R. L. Dobrushin, M. R. Martirosyan, Possibility of high-temperature phase transitions due to the many-particle nature of the potential, *TMF*, 1988, Volume 75, Number 2, 163–169

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 75, № 2
май, 1988

ВОЗМОЖНОСТЬ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ, ВЫЗВАННЫХ МНОГОЧАСТИЧНОСТЬЮ ПОТЕНЦИАЛА

Добрушин Р. Л., Мартиросян М. Р.

Рассмотрены малые нефинитные возмущения гиббсовского случайного поля. Показывается, что при нарушении некоторых естественных условий на скорость убывания возмущающего потенциала при сколь угодно высоких температурах возникает возможность нарушения аналитичности свободной энергии.

1. Рассмотрим совокупность $\mathcal{U}$ трансляционно-инвариантных (вообще говоря, комплекснозначных) потенциалов

$$U=\{U_A(x_A),\ A\in\mathscr{C}(\mathbb{Z}^\nu),\ x_A\in X^A\}, \tag{1.1}$$

где $\mathbb{Z}^\nu$ — ν-мерная целочисленная решетка, $\mathscr{C}(\mathbb{Z}^\nu)$ — множество всех конечных подмножеств $\mathbb{Z}^\nu$, X — некоторое конечное множество состояний частицы и X^A — совокупность конфигураций $x_A=(x_t;\ x_t\in X,\ t\in A)$. Рассмотрим статистическую сумму (с «пустыми граничными условиями»)

$$Z_\Lambda(U)=\sum_{x_\Lambda\in X^\Lambda}\exp\{-H_U(x_\Lambda)\},\quad U\in\mathcal{U},\quad \Lambda\in\mathscr{C}(\mathbb{Z}^\nu), \tag{1.2}$$

где гамильтониан

$$H_U(x_\Lambda)=\sum_{A\subseteq\Lambda}U_A(x_A),\quad x_\Lambda\in X^\Lambda \tag{1.3}$$

(здесь и далее x_A — ограничение конфигурации x_Λ на множество $A\subseteq\Lambda$).

Один из общепринятых в статистической механике признаков отсутствия фазовых переходов для некоторого вещественнозначного потенциала $\bar{U}$ состоит в требовании необращения в нуль статистической суммы $Z_\Lambda(U)$ для всех комплекснозначных потенциалов U, близких к $\bar{U}$. Это связано с тем, что из несколько более сильного требования

$$|\operatorname{Ln} Z_\Lambda(U)|\leqslant C|\Lambda| \tag{1.4}$$

(здесь и далее $|\Lambda|$ — число точек в множестве Λ, а логарифм статистической суммы понимается в смысле главного значения) для всех U, достаточно близких к $\bar{U}$ и $\Lambda\in\mathscr{C}(\mathbb{Z}^\nu)$, следует, что свободная энергия

$$F(U)=\lim_{\Lambda\to\infty}|\Lambda|^{-1}\operatorname{Ln} Z_\Lambda(U) \tag{1.5}$$

является аналитической функцией от любого параметра, от которого аналитически зависит потенциал. Аналогичные требования, накладываемые на статистическую сумму для достаточно малых $\tilde{U}$, интерпретируются как отсутствие фазовых переходов при достаточно больших температурах.

Ивестно, что условие малости величины

$$(1.6)\qquad \sum_{A:0\in A}\sup_{x_A\in X^A}|U_A(x_A)|$$

обеспечивает единственность гиббсовского поля с заданным потенциалом (см. [1]). Давно известно также, что в случае парных потенциалов ($U_A\equiv\equiv 0$ при $|A|>2$) из условия малости величины (1.6) следуют необращение в 0 статистической суммы $Z_\Lambda(U)$ и, более того, оценка (1.4). Обобщения этих результатов на случай многочастичных потенциалов были проведены лишь недавно. Разные методы доказательства (метод кластерных разложений в [2, 3], индукция по объему Λ в [4], где рассматривался случай $\nu=1$, и в [5] для произвольного ν) приводили к необходимости введения одного и того же дополнительного требования — малости величины

$$(1.7)\qquad \sum_{A:0\in A}\sup_{x_A\in X^A}|U_A(x_A)|\,e^{\varkappa|A|}$$

при некотором $\varkappa>0$, что означает очень быстрое убывание многочастичной части потенциала. Главная цель этой статьи — построить пример, показывающий невозможность ослабить в некотором смысле условия малости величины (1.7). Пример строится таким образом, что для некоторой специально подобранной последовательности объемов $\Lambda_n\to\infty$ статистические суммы $Z_{\Lambda_n}\equiv 0$. Используемый при этом метод построения, по существу, имитирует введенный в [4, 6] и использованный в [5] метод доказательства аналитичности свободной энергии при условии малости величины (1.7), иллюстрируя его естественность.

Тем же методом доказывается и несколько более сильный результат. Для очень широкого класса финитных потенциалов $\tilde{U}$ можно найти сколь угодно малое многочастичное возмущение U такое, что $Z_{\Lambda_n}(\tilde{U}+U)\equiv 0$ для некоторой последовательности объемов $\Lambda_n\to\infty$ (в [5] показано, что это не так, если малость U понимается как малость величины (1.7)).

Отметим, однако, что, хотя основной результат этой статьи может быть интерпретирован физически как указание на наличие специфических фазовых переходов при сколь угодно высоких температурах, вызванных многочастичностью взаимодействия, наше понимание ситуации остается очень ограниченным. Например, остается открытым следующий интересный вопрос: существуют ли вещественные потенциалы $\tilde{U}$, для которых расходится ряд (1.7), но сходится ряд (1.6), такие, что свободная энергия $F(\beta, U)$ не является аналитической функцией от обратной температуры β в сколь угодно малой окрестности точки $\beta=0$.

2. Пусть $\varphi:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$ — положительная функция. Для произвольного $U\in\mathcal{U}$ положим

$$(2.1)\qquad \|U\|_\varphi=\sum_{A:0\in A}\varphi(|A|)\sup_{x_A\in X^A}|U_A(x_A)|.$$

Обозначим через $\mathcal{E}_\alpha$, $\alpha>0$ класс всех тех $\varphi:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$, для которых

$$(2.2)\qquad \varliminf_{n\to\infty}\varphi(n)\,e^{-\alpha n}>0,$$

и пусть $\mathcal{E}=\bigcup_{\alpha>0}\mathcal{E}_\alpha$.

Пусть $r>0$ и $\tilde{U}$—r-финитный вещественнозначный потенциал (r-финитность означает, что $\tilde{U}_A \equiv 0$ при $\operatorname{diam} A > r$, где $\operatorname{diam} A = \max\limits_{t,s \in A} |t-s|$, $A \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}^\nu)$).

Для любого объема $\Lambda \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}^\nu)$ определим r-границу Λ как $\partial_r \Lambda = \{t \in \Lambda : \min\limits_{s \in \Lambda} |t-s| \leqslant r\}$. Положим для произвольных $\Lambda \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}^\nu)$ и $\tau \in X^{\partial_r \Lambda}$

$$Z_\Lambda(\tilde{U} \mid \tau) = \sum_{x_\Lambda \in X^\Lambda} \exp\{-H_{\tilde{U}}(x_\Lambda \mid \tau)\}, \tag{2.3}$$

где

$$H_{\tilde{U}}(x_\Lambda \mid \tau) = \sum_{A : A \cap \Lambda \neq \varnothing} \tilde{U}_A(x_{A \cap \Lambda} \cup \tau_{A \cap \partial_r \Lambda}), \quad x_\Lambda \in X^\Lambda. \tag{2.4}$$

Тогда формула

$$Q_\Lambda^{\tilde{U}}(x_\Lambda \mid \tau) = [Z_\Lambda(\tilde{U} \mid \tau)]^{-1} \exp\{-H_{\tilde{U}}(x_\Lambda \mid \tau)\}, \quad x_\Lambda \in X^\Lambda, \tag{2.5}$$

задает условное (при условии τ) гиббсовское распределение вероятностей в объеме Λ. Пусть $\rho > r$. Обозначим через $\tilde{\mathscr{U}}(r, \rho)$ класс всевозможных r-финитных вещественнозначных потенциалов $\tilde{U}$, для которых выполнено следующее условие: существует число δ, $0 < \delta < 1/2$, такое, что для произвольных $\Lambda \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}^\nu)$, $t \in \partial_r \Lambda$, $\tau^1, \tau^2 \in X^{\partial_r \Lambda}$ таких, что $\tau_s^1 = \tau_s^2$ при всех $s \neq t$:

$$\operatorname{Var}\{Q_{\Lambda,\Lambda_\rho}^{\tilde{U}}(\cdot \mid \tau^1), Q_{\Lambda,\Lambda_\rho}^{\tilde{U}}(\cdot \mid \tau^2)\} \leqslant \delta \, |\partial_r \Lambda_\rho \cap \Lambda|^{-1}, \tag{2.6}$$

где $\Lambda_\rho = \{s \in \Lambda : |t-s| > \rho\}$, через $Q_{\Lambda,\Lambda_\rho}^{\tilde{U}}(\cdot \mid \tau^i)$, $i=1, 2$, обозначена проекция меры $Q_\Lambda^{\tilde{U}}(\cdot \mid \tau^i)$ на X^{Λ_ρ} и для любых двух мер μ_1, μ_2 на X^{Λ_ρ}:

$$\operatorname{Var}\{\mu_1, \mu_2\} = \max_{F \subset X^{\Lambda_\rho}} |\mu_1(F) - \mu_2(F)|.$$

Теорема. I. *Пусть* $\rho > r > 0$ *и* $\tilde{U} \in \tilde{\mathscr{U}}(r, \rho)$. *Если* $\varphi \in \mathscr{E}$, *то существует* $\varepsilon = \varepsilon(\varphi, r, \rho)$ *такое, что для произвольного* $U \in \mathscr{U}$ *с* $\|U\|_\varphi < \varepsilon$ *для всех* $\Lambda \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}^\nu)$

$$Z_\Lambda(\tilde{U} + U) \neq 0. \tag{2.7}$$

II. *Если* $\varphi \in \mathscr{E}$, *то для любых* $\tilde{U}$ — r-*финитного вещественнозначного потенциала и любого* $\varepsilon > 0$ *существует трансляционно-инвариантный потенциал* $U^\varepsilon \in \mathscr{U}$ *такой, что* $\|U^\varepsilon\|_\varphi < \varepsilon$ *и для некоторой последовательности объемов* $\Lambda_n \to \infty$ *в смысле Ван Хова*

$$Z_{\Lambda_n}(\tilde{U} + U^\varepsilon) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.8}$$

Замечание 1. В работе [6] класс потенциалов $\bigcup\limits_{\rho, \rho > 0} \mathscr{U}(r, \rho)$ был назван классом вполне аналитических потенциалов. Этот класс может быть описан (см. [6]) разными эквивалентными определениями и наглядно соответствует классу потенциалов, для которых нет никаких фазовых переходов.

Замечание 2. Утверждение I является, по существу, следствием основного результата работы [5] (или [2, 3] для более частного случая основного поля $\tilde{U}$). Хотя в [5] не рассматривались пустые граничные условия, однако доказательство без особых изменений переносится и на этот случай. Таким образом, утверждение II означает, что результат работы

[5] не сохраняется при ослаблении условий на убывание потенциала U_A с ростом $|A|$.

3. Перейдем к доказательству утверждения II. Нам понадобятся три вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — некоторый набор отличных от 0 комплексных чисел. Тогда существуют комплексные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ такие, что*

$$\alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n = 0 \tag{3.1}$$

и

$$|\alpha_i - 1| \leqslant \frac{|z_1 + \ldots + z_n|}{|z_1| + \ldots + |z_n|}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Доказательство. Достаточно положить

$$\alpha_i = 1 - \frac{|z_1 + \ldots + z_n|}{z_i} \cdot \frac{|z_i|}{|z_1| + \ldots + |z_n|}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Лемма 2. *Пусть потенциал U является R-финитным. Положим*

$$\operatorname{Re} U = \{\operatorname{Re} U_A(x_A),\ A \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}^\nu),\ x_A \in X^A\},$$

$$\operatorname{Im} U = \{\operatorname{Im} U_A(x_A),\ A \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}^\nu),\ x_A \in X^A\}.$$

Для произвольного $l > 0$ обозначим

$$\overline{V}_l = \{t \in \mathbb{Z}^\nu : |t| \leqslant l\}, \quad V_l = \overline{V}_l \setminus \{0\}. \tag{3.3}$$

Если при всех $x', x'' \in X$ и $x_{V_R} \in X^{V_R}$

$$H_{\operatorname{Im} U}(x'_{\{0\}} \cup x_{V_R}) \neq H_{\operatorname{Im} U}(x''_{\{0\}} \cup x_{V_R}) \pmod{2\pi}, \tag{3.4}$$

то существует γ такое, что $0 < \gamma < 1$ и оценка

$$|Z_\Lambda(U)/Z_\Lambda(\operatorname{Re} U)| < \gamma^{|\Lambda|} \tag{3.5}$$

выполнена для всех достаточно больших объемов Λ таких, что

$$\overline{V}_L \subseteq \Lambda \subseteq \overline{V}_{L+1} \tag{3.6}$$

при некотором $L > 0$.

Доказательство. Заметим, что для любого $\Lambda \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}^\nu)$

$$Z_\Lambda(U)/Z_\Lambda(\operatorname{Re} U) = \langle \exp\{-H_{\operatorname{Im} U}(x_\Lambda)\}\rangle_{P_\Lambda}, \tag{3.7}$$

где

$$P_\Lambda(x_\Lambda) = [Z_\Lambda(\operatorname{Re} U)]^{-1} \exp\{-H_{\operatorname{Re} U}(x_\Lambda)\}, \quad x_\Lambda \in X^\Lambda,$$

и через $\langle \cdot \rangle_q$ здесь и далее будем обозначать математическое ожидание по мере, заданной плотностью q. Пусть

$$\mathbb{Z}_R^\nu = \{t \in \mathbb{Z}^\nu : t = ((2R+1)k_1, \ldots, (2R+1)k_\nu),\ k_1, \ldots, k_\nu \in \mathbb{Z}\}.$$

(Положим $A_\Lambda = \Lambda \cap \mathbb{Z}_R^\nu$, $B_\Lambda = \Lambda \setminus A_\Lambda$. Очевидно, что

$$\begin{aligned}&\langle \exp\{-iH_{\operatorname{Im} U}(x_\Lambda)\}\rangle_{P_\Lambda} = \\ &= \langle \exp\{-iH_{\operatorname{Im} U}(x_{B_\Lambda})\} \langle \exp\{-iH_{\operatorname{Im} U}(x_{A_\Lambda} \mid x_{B_\Lambda})\}\rangle_{Q_{A_\Lambda}^{\operatorname{Re} U}(\cdot \mid x_{B_\Lambda})} \rangle_{P_\Lambda}\end{aligned} \tag{3.8}$$

(условный гамильтониан и условная гиббсовская мера определены в (2.4) и в (2.5)). Поскольку расстояние между произвольными двумя точками из A_Λ больше, чем $2R$, то, используя условие R-финитности потенциала U можем записать, что

$$\begin{aligned}&\langle \exp\{-iH_{\operatorname{Im} U}(x_{A_\Lambda} \mid x_{B_\Lambda})\}\rangle_{Q_{A_\Lambda}^{\operatorname{Re} U}(\cdot \mid x_{B_\Lambda})} = \\ &= \prod_{t \in A_\Lambda} \langle \exp\{-iH_{\operatorname{Im} U}(x_t \mid x_{B_\Lambda \cap (V_R + t)})\}\rangle_{Q_{\{t\}}^{\operatorname{Re} U}(\cdot \mid x_{B_\Lambda \cap (V_R + t)})},\end{aligned} \tag{3.9}$$

где под V_R+t понимается сдвиг множества V_R на вектор t. Пусть $A_\Lambda^*=\{t\in A_\Lambda : V_R+t\subset\Lambda\}$. На основании условия (3.4) и конечности множества X можем заключить, что существует положительное число $\gamma^*<1$ такое, что для всех $t\in A_\Lambda^*$ и $x_{V_R+t}\in X^{V_R+t}$

$$(3.10)\qquad |\langle \exp\{-iH_{\operatorname{Im} U}(x_t\,|\,x_{V_R+t})\}\rangle_{Q^{\operatorname{Re} U}_{\{t\}}(\cdot|x_{B_\Lambda\cap(V_R+t)})}|<\gamma^*$$

(заметим, что для $t\in A_\Lambda^*$ имеем $B_\Lambda\cap(V_R+t)=V_R+t$). Из (3.7)—(3.10) получаем, что

$$(3.11)\qquad |Z_\Lambda(U)/Z_\Lambda(\operatorname{Re} U)|<(\gamma^*)^{|A_\Lambda^*|}.$$

При этом нетрудно видеть, что существует константа $K=K(\nu, R)$ такая, что для всех достаточно больших Λ, удовлетворяющих при некотором L условию (3.6), имеет место оценка $|\Lambda|<K|A_\Lambda^*|$. Поэтому, полагая $\gamma=(\gamma^*)^{1/K}$, на основании (3.11) приходим к (3.5). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $\tilde U$ — произвольный вещественнозначный r-финитный потенциал и $\varphi\in\mathscr{E}$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ можно найти последовательности трансляционно-инвариантных потенциалов $U^{(1)}, U^{(2)},\ldots$, объемов $\Lambda_1\subset\Lambda_2\subset\ldots$ (включение строгое) и положительных чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$, не превосходящих 1, таких, что*

1) *потенциал $U^{(k)}$ $|\Lambda_k|$-финитен, $k=1, 2, \ldots$;*

2) *$U^{(k)}\neq 0$ лишь при $A=\Lambda_i+t$, $i=1,\ldots,k$, $t\in\mathbb{Z}^\nu$ и $U^{(k)}_{\Lambda_i}\equiv U^{(i)}_{\Lambda_i}$, когда $i<k$;*

3) $$\sup_{x_{\Lambda_k}\in X^{\Lambda_k}}|U^{(k)}_{\Lambda_k}(x_{\Lambda_k})|<\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\,\frac{[\varphi(|\Lambda_k|)]^{-1}}{|\Lambda_k|};$$

4) *последовательность $\Lambda_k\to\infty$ в смысле Ван Хова, причем Λ_{2k-1} — ν-мерные кубы с центром в 0, а Λ_{2k} удовлетворяет условию (3.6) при некотором L_k, $k=1, 2, \ldots$;*

5) *если k нечетно, то для произвольного $\Lambda\in\mathscr{C}(\mathbb{Z}^\nu)$, удовлетворяющего условию (3.6) при некотором достаточно большом L и такого, что $\Lambda\supset\Lambda_k$,*

$$|Z_\Lambda(\tilde U+U^{(k)})/Z_\Lambda(\tilde U+\operatorname{Re} U^{(k)})|<\gamma_k^{|\Lambda|};$$

6) *если k четно, то*

$$Z_{\Lambda_k}(\tilde U+U^{(k)})=0.$$

Заметим, что утверждение II теоремы следует из утверждений 3, 4, 6, если положить $U^\varepsilon=\{U_A^\varepsilon, A\in\mathscr{C}(\mathbb{Z}^\nu)\}$ с $U_A^\varepsilon(x_A)\equiv U_A^{(k)}(x_A)$ для $A\subset\Lambda_k$. Корректность такого определения вытекает из утверждения 2.

Перейдем к доказательству леммы 3. Построение потенциалов проведем по индукции, предполагая в связи с этим на k-м шаге, что потенциалы $U^{(1)},\ldots, U^{(k-1)}$ уже построены с выполнением для них соответствующих утверждений леммы.

Пусть k нечетно ($k>1$). В качестве Λ_k выберем произвольный ν-мерный куб с центром в 0 такой, что $\Lambda_k\supset\Lambda_{k-1}$ (включение строгое). Пусть $X=\{x^{(1)},\ldots, x^{(N)}\}$. Для произвольной конфигурации $x\in X^{\Lambda_k\setminus\{0\}}$ обозначим

$$\varphi_j(x)=H_{\operatorname{Im} U^{(k-1)}}(x^{(j)}_{\{0\}}\cup x)\pmod{2\pi},\qquad 0\leqslant\varphi_j(x)<2\pi,$$
$$j=1,\ldots,N.$$

Очевидно, что существуют числа $\psi_j(x)$, $0\leqslant\psi_j(x)<2\pi$, $j=1,\ldots,N$ такие, что $\psi_i(x)\neq\psi_j(x)$, $i,j=1,\ldots,N$ и

$$|\varphi_j(x)-\psi_j(x)|<\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\frac{[\varphi(|\Lambda_k|)]^{-1}}{|\Lambda_k|},\quad j=1,\ldots,N.$$

Положим теперь $U^{(k)}_{\Lambda_k}(x^{(j)}_{\{0\}}\cup x)=i(\varphi_j(x)-\psi_j(x)), j=1,\ldots,N$, $U^{(k)}_{\Lambda_i}\equiv U^{(i)}_{\Lambda_i}$ для $i=1,\ldots,k-1$ и на множествах вида Λ_i+t, $i=1,\ldots,k$, определим потенциал $U^{(i)}_{\Lambda_i+t}$ так, чтобы не нарушалась трансляционная инвариантность. Для всех остальных случаев положим $U_A{}^{(k)}\equiv 0$. Тогда, как нетрудно убедиться, для потенциала $U^{(k)}$ выполнено условие (3.4) леммы 2, а следовательно, оно выполнено и для $\tilde{U}+U^{(k)}$ (заметим, что $\tilde{U}$ вещественно) так, что, применяя лемму 2, видим, что при таком построении потенциала $U^{(k)}$ оказывается справедливым утверждение 5 леммы 3. Все остальные свойства, требуемые в лемме 3, очевидны.

Для случая $k=1$ построение потенциала $U^{(1)}$ проведем аналогично, полагая $\Lambda_0=\overline{V}_r$ (см. определение (3.3)), где r — радиус взаимодействия потенциала $\tilde{U}$, и $U^{(0)}=\tilde{U}$.

Пусть теперь k четно. Согласно индуктивному предположению для всех достаточно больших $\Lambda\in\mathscr{C}(\mathbb{Z}^\nu)$, удовлетворяющих условию (3.6), справедлива оценка

$$|Z_\Lambda(\tilde{U}+U^{(k-1)})/Z_\Lambda(\tilde{U}+\operatorname{Re}U^{(k-1)})|<\gamma_{k-1}^{|\Lambda|}. \tag{3.12}$$

Поскольку $\varphi\in\mathscr{E}$, то ясно, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty} n\varphi(n)(\gamma_{k-1})^n=0$, в силу чего существует $n_k>|\Lambda_{k-1}|$ такое, что

$$n_k\varphi(n_k)(\gamma_{k-1})^{n_k}<\varepsilon/2^{k+2}. \tag{3.13}$$

Очевидно, что для некоторого $m>0$ имеем $(2m-1)^\nu<n_k<(2m+1)^\nu$, так что можно выбрать объем Λ_k таким образом, что $\Lambda_k\supset\Lambda_{k-1}$, $|\Lambda_k|=n_k$ и $\overline{V}_{m-1}\subset\Lambda_k\subset\overline{V}_m$, а при таком выборе Λ_k выполнена оценка (3.12) с $\Lambda=\Lambda_k$. Заметим теперь, что поскольку $\tilde{U}$ — вещественнозначный потенциал, то

$$Z_{\Lambda_k}(\tilde{U}+U^{(k-1)})=\sum_{x_{\Lambda_k}\in X^{\Lambda_k}}\exp\{-H_{\tilde{U}+U^{(k-1)}}(x_{\Lambda_k})\},$$

$$Z_{\Lambda_k}(\tilde{U}+\operatorname{Re}U^{(k-1)})=\sum_{x_{\Lambda_k}\in X^{\Lambda_k}}|\exp\{-H_{\tilde{U}+U^{(k-1)}}(x_{\Lambda_k})\}|,$$

и, следовательно, в соответствии с леммой 1 существуют комплексные числа $\alpha(x_{\Lambda_k}), x_{\Lambda_k}\in X^{\Lambda_k}$ такие, что

$$\sum_{x_{\Lambda_k}\in X^{\Lambda_k}}\alpha(x_{\Lambda_k})\exp\{-H_{\tilde{U}+U^{(k-1)}}(x_{\Lambda_k})\}=0, \tag{3.14}$$

причем согласно (3.1), (3.12) и (3.13)

$$\sup_{x_{\Lambda_k}\in X^{\Lambda_k}}|\alpha(x_{\Lambda_k})-1|<\frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\frac{[\varphi(|\Lambda_k|)]^{-1}}{|\Lambda_k|} \tag{3.15}$$

Теперь определим потенциал $U^{(k)}$:

$$U^{(k)}(x_A)=\begin{cases} U_A^{(k-1)}(x_A), & \text{если при некотором } t\in\mathbb{Z}^\nu \\ A+t\subset\Lambda_{k-1}, & \\ \operatorname{Ln}\alpha(x_{\Lambda_k}), & \text{если при некотором } t\in\mathbb{Z}^\nu \\ A+t=\Lambda_k,\ x_{A+t}=x_{\Lambda_k}, & \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \tag{3.16}$$

(логарифм в (3.16) понимается в смысле главного значения). Поскольку можно рассматривать лишь достаточно малые ε и в силу этого считать, что правая часть в (3.15) меньше $^1/_2$, то, воспользовавшись простым неравенством $|\operatorname{Ln}(1+z)|<{}^3/_2|z|$, справедливым при $|z|<{}^1/_2$, заключаем на основании (3.15) и определения (3.16), что

$$|\Lambda_k|\,\varphi(|\Lambda_k|)\sup_{x_{\Lambda_k}\in X^{\Lambda_k}}|U_{\Lambda_k}^{(k)}(x_{\Lambda_k})|<\frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{2^{k+2}}<\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Вместе с тем из (3.14) и (3.16) следует, что

$$Z_{\Lambda_k}(\tilde U+U^{(k)})=\sum_{x_{\Lambda_k}\in X^{\Lambda_k}}\exp\{-H_{\tilde U+U^{(k)}}(x_{\Lambda_k})\}=$$

$$=\sum_{x_{\Lambda_k}\in X^{\Lambda_k}}\alpha(x_{\Lambda_k})\exp\{-H_{\tilde U+U^{(k-1)}}(x_{\Lambda_k})\}=0.$$

Таким образом, и для потенциалов $U^{(k)}$ с четными k удовлетворены все требования леммы 3; для завершения доказательства остается заметить, что для последовательности выбранных объемов Λ_k справедливо утверждение 4. Лемма 3 доказана, и, следовательно, доказано утверждение II теоремы.

Литература

[1] *Добрушин Р. Л.* // Функц. анализ и его прилож. 1968. Т. 2. № 4. С. 44–57.
[2] *Малышев В. А., Минлос Р. А.* Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений. М.: Наука, 1985.
[3] *Малышев В. А.* // Мат. заметки. 1983. Т. 34. № 3. С. 443–452.
[4] *Добрушин Р. Л.* // Мат. сб. 1974. Т. 94 (136). № 1. С. 16–48.
[5] *Добрушин Р. Л., Мартиросян М. Р.* // ТМФ. 1988. Т. 74. № 1. С. 16–28.
[6] *Добрушин Р. Л., Шлосман С. Б.* Вполне аналитические гиббсовские поля: Препринт. М.: ИППИ АН СССР, 1986. (см. также *Dobrushin R. L., Shlosman S. B.* // J. Stat. Phys. 1987. V. 46. № 5/6. P. 983–1014).

Институт математики
Академии наук АрмССР

Поступила в редакцию
18.XI.1986 г.

ON THE POSSIBILITY OF HIGH-TEMPERATURE PHASE TRANSITIONS DUE TO THE MANY-PARTICLE CHARACTER OF THE POTENTIAL

Dobrushin R. L., Martirosyan M. Hr.

Small non-finite perturbations of the Gibbs random field are considered. It is shown that if certain natural conditions on the rate of decreasing of the perturbing potential at arbitrary high temperatures are violated, then the possibility of breaking the analyticity of free energy arises.