (рис. 1), на котором $F \geqslant 0$. Наличие в линейной задаче принципа суперпозиции позволяет перенести вывод о "стабилизации" на возмущения произвольной формы. На этот же отрезок попадают также точные решения (4)

$$(9) \quad \rho = \Omega_2[z + \mathrm{Re}(ife^{i\Omega_2 t})], \quad v \equiv 0, \quad w = \mathrm{Re}(fe^{i\Omega_2 t}), \quad p = \Omega_2^2 z^2/2,$$

в которых $f = f(y)$ – произвольная комплексная функция. При $f(y) \equiv e^{iky}$ решения (9) широко известны под названием "волн Бьеркнесов" [4, 8, 9]. Однако для нелинейной задачи из вещественности частот (9) уже нельзя делать вывода о "стабилизации" для движений, отличных от (9).

Особо выделенными оказались движения с $F = 0$, которым соответствует "нейтральная" стратификация по "плотности" ρ. Без ограничения общности для них в (4) можно положить $\rho = 0$. Сюда относятся все движения (1), (2), поля которых не изменяются вдоль направления вектора Ω. На рис. 1 им соответствуют прямые $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Замечательным результатом здесь является отсутствие влияния общего вращения на движение. При одних и тех же начальных и граничных условиях течение одинаково во всех вращающихся системах отсчета. Этот результат впервые получен Тейлором [10].

Разное воздействие вращения на различные движения представляет собой наиболее существенное ограничение аналогии между эффектами плотностной стратификации и вращения. Это ограничение имеет место и в других ситуациях, в частности в задаче устойчивости течений с винтовыми и круговыми линиями тока [11, 12], где оно проявляется уже и для линеаризованных задач.

4. В случае вязкой жидкости класс движений (2) может быть несколько расширен включением в давление градиента по x: $p_x^* \equiv -q(t)$. Тогда

$$(10) \quad u = u(y, z, t), \quad p^* = p_0(y, z, t) - q(t)x.$$

Соответствующее обобщение уравнений (4) записывается так:

$$(11) \quad \begin{gathered} D_1 v = -p_y, \quad D_1 w = -p_z + \rho g, \\ D_1 \rho = q, \quad v_y + w_z = 0, \quad D_1 \equiv D - \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right); \end{gathered}$$

здесь ν – коэффициент кинематической вязкости.

При $q = 0$ вид (11) совпадает с уравнениями стратифицированной жидкости. К этому случаю относятся либо течения, происходящие за счет движения границ, либо нестационарные течения. При $q \neq 0$ поля (11) включают в себя, в частности, интересный класс напорных течений во вращающихся цилиндрических трубах с образующей цилиндра, параллельной оси x. Ограничений на форму сечения трубы и угол

θ между вектором $\underline{\Omega}$ и образующей не накладывается. Условие прилипания приводит к требованиям

$$(12) \quad \rho = \Omega_2 z, \quad v = 0, \quad w = 0$$

на стенках трубы. После этого описание движения вязкой жидкости во вращающейся трубе сводится к задаче (11); (12) для двумерных течений стратифицированной по плотности жидкости. Последняя задача весьма необычна, поскольку присутствуют источники "плотности" ρ и задаются значения ρ на границах. Более естественная интерпретация (11), (12) достигается посредством замены "плотности" ρ на "температуру" T (т.е. введением "уравнения состояния" $\rho = T$). В результате на границах окажется заданным распределение "температуры" T, а уравнения $D_1 T = q$ и $v_y + w_z = 0$ будут соответствовать наличию "источников тепла", изменяющих "температуру" и "плотность" без расширения (или сжатия) жидкости.

Для задачи (11), (12) очевидными как математически, так и физически являются следующие утверждения: а) при $q = 0$ единственное стационарное решение $\rho = \Omega_2 z$, $v = w = 0$ (твердотельное вращение жидкости); б) при $q \equiv \mathrm{const} \neq 0$ стационарных решений с $v = w = 0$ (отвечающих чисто продольному течению по трубе) не существует. Реализуются течения с поперечными циркуляциями, наблюдавшиеся в [13, 14]. Физическая причина таких циркуляций в терминах (4) состоит в том, что "тяжелая" жидкость тонет, а "легкая" всплывает.

В теории стратифицированных жидкостей постановка типа (11), (12) искусственная и не рассматривается. Поэтому наличие вязкости, вообще говоря, является ограничением для плодотворного применения изучаемой аналогии. В то же время для задачи устойчивости такого ограничения нет. Действительно, линеаризованные уравнения (11), (12) на амплитуды возмущений совпадают с соответствующей задачей устойчивости вязкой стратифицированной жидкости с диффузией плотности.

Институт гидродинамики им. А.А. Лаврентьева
Сибирского отделения Академии наук СССР,
Новосибирск

Поступило
21 III 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Линь Ц.Ц.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ, 1958. 194 с. 2. *Yih C.S.* Stratified Flows. N.Y.: Acad. Press, 1980. 418 p. 3. *Veronis G.* – Ann. Rev. Fluid Mech., 1970, vol. 2, p. 37–66. 4. *Гринспен Х.* Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеоиздат, 1975. 304 с. 5. *Филлипс О.М.* Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1980. 319 с. 6. *Drazin P.G., Howard L.N.* – Adv. Appl. Mech., 1966, vol. 9, p. 1–89. 7. *Johnston J.A.* – J. Fluid Mech., 1963, vol. 17, № 3, p. 337–352. 8. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. 625 p. 9. *Phillips O.M.* – Phys. Fluids, 1963, vol. 6, p. 513–520. 10. *Taylor G.I.* – Proc. Roy. Soc., 1917, vol. A93, p. 99–113. 11. *Владимиров В.А., Тарасов В.Ф.* – ДАН, 1980, т. 253, № 3, с. 565–568. 12. *Владимиров В.А.* В сб.: Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1978, вып. 37, с. 50–65. 13. *Кузьминский А.В., Смирнов Е.М., Юркин С.В.* – ПМТФ, 1983, № 6, с. 129–134. 14. *Смирнов Е.М., Юркин С.В.* – Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 6, с. 24–30.