Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2019. Том 26, № 2

УДК 514.755.5

О СТРОЕНИИ НЕКОТОРЫХ КОМПЛЕКСОВ m–МЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА P^n, СОДЕРЖАЩИХ КОНЕЧНОЕ ЧИСЛО ТОРСОВ. I

И. В. Бубякин

Аннотация. Статья посвящена дифференциальной геометрии ρ-мерных комплексов C^ρ m-мерных плоскостей проективного пространства P^n, содержащих конечное число торсов. В работе находится необходимое условие, при котором комплекс C^ρ содержит конечное число торсов. Выясняется строение ρ-мерных комплексов C^ρ, для которых все торсы, принадлежащие комплексу C^ρ, имеют одну общую характеристическую $(m+1)$-мерную плоскость, касающуюся вдоль m-мерной образующей торса. Такие комплексы обозначаются через $C^\rho(1)$. Определяется изображение комплексов $C^\rho(1)$ на $(m+1)(n-m)$-мерном алгебраическом многообразии $\Omega(m,n)$ пространства P^N, где $N = \binom{m+1}{n+1} - 1$, являющемся образом многообразия $G(m,n)$ m-мерных плоскостей проективного пространства P^n при грассмановом отображении.

DOI: 10.25587/SVFU.2019.102.31508

Ключевые слова: грассманово многообразие, комплексы многомерных плоскостей, многообразие Сегре.

1. Введение

Данные исследования являются продолжением работы [1]. Актуальность этой работы заключается в том, что дифференциальная геометрия грассмановых многообразий расширяет алгебраическую теорию грассмановых многообразий [2, 3], связана с исследованиями лагранжевых и квантовых грассмановых многообразий [4–7], а также представляет интерес для интегральной геометрии Радона — Хелгасона [8]. Данная работа посвящена дифференциальной геометрии допустимых [8] подмногообразий многообразия $G(m,n)$ m-мерных плоскостей проективного пространства P^n, содержащих конечное число торсов. Для изучения таких подмногообразий применяется грассманово отображение многообразия $G(m,n)$ на $(m+1)(n-m)$-мерное алгебраическое многообразие $\Omega(m,n)$ пространства P^N, где $N = \binom{m+1}{n+1} - 1$. В работе [9] М. А. Акивис отмечает, что пересечение алгебраического многообразия $\Omega(m,n)$ с его касательным пространством $T_l\Omega(m,n)$ представляет собой конус Сегре $C(m+1, n-m)$. Этот конус имеет размерность n и несет плоские образующие размерностей $n-m$ и $m+1$, пересекающиеся по прямым. Проективизация $PB_l(2)$ этого конуса есть многообразие Сегре $S(m, n-m-1) = P^m \times P^{n-m-1}$. Многообразие Сегре $S(m, n-m-1)$ инвариантно при проективных преобразованиях пространства $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l\Omega(m,n)$, являющегося проективизацией с центром в точке l касательного пространства $T_l\Omega(m,n)$ к алгебраическому многообразию $\Omega(m,n)$, и его будем использовать для классификации рассматриваемых подмногообразий грассманова многообразия $G(m,n)$, а также для интерпретации их свойств в терминах проективных алгебраических многообразий. Так как дифференциальная геометрия грассмановых многообразий далеко еще не изучена, то такой подход к их исследованию представляется актуальным. Следует заметить, что дифференциальная геометрия грассмановых многообразий представляет самостоятельный интерес для дифференциальной геометрии, а также одновременно является одним из важных средств построения и изучения других многообразий в проективных пространствах. Одной из наиболее красивых областей дифференциальной геометрии, где во всей полноте проявляются преимущества инвариантных бескоординатных методов исследования, является теория комплексов многомерных плоскостей проективного пространства [10]. Настоящая работа относится к многомерной проективно-дифференциальной геометрии, той ее части, в которой изучаются комплексы плоскостей различных размерностей в проективном пространстве. Некоторые комплексы m-мерных плоскостей в проективном пространстве P^n и являются объектом изучения в данной работе. При этом для различных классов этих комплексов будем определять изображение на алгебраическом многообразии $\Omega(m,n)$ с помощью различных видов взаимного расположения многообразия Сегре $S_l(m, n-m-1)$ и касательного пространства $PT_l\Omega(m,n)$.

2. К геометрии многообразия Сегре $S(m,n)$

Многообразием Сегре $S(m,n)$ [11] называется $(m+n)$-мерное алгебраическое многообразие в проективном пространстве P^N $(N = (n-m)(m+1)-1)$, параметрические уравнения которого можно записать в виде

$$z_i^p = x_i y^p, \tag{1}$$

где z_i^p — однородные координаты точки проективного пространства P^N и $i = 0, 1, \dots, m$, $p = 0, 1, \dots, n$. Из этого определения вытекает, что многообразие Сегре является образом прямого произведения $P^m \times P^n$ двух проективных пространств P^m и P^n размерностей соответственно m и n. Отметим одно важное свойство этих многообразий, а именно, эти многообразия остаются инвариантными при проективных преобразованиях пространства P^N, определяемых уравнениями

$$z_i'^p = a_q^p b_i^j z_j^q.$$

Многообразие Сегре $S(m,n)$ несет m-параметрическое семейство n-мерных плоских образующих: α-образующих, для получения параметрических уравнений которых необходимо зафиксировать в (1) однородные координаты y^p точки проективного пространства P^n, а также n-параметрическое семейство m-мерных плоских образующих: β-образующих, для получения параметрических уравнений которых следует зафиксировать в (1) однородные координаты x_i точки проективного пространства P^m. Через каждую точку многообразия Сегре $S(m,n)$ проходит одна плоская образующая одного семейства и одна плоская образующая другого семейства. Любые две плоские образующие различных семейств пересекаются в одной точке, а плоские образующие одного семейства не имеют общих точек. В общем случае многообразие Сегре $S(m,n)$ представляет собой пересечение квадрик:

$$z_i^p z_j^q - z_i^q z_j^p = 0.$$

Если $m = n = 1$, то многообразие Сегре $S(1,1)$ является невырожденной линейчатой квадрикой трехмерного проективного пространства. Многообразие Сегре $S(m,n)$ является алгебраическим многообразием и при этом [12, 13]

$$\deg S(m,n) = \binom{m}{n+m} = \binom{n}{n+m}.$$

Запишем однородные координаты точки проективного пространства P^N в виде прямоугольной матрицы размера $(m+1)\times(n+1)$:

$$Z = (z_i^p).$$

Тогда параметрические уравнения многообразия Сегре $S(m,n)$ равносильны одному условию:

$$\operatorname{rang}(z_i^p) = 1.$$

Рассмотрим многообразие Сегре $S(m,n)$, и пусть λ — гиперплоскость в проективном пространстве P^n. Многообразие всех α-образующих, когда соответствующие точки $\{y^p\}$ принадлежат гиперплоскости λ, лежат в одной k-мерной плоскости $\gamma(\lambda)$, где $k = (m+1)n - 1$. Тем самым образуется семейство k-мерных плоскостей $\gamma(\lambda)$. Через каждую α-образующую многообразия Сегре $S(m,n)$ проходит $(m-1)$-параметрическое семейство k-мерных плоскостей $\gamma(\lambda)$, где $y \in \lambda$. В сечении алгебраического многообразия Сегре $S(m,n)$ плоскостью $\gamma(\lambda)$ получается $(m+n-1)$-мерное многообразие Сегре $S_\lambda(m,n-1)$. Итак, многообразие Сегре $S(m,n)$ можно представить как семейство алгебраических многообразий Сегре $S_\lambda(m,n-1)$ для всех гиперплоскостей λ проективного пространства P^m. Рассмотрим теперь двойственные построения. Пусть μ — гиперплоскость в проективном пространстве P^n. Многообразие всех β-образующих, когда соответствующие точки $\{x_i\}$ принадлежат гиперплоскости μ, лежат в одной l-мерной плоскости $\delta(\mu)$, где $l = m(n+1) - 1$. Тем самым образуется семейство l-мерных плоскостей $\delta(\mu)$. Через каждую β-образующую многообразия Сегре $S(m,n)$ проходит $(n-1)$-параметрическое семейство l-мерных плоскостей $\delta(\mu)$, где $x \in \mu$. В сечении алгебраического многообразия Сегре $S(m,n)$ плоскостью $\delta(\mu)$ получается $(n+m-1)$-мерное многообразие Сегре $S_\mu(m-1,n)$. Таким образом, многообразие Сегре $S(m,n)$ можно представить как семейство алгебраических многообразий Сегре $S_\mu(m-1,n)$ для всех гиперплоскостей μ проективного пространства P^m. Заметим, что пересечение двух алгебраических многообразий $S_\lambda(m, n-1)$ и $S_\mu(m-1, n)$ для двух фиксированных гиперплоскостей λ и μ проективных пространств P^n и P^m представляет собой многообразие Сегре $S(m-1, n-1)$. Используя предыдущие рассуждения, можно произвести следующие построения. Многообразие Сегре $S(m, n)$ представляет собой семейство алгебраических многообразий Сегре $S_\lambda(m, n-1)$ для всех гиперплоскостей проективного пространства P^n, а каждое из многообразий $S_\lambda(m, n-1)$, в свою очередь, представляет собой семейство алгебраических многообразий Сегре $S_{\lambda\mu}(m-1, n-1)$ для всех гиперплоскостей μ проективного пространства P^m. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Многообразие Сегре $S(m, n)$ представляет собой семейство алгебраических многообразий Сегре $S_{\lambda\mu}(m-1, n-1)$ для всех гиперплоскостей λ и μ проективных пространств P^n и P^m.*

3. О строении комплексов $C^\rho(1)$ m-мерных плоскостей проективного пространства P^n, содержащих конечное число торсов

В настоящей работе мы продолжаем исследования, начатые в [1]. Рассмотрим в проективном пространстве P^n ρ-мерные комплексы C^ρ m-мерных плоскостей, содержащих конечное число торсов — развертывающихся поверхностей. Условие, при котором комплексы C^ρ содержат конечное число торсов, определяется из следующих рассуждений. Рассмотрим проективизацию касательной плоскости $T_l\Omega(m, n)$ с центром в точке l. Эта проективизация представляет собой проективное пространство $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l\Omega(m, n)$. На основании теоремы Грассмана [13] в этом проективном пространстве должно выполняться следующее равенство:

$$\begin{aligned}\dim PT_lV^\rho &+ \dim S_l(m, n-m-1)\\ &= \dim P^{(m+1)(n-m)-1} + \dim(PT_lV^\rho \cap S_l(m, n-m-1)).\end{aligned}$$

Если размерность пересечения плоскости PT_lV^ρ и многообразия Сегре $S_l(m, n-m-1)$ равна r, то

$$(\rho-1) + (m + (n-m-1)) = (m+1)(n-m) - 1 + r.$$

Отсюда следует, что

$$\rho - 1 = m(n-m-1) + r.$$

Утверждение, что комплекс C^ρ m-мерных плоскостей в проективном пространстве P^n содержит конечное число торсов, означает равенство нулю размерности пересечения плоскости PT_lV^ρ и многообразия Сегре $S_l(m, n-m-1)$, т. е. $r = 0$. Если $r = 0$, то искомую зависимость размерности комплекса C^ρ, его m-мерной образующей и проективного пространства P^n получаем в виде

$$\rho - 1 = m(n-m-1).$$

Таким образом, комплекс C^ρ m-мерных плоскостей в проективном пространстве P^n содержит конечное число торсов тогда и только тогда, когда размерность комплекса C^ρ, его m-мерной образующей и проективного пространства P^n связаны соотношением $\rho - 1 = m(n-m-1)$. Для конгруэнций прямых трехмерного пространства и пятимерных комплексов двумерных плоскостей пятимерного пространства, которые содержат конечное число торсов, обнаруживается инвариантная зависимость их строения от конфигурации характеристических $(m+1)$-мерных плоскостей, касательных к торсам, и характеристических $(m-1)$-мерных плоскостей в m-мерной образующей L этих многообразий (5). Отсюда возникает вопрос: имеют ли рассматриваемые комплексы C^ρ m-мерных плоскостей, содержащие конечное число торсов, подобную инвариантную зависимость? Комплексу C^ρ при грассмановом отображении [9] соответствует ρ-мерное многообразие V^ρ, лежащее на алгебраическом многообразии $\Omega(m,n)$, являющемся образом многообразия $G(m,n)$ m-мерных плоскостей проективного пространства P^n. В каждой своей точке l, соответствующей m-мерной плоскости L проективного пространства P^n, многообразие V^ρ имеет ρ-мерную касательную плоскость T_lV^ρ. Проективизация касательной плоскости T_lV^ρ с центром в точке l представляет собой $(\rho-1)$-мерную проективную плоскость PT_lV^ρ. Различным видам взаимного расположения плоскости PT_lV^ρ и инвариантного многообразия Сегре $S_l(m, n-m-1) = P^m \times P^{n-m-1}$, являющимся проективизацией асимптотического конуса $B_l(2)$ асимптотических направлений второго порядка, соответствуют различные классы комплексов $C^\rho \subset G(m,n)$. При этом конус $B_l(2)$ есть конус Сегре $C(m+1, n-m)$ и представляет собой пересечение алгебраического многообразия $\Omega(m,n)$ и его касательного пространства $T_l\Omega(m,n)$, т. е.

$$B_l(2) = \Omega(m,n) \cap T_l\Omega(m,n).$$

В проективном пространстве P^n рассмотрим семейство точечных реперов A_I $(I, J, K = 0, 1, \dots, n)$ и семейство реперов, образованных гиперплоскостями $\alpha^I = (-1)^I(A_0, \dots, A_{I-1}, A_{I+1}, \dots, A_n)$. Уравнения перемещения этих реперов имеют вид

$$dA_I = \omega_I^J A_J, \quad d\alpha^I = -\omega_J^I \alpha^J,$$

где ω_I^J — линейные дифференциальные формы, удовлетворяющие структурным уравнениям проективного пространства P^n:

$$d\omega_I^J = \omega_I^K \wedge \omega_K^J.$$

Пусть L — m-мерная плоскость пространства P^n. Свяжем с этой плоскостью семейство точечных реперов так, чтобы точки A_i, $i = 0, 1, \dots, m$, принадлежали плоскости L. Тогда

$$dA_i = \omega_i^j A_j + \omega_i^p A_p, dA_p = \omega_p^i A_i + \omega_p^q A_q,$$

где $i,j=0,1,\dots,m$ и $p,q=m+1,m+2,\dots,n$. Отсюда видно, что m-мерная плоскость L в пространстве P^n зависит от $(m+1)(n-m)$ параметров, линейными комбинациями дифференциалов которых являются формы ω_i^p. На многообразии $\Omega(m,n)$ асимптотические направления второго порядка, выходящие из точки l, определяются условием

$$d^2l=0(\mathrm{mod}\ T_l\Omega(m,n)).$$

Отсюда следует, что уравнения конуса $B_l(2)$ асимптотических направлений второго порядка имеют вид

$$\omega_i^p\omega_j^q-\omega_i^q\omega_j^p=0. \qquad (2)$$

Из этих уравнений видно, что координаты ω_i^p точки конуса $B_l(2)$ допускают параметрическое представление

$$\omega_i^p=a_ix^p. \qquad (3)$$

Поэтому конус $B_l(2)$ асимптотических направлений второго порядка совпадает с конусом Сегре $C_l(m+1,n-m)$. Рассмотрим теперь проективизацию касательной плоскости $T_l\Omega(m,n)$ с центром в точке l. Эта проективизация представляет собой проективное пространство $P^{(n-m)(m+1)-1}=P\mathrm{T}_l\Omega(m,n)$, в котором формы ω_i^p являются однородными координатами произвольной точки. При проективизации асимптотическому конусу $B_l(2)$ соответствует многообразие Сегре $S_l(m,n-m-1)$ проективного пространства $P^{(n-m)(m+1)-1}$, определяемого теми же уравнениями (2), что и конус $B_l(2)$ в касательном пространстве $T_l\Omega(m,n)$. Многообразие Сегре $S_l(m,n-m-1)$ представляет собой $((m+1)(n-m)-1)-m(n-m-1)=(n-1)$-мерную алгебраическую поверхность порядка $\binom{n-1}{m}=\binom{n-1}{n-m-1}$ [12, 13], несущую два семейства плоских образующих размерностей m и $n-m-1$, зависящих соответственно от $n-m-1$ и m параметров. При этом две образующие, принадлежащие различным семействам, имеют общую точку, а две образующие, принадлежащие одному семейству, не пересекаются. Через каждую его точку проходит по одной образующей из каждого семейства. Многообразие Сегре $S_l(m,n-m-1)$ остается инвариантным при проективных преобразованиях пространства $P^{(n-m)(m+1)-1}$. Плоскость PT_lV^ρ в пространстве $P^{(n-m)(m+1)-1}=PT_l\Omega(m,n)$ определяется теми же уравнениями, что и касательная плоскость T_lV^ρ в касательном пространстве $T_l\Omega(m,n)$. Поскольку на комплексе C^ρ m-мерная плоскость L зависит от ρ параметров, то среди форм ω_i^p лишь ρ линейно независимых. Следовательно, комплекс C^ρ задается α $(\alpha=1,2,\dots,n-1)$ дифференциальными уравнениями:

$$\Lambda_p^{\alpha i}\omega_i^p=0, \qquad (4)$$

где ω_i^p — линейные дифференциальные формы, обращение в нуль которых фиксирует m-мерную плоскость L на комплексе C^ρ.

Рассмотрим однопараметрическое семейство m-мерных плоскостей L в пространстве P^n. Такое семейство представляет собой $(m+1)$-мерную поверхность с m-мерными плоскими образующими. Эта поверхность называется *торсом* [14, 15], если она является тангенциально вырожденной поверхностью ранга один. Торсу на алгебраическом многообразии $\Omega(m,n)$ соответствует кривая, касательные к которой служат прямолинейными образующими этого многообразия. Данная кривая является асимптотической линией многообразия $\Omega(m,n)$, поэтому в произвольной точке этой линии выполняются уравнения (2). Следовательно, дифференциальные уравнения торсов в пространстве P^n можно записать в виде

$$\omega_i^p = a_i x^p dt. \tag{5}$$

Каждый торс, проходящий через m-мерную плоскость L, определяет на ней характеристическую $(m-1)$-мерную плоскость, которая является пересечением двух бесконечно близких образующих, и характеристическую $(m+1)$-мерную плоскость, касательную плоскость к торсу. Найдем уравнения характеристических образов торсов. Пусть $M = x^i A_i$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ — произвольная точка m-мерной плоскости L. Дифференциал этой точки в силу (5) вычисляется так:

$$dM = \big(dx^i + x^j \omega_j^i\big) A_i + (a_i x^i)(x^p A_p)\, dt,$$

где $p = m+1, m+2, \ldots, n$. Отсюда видно, что характеристическая $(m-1)$-мерная плоскость в m-мерной плоской образующей L комплекса C^ρ определяется уравнением

$$a_i x^i = 0,$$

а характеристическая $(m+1)$-мерная плоскость, содержащая m-мерную плоскую образующую L комплекса C^ρ, определяется m-мерной плоскостью L и точкой:

$$S = x^p A_p.$$

Из уравнений (4) ввиду (5) получим следующую систему уравнений:

$$\Lambda_p^{\alpha i} a_i x^p = 0, \tag{6}$$

где $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$. Эта система уравнений определяет характеристическую $(m-1)$-мерную плоскость торса, принадлежащего комплексу C^ρ, если выполняется условие

$$\operatorname{rang}\big(\Lambda_p^{\alpha i}\big) = n - m. \tag{7}$$

Из этого соотношения определяются характеристические $(m-1)$-мерные плоскости на m-мерной образующей L комплекса C^ρ. Условие

$$\operatorname{rang}\big(\Lambda_p^{\alpha i} x^p\big) = m + 1 \tag{8}$$

определяет точки S пересечения характеристических $(m+1)$-мерных плоскостей с двойственной к m-мерной плоскости L в пространстве P^n $(n-m)$-мерной плоскостью. Эти точки вместе с m-мерной плоскостью L определяют $(m+1)$-мерные характеристические плоскости торса. В проективном пространстве P^n рассмотрим ρ-мерный комплекс C^ρ $(\rho = m(n-m-1)+1)$ m-мерных плоскостей L и $m+1$ различных торсов, принадлежащих этому комплексу C^ρ, и пусть эти торсы имеют общую характеристическую $(m+1)$-мерную плоскость, касающуюся вдоль m-мерной образующей торса. Обозначим рассматриваемые комплексы через $C^\rho(1)$. Свяжем с комплексами $C^\rho(1)$ репер так, чтобы плоскости $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m$, $A_0 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m, \ldots, A_0 \wedge A_1 \wedge \ldots \wedge A_{m-1}$ совместились с $(m-1)$-мерными характеристическими плоскостями $m+1$ различных торсов. В общую $(m+1)$-мерную характеристическую плоскость этих торсов поместим вершину A_n. Ввиду этого из (4) получим, что

$$\Lambda_n^{\alpha 0} = \Lambda_n^{\alpha 1} = \ldots = \Lambda_n^{\alpha m} = 0, \tag{9}$$

где $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$. Специализация репера позволяет выбрать линейные дифференциальные формы $\omega_0^n, \omega_1^n, \ldots, \omega_m^n$ в качестве базисных на комплексе $C^\rho(1)$.

Дополним данные линейные формы до базиса комплекса $C^\rho(1)$ линейными формами $\omega_{i^*}^{p^*}$, где $i^* = 0, 1, \ldots, m-1$, $p^* = m+2, m+3, \ldots, n$. Рассмотрим комплексы $C^\rho(1)$ общего вида и определим их системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}
\omega_1^{m+1} = \omega_0^{m+2},\\
\omega_2^{m+1} = \omega_1^{m+2} = \omega_0^{m+3},\\
\ldots\\
\omega_m^{n-3} = \omega_{m-1}^{n-2} = \omega_{m-2}^{n-1},\\
\omega_m^{n-2} = \omega_{m-1}^{n-1},\\
\Lambda_{p^*}^{\alpha^* i} \omega_i^{p^*} = 0,
\end{gathered} \tag{10}$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$, $p^* = m+1, m+2, \ldots, n-1$, $\alpha^* = 1, 2, \ldots, (n-1) - m(n-m-2)$ и

$$|\alpha| - |\alpha^*| = m(n-m-2), |\alpha| = n-1.$$

Дифференцируя внешним образом первую группу уравнений (10), получим независимые квадратичные уравнения:

$$\begin{gathered}
\omega_1^k \wedge \omega_k^{k+1} = \omega_0^k \wedge \omega_k^{m+2},\\
\omega_2^k \wedge \omega_k^{m+1} = \omega_1^k \wedge \omega_k^{m+2},\\
\omega_1^k \wedge \omega_k^{m+2} = \omega_0^k \wedge \omega_k^{m+3},\\
\ldots\\
\omega_m^k \wedge \omega_k^{n-3} = \omega_{m-1}^k \wedge \omega_k^{n-2},\\
\omega_{m-1}^k \wedge \omega_k^{n-2} = \omega_{m-2}^k \wedge \omega_k^{n-1}\\
\omega_m^k \wedge \omega_k^{n-2} = \omega_{m-1}^k \wedge \omega_k^{n-1},
\end{gathered} \tag{11}$$

где $k = 0, 1, \dots, n$. Согласно теореме Картана [13] будем иметь

$$\begin{gathered}
\omega_n^{m+1} = \lambda_n^{m+10}\omega_0^n + \lambda_n^{m+11}\omega_1^n (\mathrm{mod}\ \Theta^{\rho^*}),\\
\omega_n^{m+2} = \lambda_n^{m+20}\omega_0^n + \lambda_n^{m+21}\omega_1^n (\mathrm{mod}\ \Theta^{\rho^*}),\\
\lambda_n^{m+20} = \lambda_n^{m+11},\\
\omega_n^{m+1} = \lambda_n^{m+11}\omega_1^n + \lambda_n^{m+12}\omega_2^n (\mathrm{mod}\ \Theta^{\rho^*}),\\
\omega_n^{m+2} = \lambda_n^{m+21}\omega_1^n + \lambda_n^{m+22}\omega_2^n (\mathrm{mod}\ \Theta^{\rho^*}),\\
\lambda_n^{m+21} = \lambda_n^{m+12},\\
\omega_n^{m+2} = \lambda_n^{m+20}\omega_0^n + \lambda_n^{m+21}\omega_1^n (\mathrm{mod}\ \Theta^{\rho^*}),\\
\omega_n^{m+3} = \lambda_n^{m+30}\omega_0^n + \lambda_n^{m+31}\omega_1^n (\mathrm{mod}\ \Theta^{\rho^*}),\\
\lambda_n^{m+30} = \lambda_n^{m+11},\\
\dots\\
\omega_n^{n-3} = \lambda_n^{n-3m-1}\omega_{m-1}^n + \lambda_n^{n-3m}\omega_m^n (\mathrm{mod}\ \Theta^{\rho^*}),\\
\omega_n^{n-2} = \lambda_n^{n-2m-1}\omega_{m-1}^n + \lambda_n^{n-2m}\omega_m^n (\mathrm{mod}\ \Theta^{\rho^*}),\\
\lambda_n^{n-2m-1} = \lambda_n^{n-3m},\\
\omega_n^{n-2} = \lambda_n^{n-2m-2}\omega_{m-2}^n + \lambda_n^{n-2m-1}\omega_{m-1}^n (\mathrm{mod}\ \Theta^{\rho^*}),\\
\omega_n^{n-1} = \lambda_n^{n-1m-2}\omega_{m-2}^n + \lambda_n^{n-1m-1}\omega_{m-1}^n (\mathrm{mod}\ \Theta^{\rho^*}),\\
\lambda_n^{n-1m-2} = \lambda_n^{n-2m-1},\\
\omega_n^{n-2} = \lambda_n^{n-2m-1}\omega_{m-1}^n + \lambda_n^{n-2m}\omega_m^n (\mathrm{mod}\ \Theta^{\rho^*}),\\
\omega_n^{n-1} = \lambda_n^{n-1m-1}\omega_{m-1}^n + \lambda_n^{n-1m}\omega_m^n (\mathrm{mod}\ \Theta^{\rho^*}),\\
\lambda_n^{n-1m-1} = \lambda_n^{n-2m},
\end{gathered} \tag{12}$$

где $p^* = m+2, m+3, \dots, n$. При этом

$$|\rho^*| = |\rho| - (m+1) = (m(n-m-1)+1) - (m+1) = m(n-m-2).$$

Ввиду симметричности матрицы коэффициентов разложения форм $\omega_n^{m+1}, \omega_n^{m+2}, \dots, \omega_n^{n-1}$ получим

$$\begin{gathered}
\omega_n^{m+1} = 0 (\mathrm{mod}\ \Theta^{\rho *}),\\
\omega_n^{m+2} = 0 (\mathrm{mod}\ \Theta^{\rho *}),\\
\dots\\
\omega_n^{n-1} = 0 (\mathrm{mod}\ \Theta^{\rho *}).
\end{gathered} \tag{13}$$

Таким образом, $(m+1)$-мерная плоскость $A_0 \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_m \wedge A_n$ описывает $m(n-m-2)$-мерное многообразие.

Докажем обратное утверждение. Рассмотрим произвольное $m(n-m-2)$-мерное многообразие $(m+1)$-мерных плоскостей. Точки $A_0, A_1, \dots, A_m, A_n$ поместим в текущую $(m+1)$-мерную плоскость рассматриваемого многоообразия. Перемещение $(m+1)$-мерной образующей $m(n-m-2)$-мерного многообразия определяется формами $\omega_i^{p^*}$, где $i = 1, 2, \dots, m$, $p^* = m+1, m+2, \dots, n-1$.

Поскольку рассматриваемое многообразие представляет собой $m(n-m-2)$-параметрическое семейство $(m+1)$-мерных плоскостей, то формы $\omega_i^{p^*}$ и ω_n^p выражаются через $m(n-m-2)$ линейно независимые формы Θ^{ρ^*}:

$$\omega_i^{p^*} = \lambda_{i\rho^*}^{p^*}\Theta^{\rho^*}, \quad \omega_n^{p^*} = \lambda_{n\rho^*}^{p^*}\Theta^{\rho^*}, \tag{14}$$

где $\rho^* = 1, 2, \ldots, m(n-m-2)$. Совокупность m-мерных плоскостей, лежащих в $(m+1)$-мерной плоскости $A_0 \wedge A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \wedge A_n$ некоторого $m(n-m-2)$-мерного многообразия, образует $(m+1)$-параметрическое семейство. Следовательно, m-мерные плоскости, лежащие во всех $(m+1)$-мерных плоскостях $m(n-m-2)$-мерного многообразия, образуют $m(n-m-2)+(m+1) = m(n-m-1)+1 = \rho$-мерный комплекс C^ρ. Покажем, что построенный комплекс является комплексом $C^\rho(1)$. Поместим вершины $A_0, A_1, \ldots, A_m$ в текущую m-мерную плоскость комплекса $C^\rho(1)$. Исключая из первой группы дифференциальных уравнений (14) формы Θ^{ρ^*}, получим $(m+1)((n-1)-(m+1)-1)-\rho^* = (m+1)((n-1)-(m+1)-1)-m(n-m-2) = n-1$ линейных однородных уравнений, связывающих формы $\omega_i^{p^*}$, которые можно записать в виде

$$\Lambda_{p^*}^{\alpha i}\omega_i^{p^*} = 0. \tag{15}$$

Отсюда следует, что выполняются соотношения (9). Значит, построенный комплекс является комплексом $C^\rho(1)$. Итак, доказана следующая

Теорема 2. *Комплекс C^ρ m-мерных плоскостей проективного пространства P^n, содержащий конечное число торсов, является комплексом $C^\rho(1)$ тогда и только тогда, когда его m-мерные образующие принадлежат $(m+1)$-мерным плоскостям некоторого $m(n-m-2)$-мерного многообразия.*

Изображение комплексов $C^\rho(1)$ на алгебраическом многообразии $\Omega(m,n)$ выясняет следующая

Теорема 3. *Комплекс C^ρ m-мерных плоскостей проективного пространства P^n, содержащий конечное число торсов, является комплексом $C^\rho(1)$ тогда и только тогда, когда для каждой его m-мерной образующей пересечение плоскости PT_lV^ρ с многообразием Сегре $S_l(m, n-m-1)$ содержит α-образующую многообразия $S_l(m, n-m-1)$.*

Действительно, пусть комплекс C^ρ является комплексом $C^\rho(1)$. Выбирая специальным образом репер, уравнения комплекса, а следовательно, и соответствующей плоскости PT_lV^ρ пространства $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l\Omega(m,n)$ можно привести к виду (15) или к параметрическим уравнениям вида

$$\omega_i^{p^*} = \lambda_{i\rho^*}^{p^*}\Theta^{\rho^*}. \tag{16}$$

В силу этих уравнений пересечение плоскости PT_lV^ρ и многообразия Сегре $S_l(m, n-m-1)$ определяется условием

$$\operatorname{rang}\left(\omega_i^{p^*}\,\omega_i^n\right) = 1, \tag{17}$$

где формы $\omega_i^{p^*}$ удовлетворяют уравнениям (16) и выражаются через $m(n-m-2)$ базисных форм Θ^{ρ^*} $(\rho^* = 1, 2, \dots, m(n-m-2))$. Поскольку формы ω_i^n и θ^{ρ^*} являются однородными координатами произвольной точки плоскости PT_lV^ρ, получим, что m-мерная плоскость, лежащая в плоскости PT_lV^ρ и определяемая уравнениями

$$\Theta^{\rho^*} = 0, \tag{18}$$

принадлежит многообразию Сегре $S_l(m, n-m-1)$. Такая m-мерная плоскость совпадает с α-образующей многообразия $S_l(m, n-m-1)$, заданной уравнениями

$$\omega_i^{p^*} = 0. \tag{19}$$

Докажем обратное утверждение. Пусть пересечение плоскости $PTlV^\rho$ и многообразия $S_l(m, n-m-1)$ содержит α-образующую многообразия $S_l(m, n-m-1)$, определяемую уравнеными (19). Предположим, что гиперплоскость $\alpha^n = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_{n-1}$ является неособой, т. е. формы ω_i^n линейно независимы и их можно принять в качестве $m+1$ из $\rho = m(n-m-1)+1$ однородных координат произвольной точки плоскости PT_lV^ρ. Плоскость PT_lV^ρ в пространстве $P^{(n-m)(m+1)-1} = P\mathrm{T}_l\Omega(m,n)$ определяется уравнениями

$$\Lambda_p^{\alpha i}\omega_i^p = 0, \tag{20}$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, n-1$, $i = 0, 1, \dots, m$. Поскольку рассматриваемая α-образующая многообразия $S_l(m, n-m-1)$ лежит в данной плоскости, уравнения (20) должны выполняться тождественно в силу (19). Подставляя (19) в (20), получим

$$\Lambda_n^{\alpha i}\omega_i^n = 0. \tag{21}$$

Так как формы ω_i^n линейно независимы, из уравнений (21) следует:

$$\Lambda_n^{\alpha i} = 0.$$

Очевидно, что это соотношение совпадает с соотношениями (9). Следовательно, комплекс C^ρ является комплексом $C^\rho(1)$. Теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бубякин И. В.* О строении комплексов m-мерных плоскостей проективного пространства, содержащих конечное число торсов // Мат. заметки СВФУ. 2017. Т. 24, № 4. С. 3–16.
2. *Макоха А. Н.* Геометрическая конструкция линейного комплекса плоскостей B_3 // Изв. вузов. Математика. 2018. № 11. С. 15–26.
3. *Стеганцева П. Г., Гречнева М. А.* Грассманов образ неизотропной поверхности псевдоевклидова пространства // Изв. вузов. Математика. 2017. № 2. С. 65–75.
4. *Арнольд В. И.* Комплексный лагранжев грассманиан // Функцион. анализ и его прил. 2000. Т. 34, вып. 3. С. 63–65.
5. *Арнольд В. И.* Лагранжев грассманиан кватернионного гиперсимплектического пространства // Функцион. анализ и его прил. 2001. Т. 35, вып. 1. С. 74–77.
6. *Arkani-Hamed N., Bourjaily J. L., Cachazo F., Goncharov A. B., Postnikov A., Trnka J.* Scattering amplitudes and the positive Grassmannian. arXiv:1212.5605v2. 2014.
7. *Arkani-Hamed N., Trnka J.* The amplituhedron // J. High Energy Phys. 2014. V. 2014, N 10.
8. *Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И.* Избранные задачи интегральной геометрии. М.: Добросвет, 2007.

9. *Akivis M. A.* On the differential geometry of a Grassmann manifold // Tensor. 1982. V. 38. P. 273–282.
10. *Бубякин И. В.* Геометрия пятимерных комплексов двумерных плоскостей. Новосибирск: Наука, 2001.
11. *Акивис М. А.* Ткани и почти грассмановы структуры // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 6. С. 6–15.
12. *Room T. G.* The geometry of determinantal loci. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1938.
13. *Landsberg J. M.* Algebraic geometry and projective differential geometry. Seoul: Seoul Nat. Univ., 1997 (Lect. Notes Ser. Seoul Nat. Univ.; V. 45).
14. *Акивис М. А., Гольдберг В. В.* Многообразия с вырожденным гауссовым отображением с кратными фокусами и скрученные конусы // Изв. вузов. Математика. 2003. № 11. С. 3–14.
15. *Akivis M. A., Goldberg V. V.* Projective differential geometry of submanifolds. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1993.

Поступила в редакцию 4 апреля 2019 г.
После доработки 25 марта 2019 г.
Принята к публикации 3 июня 2019 г.

Бубякин Игорь Витальевич
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891
bubyakiniv@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2019. Том 26, № 2

UDK 514.755.5

ON THE STRUCTURE OF SOME COMPLEXES OF m–DIMENSIONAL PLANES IN THE PROJECTIVE SPACE P^n CONTAINING A FINITE NUMBER OF DEVELOPABLE SURFACES. I

I. V. Bubyakin

Abstract: This article focuses on differential geometry of ρ-dimentional complexes of C^ρ m-dimensional planes in projective space P^n that contains a finite number of developable surfaces. In this paper, we obtain a necessary condition under which complex C^ρ contains a finite number of developable surfaces. We study the structure of ρ-dimensional complexes C^ρ for which all developable surfaces belonging to the complex C^ρ have one common characteristic $(m+1)$-dimensional plane tangent along the m-dimensional developable surface generator. Such complexes are denoted by $C^\rho(1)$. Also we determine the image of complexes $C^\rho(1)$ on $(m+1)(n-m)$-dimensional algebraic manifold $G(m,n)$ of space P^n, where $N = \binom{m+1}{n+1} - 1$ is the image of manifold $G(m,n)$ of m-dimensional planes in projective space P^n under the Grassmann mapping.

DOI: 10.25587/SVFU.2019.102.31508

Keywords: Grassmann manifold, complexes of multidimensional planes, Segre manifold.

REFERENCES

1. *Bubyakin I. V.*, “About the structure of complexes of m-dimensional planes in projective space P^n containing a finite number of developable surfaces,” Mat. Zamet. SVFU, **24**, No. 4, 3–16 (2017).

2. *Makokha A. N.*, “The geometric construction of linear complex of the planes B_3,” Russ. Math. (Iz. VUZ. Mat.), No. 11, 15–26 (2018).

3. *Stegantseva P. G. and Grechneva M. A.*, “Grassmanov image of non-isotropic surface of pseudo-Euclidean Space,” Russ. Math. (Iz. VUZ. Mat.), No. 2, 65–75 (2017).

4. *Arnold V. I.*, “Complex Lagrangian Grassmannian,” Funct. Anal. Appl., **34**, No. 3, 63–65 (2000).

5. *Arnold V. I.*, “Lagrangian Grassmannian of quaternion hypersymplectic space,” Funct. Anal. Appl., **35**, No. 1, 74–77 (2001).

6. *Arkani-Hamed N., Bourjaily J. L., Cachazo F., Goncharov A. B., Postnikov A., and Trnka J.*, “Scattering amplitudes and the positive Grassmannian,” arXiv:1212.5605v2 (2014).

7. *Arkani-Hamed N. and Trnka J.*, “The amplituhedron,” J. High Energy Phys., **2014**, No. 10, 36 pp. (2014).

8. *Gelfand I. M., Gindikin S. G., and Graev M. I.*, Selected Problems of Integral Geometry, Dobrosvet, Moscow (2007).

9. *Akivis M. A.*, “On the differential geometry of a Grassmann manifold,” Tensor, **38**, 273–282 (1982).

10. *Bubyakin I. V.*, Geometry of Five-Dimensional Complexes of Two-Dimensional Planes, Nauka, Novosibirsk (2001).

11. *Akivis M. A.*, “Tissues and almost Grassmann structures,” Sib. Math. J., **23**, No. 6, 6–15 (1982).
12. *Room T. G.*, The Geometry of Determinantal Loci, Camb. Univ. Press, Cambridge (1938).
13. *Landsberg J. M.*, Algebraic Geometry and Projective Differential Geometry, Seoul Nat. Univ. (1997), (Lect. Notes Ser. Seoul Nat. Univ.; V. 45).
14. *Akivis M. A. and Goldberg V. V.*, “Manifolds with a degenerate Gaussian maping with multiple focuses and twisted cones,” Russ. Math. (Iz. VUZ, Mat.), No. 11, 3–14 (2003).
15. *Akivis M. A. and Goldberg V. V.*, Projective Differential Geometry of Submanifolds, North-Holland Publ. Co., Amsterdam (1993).

Submitted February 4, 2019
Revised March 25, 2019
Accepted June 3, 2019

Igor V. Bubyakin
M. K. Ammosov North-Eastern Federal University
Institute of mathematics and Informatics
48 Kulakovsky Street, Yakutsk 677891, Russia
bubyakiniv@mail.ru