

УДК 519.6:519.857

# МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ВНУТРЕННИХ ПАРАЛЛЕЛЕЙ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

© 1997 г. С. П. Блинов

(Ижевск)

Поступила в редакцию 03.04.96 г.  
Переработанный вариант 20.11.96 г.

Излагается метод динамического программирования для минимизации квадратичного функционала, и эта схема реализуется при специальном способе приближенного решения задачи Дирихле, использующем идеи динамического программирования, при котором множество узлов триангуляции области разбивается на блоки. В одном из этих блоков собраны все граничные узлы, что позволяет свести краевую задачу к задаче с начальным условием.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, методы конечных разностей и конечных элементов для решения дифференциальных уравнений связаны между собой: тот и другой могут привести к одной и той же алгебраической системе уравнений [1]. Часто матрица этой системы симметрична и имеет ленточную структуру. Чем меньше ширина ленты (которая зависит от способа нумерации узлов), тем проще решить систему. В случае трехдиагональной матрицы система просто решается методом скалярной прогонки, использующем рекуррентные формулы и совпадающем с методом исключений Гаусса. Векторная прогонка получится при разбиении глобальной матрицы на блоки так, что она превратится в трехдиагональную блочную.

Дискретизация вариационных методов и их реализация методом динамического программирования приводит к рекуррентным формулам, содержащим оператор минимизации [2]. Последовательное освобождение от этого оператора приводит к новым рекуррентным формулам, также позволяющим совершить прямую и обратную прогонки. Обычно это векторная прогонка. К ней мы приходим в случае, когда значения неизвестной функции в узлах, расположенных на одной вертикали или горизонтали, объединяются в один вектор [2], [3]. При этом в случае непрямоугольной области при переходе от одной вертикали к другой размерность вектора меняется. При таком способе образования векторов неизвестных на каждом шаге приходится учитывать граничные условия.

В предлагаемой работе нумерация узлов и разбиение глобального вектора неизвестных и глобальной матрицы на блоки проводятся так, что граничные условия учитываются только один раз, что делает задачу похожей на задачу Коши. Кроме того, нет необходимости располагать узлы сетки на вертикальных и горизонтальных прямых.

В разделе 2 методом динамического программирования решается задача минимизации квадратичного функционала, зависящего от совокупности векторов на множестве этих векторов с заданным начальным вектором. В остальной части работы к этой задаче сводится двумерная и одномерная задачи Дирихле.

## 2. КВАДРАТИЧНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ

Пусть  $N$  – фиксированное натуральное число,  $m \in \{0, 1, \dots, N\}$ ,

$$U^m = \{u^m, \dots, u^N\} \in M^m = \mathbb{R}^{n_m} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_N}.$$

Этот набор назовем траекторией с начальным вектором  $u^m$ . Для  $\hat{u}^m \in \mathbb{R}^{n_m}$  определим пучок допустимых траекторий  $V_m(\hat{u}^m)$ , исходящих из начального вектора  $u^m = \hat{u}^m$ :

$$V_m(\hat{u}^m) = \{U^m \in M^m \mid u^m = \hat{u}^m\}.$$

Рассмотрим задачу

$$I(U^0) = \sum_{m=1}^N I_m(u^{m-1}, u^m) \rightarrow \min, \quad U^0 \in V_0(\hat{u}^0), \quad (1)$$

где  $I_m(x, y) = (A_m y, y) + 2(B_{m-1}x + f^m, y)$ .

Матрицы  $A_m$ ,  $B_m$  и векторы  $f^m$  не зависят от  $U_0$  и имеют такие размерности, что все указанные операции имеют смысл:  $f^m \in \mathbb{R}^{n_m}$ ,  $A_m \in M_{n_m, n_m}$ ,  $B_{m-1} \in M_{n_m, n_{m-1}}$ .

Положим

$$S_m(u^{m-1}) = \min_{U^{m-1} \in V_{m-1}(u^{m-1})} \sum_{k=m}^N I_k(u^{k-1}, u^k).$$

Тогда

$$S_1(\hat{u}^0) = \min_{U^0 \in V_0(\hat{u}^0)} I(U^0).$$

Имеем рекуррентную формулу

$$S_m(u^{m-1}) = \min_{u^m} \left[ I_m(u^{m-1}, u^m) + \min_{U^m \in V_m(u^m)} \sum_{k=m+1}^N I_k(u^{k-1}, u^k) \right] = \min_{u^m} [I_m(u^{m-1}, u^m) + S_{m+1}(u^m)], \quad (2)$$

в которой отражается принцип динамического программирования [1]: в пучке  $V_m(\hat{u}^m)$  хвост  $\hat{U}^m = \{\hat{u}^m, \dots, \hat{u}^N\}$  оптимальной траектории  $\hat{U}^{m-1} = \{\hat{u}^{m-1}, \hat{u}^m, \dots, \hat{u}^N\}$  также является оптимальной траекторией:

$$\begin{aligned} S_N(u^{N-1}) &= \min_{U^{N-1} \in V_{N-1}(u^{N-1})} I_N(u^{N-1}, u^N) = \\ &= \min_{u^N} I_N(u^{N-1}, u^N) = \min_{u^N} [(A_N u^N, u^N) + 2(B_{N-1} u^{N-1} + f^N, u^N)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Дифференцируя квадратную скобку по  $u^N$ , находим вектор, доставляющий минимум:

$$u^N = -A_N^{-1}(B_{N-1} u^{N-1} + f^N). \quad (4)$$

Подставив (4) в (3), получим

$$S_N(u^{N-1}) = (C_{N-1} u^{N-1}, u^{N-1}) + 2(v^{N-1}, u^{N-1}) + t^{N-1}, \quad (5)$$

где

$$C_{N-1} = -B_{N-1}^T A_N^{-1} B_{N-1}, \quad v^{N-1} = -B_{N-1}^T A_N^{-1} f^N, \quad t^{N-1} = -(A_N^{-1} f^N, f^N). \quad (6)$$

Методом индукции покажем, что функционалы  $S_m$  квадратичны. Для  $m = N$  это видно из (5). Полагая далее, что  $S_{m+1}$  – квадратичный функционал:

$$S_{m+1}(u^m) = (C_m u^m, u^m) + 2(v^m, u^m) + t^m, \quad (7)$$

и подставляя (7) в (2), получаем

$$S_m(u^{m-1}) = \min_{u^m} [(A_m + C_m) u^m, u^m] + 2(B_{m-1} u^{m-1} + v^m + f^m, u^m) + t^m. \quad (8)$$

Снова дифференцируя, получаем  $u^m$ , доставляющий минимум

$$u^m = -(A_m + C_m)^{-1} (B_{m-1} u^{m-1} + f^m + v^m). \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8), получаем

$$\begin{aligned} S_m(u^{m-1}) &= -(B_{m-1}^T (A_m + C_m)^{-1} B_{m-1} u^{m-1}, u^{m-1}) - \\ &- 2(B_{m-1}^T (A_m + C_m)^{-1} (f^m + v^m), u^{m-1}) - ((A_m + C_m)^{-1} (f^m + v^m), f^m + v^m) + t^m. \end{aligned}$$

Сравнивая это с (7), где  $m$  следует заменить на  $m - 1$ , получаем

$$C_{m-1} = -B_{m-1}^T (A_m + C_m)^{-1} B_{m-1}, \quad v^{m-1} = -B_{m-1}^T (A_m + C_m)^{-1} (f^m + v^m),$$

$$t^{m-1} = -((A_m + C_m)^{-1} (f^m + v^m), f^m + v^m) + t^m. \tag{10}$$

Если положить

$$U_N = 0, \quad v^N = 0, \quad t^N = 0, \tag{11}$$

то эти формулы при  $m = N$  совпадают с (6). Поэтому вычисления проводим следующим образом: начиная с формул (11) совершаем прогонку по формулам (10),  $m = N, \dots, 2, 1$ , и обратную прогонку по формулам (9),  $m = 1, 2, \dots, N$ . При этом нет необходимости вычислять  $t^m$ .

### 3. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ

1. Покажем, как можно прийти к изложенной схеме при решении задачи Дирихле

$$-(pu_x)_x - (qu_y)_y + ru = -f \text{ в } D \subset \mathbb{R}^2, \quad u|_{\partial D} = g,$$

где  $p, q, r, f$  непрерывны в  $D$ ,  $p > 0, q > 0, r > 0$ .

Это уравнение является уравнением Эйлера для функционала

$$I(u) = \iint_D (pu_x^2 + qu_y^2 + ru^2 + 2fu) dx dy$$

в классе функций, удовлетворяющих краевым условиям. Искомая функция минимизирует этот функционал.

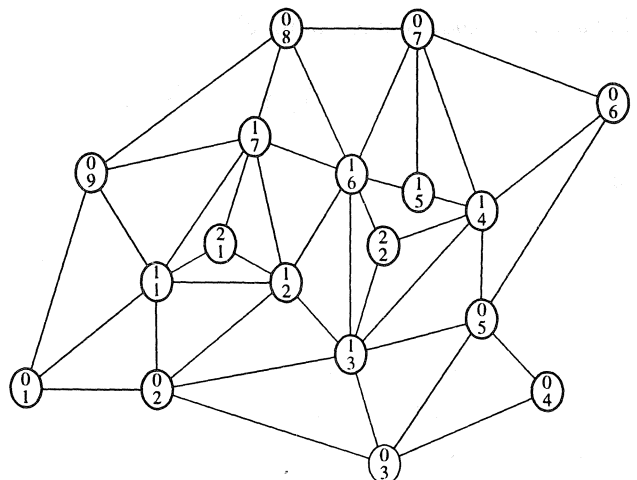
Пусть проведена некоторая триангуляция области  $D$ . Вершины треугольников назовем узлами. Разобьем множество узлов на  $N + 1$  блоков следующим образом. В нулевой блок  $\beta_0$  входят все узлы, лежащие на границе области. В каждый очередной блок  $\beta_{m+1}$  входит любой узел, не вошедшей в предыдущие блоки и связанный отрезком хотя бы с одним узлом предыдущего блока. Пронумеруем узлы каждого блока и обозначим через  $P_i^m = (x_i^m, y_i^m)$  узлы блока  $\beta_m$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_m$ . Будем говорить, что треугольники с вершинами в узлах блоков  $\beta_m$  и  $\beta_{m+1}$ , а также треугольники, все вершины которых состоят из узлов блока  $\beta_m$ , образуют пояс  $D_{m+1}$ .

На фигуре показан пример триангуляции области ( $N = 2$ ). Ее можно рассматривать и как часть триангуляции некоторой большей области (последние три блока). В обозначении узла  $P_i^m$  буква  $P$  опущена. Совокупность треугольников с общей вершиной  $P_1^2$  и с общей вершиной  $P_2^2$  образует пояс  $D_2$ , остальные треугольники составляют пояс  $D_1$ .

Пусть  $u_i^m = u(P_i^m)$  – значение функции  $u$  в узле  $P_i^m$  и  $u^m$  – вектор этих значений для узлов блока  $\beta_m$ :  $u^m = \text{col}(u_1^m, \dots, u_{n_m}^m)$ .

Заметим, что вектор  $u^0$  известен – это вектор граничных значений функции  $u$ ;  $u^0 = \text{col}\{g(P_1^0), \dots, g(P_{n_0}^0)\}$ .

Если область  $D$  выпукла, то можно рекомендовать следующий метод триангуляции. Пусть  $C_t$  – семейство замкнутых, непрерывных кривых, заполняющих область  $D$  при  $t \in [0, T]$ . Например, в качестве  $C_t$  можно взять внутреннюю параллель – кривую в  $D$ , отстоящую от  $\partial D$  на расстоянии  $t$ . Тогда  $C_0 = \partial D$ ,  $C_T$  – максимально удаленная от границы кривая, возможно вырождающаяся в



Фигура.

точку. Пусть  $0 = t_0 < \dots < t_N = T$ . Тогда кривые  $C_{t_m}$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$ , делят  $D$  на  $N$  кольцеобразных областей-поясов. Кривую  $C_{t_m}$  разобьем на  $n_m$  частей узлами  $P_i^m$ . Будем считать, что с возрастанием  $i$  узлы обходят кривую  $C_{t_m}$  против часовой стрелки. Соединяя узлы, расположенные на соседних кривых  $C_{t_m}$ , не пересекающимися между собой отрезками, проведем триангуляцию пояса между этими кривыми и, следовательно, триангуляцию всей области  $D$ . Участки кривых между соседними узлами также заменяем отрезками.

Для вычисления интеграла применим приближенную формулу

$$\iint_D v(x, y) dx dy = \sum_{m=1}^N \sum_{d \in D_m} \iint d v(x, y) dx dy = \sum_{m=1}^N \sum_{d \in D_m} v(Q_d) S_d + O(\rho^2),$$

где  $d$  – любой из треугольников,  $S_d$  – площадь треугольника  $d$ ,  $Q_d$  – некоторая точка треугольника  $d$  и

$$v = pu_x^2 + qu_y^2 + ru^2 + 2fu, \quad \rho = \max_m \max_{d \in D_m} \text{diam}\{d\}.$$

Пусть  $a(x_a, y_a)$ ,  $b(x_b, y_b)$ ,  $c(x_c, y_c)$  – вершины треугольника  $d$  с обходом против часовой стрелки. Для  $d \in D_{m+1}$  возможны следующие случаи расположения  $a$ ,  $b$ ,  $c$  относительно  $m$ -го блока:

- 1)  $a = P_i^m, b = P_j^{m+1}, c = P_k^{m+1}$ , один узел принадлежит блоку  $\beta_m$ , два – следующему блоку  $\beta_{m+1}$ ;
- 2)  $a = P_i^m, b = P_j^m, c = P_k^{m+1}$ , один узел принадлежит блоку  $\beta_{m+1}$ , два – предыдущему блоку  $\beta_m$ ;
- 3)  $a = P_i^m, b = P_j^m, c = P_k^m$ , все узлы принадлежат блоку  $\beta_m$ .

Если все узлы принадлежат блоку граничных значений  $\beta_0$ , то, как будет показано далее, вершину  $b = P_j^0$  можно исключить без всякого ущерба для результата или (если все же необходимо использовать информацию из этого узла) слегка исправить триангуляцию области, убрав отрезок  $[a, c]$  и соединив отрезком узел  $b$  с одним из узлов блока  $\beta_1$ . На фигуре это узел  $P_4^0$ .

Используя разложение в ряд Тейлора, записываем

$$u(a) = u(Q_d) - u_x(Q_d)(x - x_a) - u_y(Q_d)(y - y_a) + o(\rho),$$

$$u(b) = u(Q_d) - u_x(Q_d)(x - x_b) - u_y(Q_d)(y - y_b) + o(\rho),$$

$$u(c) = u(Q_d) - u_x(Q_d)(x - x_c) - u_y(Q_d)(y - y_c) + o(\rho).$$

Решая эту систему относительно  $u(Q_d)$ ,  $u_x(Q_d)$ ,  $u_y(Q_d)$ , можно вычислить  $v(Q_d)$ . В дальнейшем будем считать, что  $Q_d$  – центр тяжести треугольника  $d$ , т.е. координаты точки  $Q_d$  имеют вид

$$x = (x_a + x_b + x_c)/3, \quad y = (y_a + y_b + y_c)/3.$$

Тогда, как показывают вычисления, вклад треугольника  $d$  в интеграл  $I(u)$  будет равен

$$v(Q_d)S_d = \sum_{t, s \in \overset{\circ}{\Delta}_d} \alpha_{st} u(s)u(t) + 2\beta[u(a) + u(b) + u(c)],$$

где

$$\alpha_{st} = \frac{p(Q_d)(y_s - y_{s'}) (y_t - y_{t'}) + q(Q_d)(x_s - x_{s'}) (x_t - x_{t'}) + r(Q_d)S_d}{4S_d} + \frac{r(Q_d)S_d}{9},$$

$$\beta = S_d f(Q)/3,$$

$s'$  – следующий за  $s$  элемент в замкнутой цепочке  $\overset{\circ}{\Delta}_d$ ,  $s'' = (s')$ . Суммируя эти вклады, получаем квадратичный функционал вида (1).

Нетрудно видеть, что если  $d$  – треугольник с вершинами вида 1), то  $\alpha_{ab} = \alpha_{P_i^m P_j^{m+1}}$  входит в элемент  $b_{ij}^m$  матрицы  $B_m$  в качестве слагаемого. Этот факт будем записывать в виде  $\alpha_{P_i^m P_j^{m+1}} \mapsto b_{ij}^m$ .

Другое слагаемое этого элемента появляется при рассмотрении соседнего треугольника, содержащего эти же вершины. Аналогично, рассмотрение всевозможных вариантов расположения треугольника и их вершин относительно блоков приводит к следующим соответствиям:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{P_i^m P_j^{m+1}} &\mapsto b_{ij}^m, & \alpha_{P_i^m P_k^{m+1}} &\mapsto b_{ik}^m & \text{для } d \text{ типа 1),} \\
 \alpha_{P_i^m P_k^{m+1}} &\mapsto b_{ik}^m, & \alpha_{P_j^m P_k^{m+1}} &\mapsto b_{jk}^m & \text{для } d \text{ типа 2),} \\
 \alpha_{P_i^n P_i^n} &\mapsto a_{ii}^n, & \alpha_{P_j^n P_j^n} &\mapsto a_{jj}^n, & \alpha_{P_k^n P_k^n} &\mapsto a_{kk}^n, \\
 \alpha_{P_i^n P_j^n} &\mapsto a_{ij}^n, & \alpha_{P_i^n P_j^n} &\mapsto a_{ji}^n, & & \\
 \beta &\mapsto f_i^n, & \beta &\mapsto f_j^n, & \beta &\mapsto f_k^n,
 \end{aligned} \tag{12}$$

где  $n = m$  или  $n = m + 1$ , в зависимости от принадлежности узла к блоку  $\beta_m$  или  $\beta_{m+1}$ .

Отсюда получаем следующий

**Алгоритм формирования матриц  $A, B$  и  $f$**

**Шаг 1.** Обход поясов ( $m = 1, 2, \dots, N$ ).

1.1. Инициализация (обнуление) элементов матриц  $A_m, B_{m-1}$  и  $f_m$ .

1.2. Обход элементов (треугольников) пояса  $D_m$ .

1.2.1. Вычисление коэффициентов  $\alpha, \beta$  для треугольника  $d$  по приведенным выше формулам и добавление их к соответствующим элементам матриц  $A, B$  и векторов  $f$  согласно правилу (12).

**Шаг 2.** Дальше действуем, как в шаге 1.

Заметим, что матрицы  $A_m$  симметричны. Если узлы  $P_i^m$  и  $P_k^m$  не связаны отрезком, то  $a_{ik}^m = 0$ ; аналогично,  $b_{ik}^{m-1} = 0$ , если узлы  $P_i^m$  и  $P_k^{m-1}$  не связаны отрезком.

Вектор граничных значений  $u^0 = \text{col}\{g(P_1^0), \dots, g(P_{n_0}^0)\}$  используется только в слагаемом  $(B_0 u^0, u^1)$  функционала  $I$ , и если граничный узел  $P_j^0$  блока  $\beta_0$  не связан ни с одним из узлов блока  $\beta_1$  (т.е. в триангуляции области есть треугольник с вершиной в этом узле, соседние вершины которого также принадлежат блоку  $\beta_0$ ), то  $j$ -столбец матрицы  $B_0$  нулевой и в  $(B_0 u^0, u^1)$  (и, следовательно, в функционал  $I$ ) число  $u_j^0$  не входит. Так что этот узел, как было отмечено ранее, можно удалить или изменить триангуляцию.

Заметим также, что в данном методе одновременный охват всех граничных значений в одном блоке сводит решение краевой задачи к задаче Коши.

Для триангуляции из фигуры структуры матриц  $A_1, A_2, B_0, B_1$  имеют вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & a_{36} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} & 0 \\ 0 & a_{62} & a_{63} & 0 & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ a_{71} & a_{72} & 0 & 0 & 0 & a_{76} & a_{77} \end{pmatrix},$$



где  $A_k \in M_{n_k n_k}$ ,  $B_k \in M_{n_{k+1} n_k}$ . Соответственно разбиваются и векторы  $f$  и  $u$ :

$$f = \begin{pmatrix} f^0 \\ \dots \\ f^N \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} f^0 \\ \dots \\ f^N \end{pmatrix}, \quad f^k = \begin{pmatrix} f_{n_{k-1}+1} \\ \dots \\ f_{n_{k-1}+n_k} \end{pmatrix}, \quad u^k = \begin{pmatrix} u_{n_{k-1}+1} \\ \dots \\ u_{n_{k-1}+n_k} \end{pmatrix},$$

$$k = 0, 1, \dots, N, \quad n_{-1} = 0, \quad n_0 + \dots + n_N = m.$$

Тогда

$$I(u) = (A_0 u^0 + 2f^0, u^0) + \sum_{k=1}^N [(A_k u^k, u^k) + 2(B_{k-1} u^{k-1} + f^k, u^k)].$$

Если узлы триангуляции пронумерованы так, что  $u^0$  – вектор граничных значений, то первое слагаемое не влияет на результат минимизации и его можно отбросить. Таким образом, получаем функционал из п. 1. Именно такой метод реализован в предыдущем разделе.

#### 4. ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Этот метод применим и к одномерной задаче

$$-(pu')' + ru = -f, \quad x \in [a, b], \quad u(a) = g_1, \quad u(b) = g_2.$$

Делим отрезок  $[a, b]$  на  $2N$  частей узлами  $x_j^m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N$ ,  $j = 1, 2$ :

$$a = x_1^0 < \dots < x_1^N = x_2^N < \dots < x_2^1 < x_2^0 = b.$$

Разобьем множество узлов на блоки  $\beta_m = \{x_1^m, x_2^m\}$ ,  $m = 0, 1, \dots, N$ . Частичные отрезки, соединяющие узлы блоков  $\beta_m$  и  $\beta_{m+1}$ , образуют пояс  $D_m = [x_1^m, x_1^{m+1}] \cup [x_2^{m+1}, x_2^m]$ . Пусть  $h_j^m = |x_j^{m+1} - x_j^m|$ ,  $p_j^m = p[(x_j^m + x_j^{m+1})/2]$ ,  $r_j^m = r[(x_j^m + x_j^{m+1})/2]$ ,  $f_j^m = f[(x_j^m + x_j^{m+1})/2]$ .

Векторы  $u^m$  на этот раз имеют вид

$$u^m = \begin{pmatrix} u_1^m \\ u_2^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_1^m) \\ u(x_2^m) \end{pmatrix}, \quad u^0 = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}.$$

Вклад в интеграл зоны  $D_m$  равен

$$p_1^m \frac{(u_1^m - u_1^{m+1})^2}{h_1^m} + p_2^m \frac{(u_2^m - u_2^{m+1})^2}{h_2^m} +$$

$$+ r_1^m (u_1^m + u_1^{m+1})^2 h_1^m / 4 + r_2^m (u_2^m + u_2^{m+1})^2 h_2^m / 4 - f_1^m (u_1^m + u_1^{m+1}) h_1^m / 2 + f_2^m (u_2^m + u_2^{m+1}) h_2^m / 2,$$

$$A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B_m = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$a_{11} = \frac{p_1^m}{h_1^m} + \frac{p_1^{m+1}}{h_1^{m+1}} + \frac{r_1^m}{4} h_1^m + \frac{r_1^{m+1}}{4} h_1^{m+1}, \quad a_{22} = \frac{p_2^m}{h_2^m} + \frac{p_2^{m+1}}{h_2^{m+1}} + \frac{r_2^m}{4} h_2^m + \frac{r_2^{m+1}}{4} h_2^{m+1},$$

$$b_{11} = -\frac{p_1^m}{h_1^m} + \frac{r_1^m}{4} h_1^m, \quad b_{22} = -\frac{p_2^m}{h_2^m} + \frac{r_2^m}{4} h_2^m,$$

$$f_{m+1} = \begin{pmatrix} ((f_1^m h_1^m + f_1^{m+1} h_1^{m+1})/2) \\ ((f_2^m h_2^m + f_2^{m+1} h_2^{m+1})/2) \end{pmatrix}.$$

Видно, что этот метод напоминает метод встречной прогонки [3], с той разницей, что здесь значения функции в узлах каждого блока вычисляются одновременно.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Descloux J.* Methode des éléments finis. Lusanne: Suisse, 1973. (Рус. перев: *Деклу Ж.* Метод конечных элементов. М.: Мир, 1976.)
2. *Angel E., Bellman R.* Dinamic programming and partial differential equations. New York – London: Acad. Press, 1972. (Рус. перев.: *Беллман Р., Энджел Э.* Динамическое программирование и уравнения в частных производных М.: Мир, 1974.)
3. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.