О производной категории грассманиана Кэли

Л. А. Гусева

Ключевые слова: Лефшецев набор, производная категория, грассманиан Кэли, расслоение на квадрики.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm13685

В работе строится полный исключительный набор в ограниченной производной категории когерентных пучков на грассманиане Кэли **CG**. Геометрические свойства грассманиана Кэли были изучены в [1]. В работе [2] были подсчитаны малые квантовые когомологии грассманиана Кэли, в частности, доказана их полупростота. Таким образом, основной результат этой работы подтверждает в случае грассманиана Кэли гипотезу Дубровина, которая говорит о том, что из полупростоты малых квантовых когомологий должно следовать существование полного исключительного набора.

Известно, что из существования полного исключительного набора не следует полупростота малых квантовых когомологий. В работе [3] было дано уточнение гипотезы Дубровина для многообразий Фано с одномерной группой Пикара, а именно была сформулирована гипотеза о том, что из полупростоты малых квантовых когомологий многообразия следует существование полного лефшецева набора, вычетная категория которого порождается полностью ортогональными исключительными объектами, определение лефшецева набора и его вычетной категории см. в определении 3. В работе мы доказываем, что эта гипотеза также выполнена для грассманиана Кэли.

Фиксируем алгебраически замкнутое поле $\Bbbk$ характеристики 0. Определим грассманиан Кэли **CG**. Для этого рассмотрим грассманиан $\mathrm{Gr}(3, V)$, параметризующий 3-мерные подпространства в 7-мерном векторном пространстве V. Будем обозначать $\mathscr{U} \subset V \otimes \mathscr{O}$ и $\mathscr{U}^{\perp} \subset V^{\vee} \otimes \mathscr{O}$ тавтологические векторные расслоения на $\mathrm{Gr}(3, V)$ рангов 3 и 4 соответственно. Тавтологическое фактор-расслоение будем обозначать как $\mathscr{Q} := (\mathscr{U}^{\perp})^{\vee}$, плюккерово линейное расслоение – как $\mathscr{O}(1)$. По определению на $\mathrm{Gr}(3, V)$ имеем точные последовательности расслоений:

$$0 \to \mathscr{U} \to V \otimes \mathscr{O} \to \mathscr{Q} \to 0, \tag{1}$$

$$0 \to \mathscr{U}^{\perp} \to V^{\vee} \otimes \mathscr{O} \to \mathscr{U}^{\vee} \to 0. \tag{2}$$

По теореме Бореля–Ботта–Вейля $\mathrm{H}^0(\mathrm{Gr}(3, V), \mathscr{U}^{\perp}(1)) \simeq \Lambda^4 V^{\vee}$. Фиксируем общее глобальное сечение расслоения $\mathscr{U}^{\perp}(1)$, т.е. общую 4-форму $\lambda \in \Lambda^4 V^{\vee}$. Грассманиан Кэли **CG** определяется как локус нулей глобального сечения $\lambda \in \mathrm{H}^0(\mathrm{Gr}(3, V), \mathscr{U}^{\perp}(1))$. Иначе говоря, **CG** парметризует такие 3-мерные векторные подпространства $U \subset V$, что $\lambda(u_1, u_2, u_3, -) = 0$ для всех $u_1, u_2, u_3 \in U$. Из определения сразу следует, что **CG** является гладким многообразием Фано размерности 8 и что канонический класс $\omega_{\mathbf{CG}}$ грассманиана Кэли изоморфен $\mathscr{O}(-4)$.

Напомним определение полного исключительного набора в $\Bbbk$-линейной триангулированной категории $\mathscr{T}$.

Определение 1. Объект E в $\mathscr{T}$ называется *исключительным*, если $\mathrm{Ext}^{\bullet}(E, E) = \Bbbk$.

Исследование финансировалось в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

© Л. А. Гусева, 2023

Определение 2. Последовательность объектов $E_1, \dots, E_m$ в $\mathscr{T}$ называется *исключительным набором*, если все E_i являются исключительными и $\mathrm{Ext}^\bullet(E_i, E_j) = 0$ для всех $i > j$. Набор $(E_1, E_2, \dots, E_m)$ называется *полным*, если минимальная триангулированная подкатегория в $\mathscr{T}$, содержащая $(E_1, E_2, \dots, E_m)$, совпадает с $\mathscr{T}$.

Для исключительного объекта $E \in \mathscr{T}$ мы будем обозначать за $\mathbb{L}_E$ функтор левой перестройки через E, который переводит объект $G \in \mathscr{T}$ в

$$\mathbb{L}_E(G) := \mathrm{Cone}(\mathrm{Ext}^\bullet(E, G) \otimes E \to G), \tag{3}$$

где морфизм – это морфизм вычисления. Если (E, E') – исключительной пара, то пара $(\mathbb{L}_E(E'), E)$ также является исключительной, причем $(\mathbb{L}_E(E'), E)$ и (E, E') порождают одну и ту же подкатегорию в $\mathscr{T}$, см. [4]. Для исключительного набора $(E_1, \dots, E_m)$ произвольной длины мы определяем левую перестройку через подкатегорию $\langle E_1, \dots, E_n\rangle$ как композицию

$$\mathbb{L}_{\langle E_1, \dots, E_m\rangle} = \mathbb{L}_{E_1} \circ \dots \circ \mathbb{L}_{E_m}. \tag{4}$$

Предложение 1 [1]. *Функтор левой перестройки через исключительный набор индуцирует эквивалентность*

$$^{\perp}\langle E_1, \dots, E_m\rangle \xrightarrow{\mathbb{L}_{\langle E_1, \dots, E_m\rangle}} \langle E_1, \dots, E_m\rangle^{\perp}. \tag{5}$$

Перестройка полного исключительного набора является полным исключительным набором.

Полный исключительный набор в ограниченной производной категории когерентных пучков $\mathrm{D}^b(\mathbf{CG})$ на грассманиане Кэли $\mathbf{CG}$, который мы собираемся описать, является лефшецевым. Дадим определение лефшецева набора и его вычетной категории в производной категории гладкого проективного многообразия X.

Определение 3 [3]. Пусть $\mathscr{O}_X(1)$ – обильное линейное расслоение на X.

1) Лефшецев набор в $\mathrm{D}^b(X)$ относительно $\mathscr{O}_X(1)$ – это исключительный набор в $\mathrm{D}^b(X)$, состоящий из нескольких блоков

$$\underbrace{E_1, E_2, \dots, E_{\vartheta_0}}_{\text{блок } 1}, \underbrace{E_1(1), E_2(1), \dots, E_{\vartheta_1}(1)}_{\text{блок } 2}, \dots, \underbrace{E_1(i-1), E_2(i-1), \dots, E_{\vartheta_{i-1}}(i-1)}_{\text{блок } i},$$

где $\vartheta = (\vartheta_0 \geqslant \vartheta_1 \geqslant \dots \geqslant \vartheta_{i-1} > 0)$ – невозрастающая последовательность целых положительных чисел.

2) Прямоугольной частью лефшецева набора называется поднабор

$$\underbrace{E_1, E_2, \dots, E_{\vartheta_{i-1}}}_{\text{блок } 1}, \underbrace{E_1(1), E_2(1), \dots, E_{\vartheta_{i-1}}(1)}_{\text{блок } 2}, \dots,$$
$$\underbrace{E_1(i-1), E_2(i-1), \dots, E_{\vartheta_{i-1}}(i-1)}_{\text{блок } i}. \tag{6}$$

3) Подкатегория в $\mathrm{D}^b(X)$ ортогональная прямоугольной части лефшецева набора называется вычетной категорией

$$\mathrm{Res} := \langle E_1, E_2, \dots, E_{\vartheta_{i-1}}, E_1(1), E_2(1), \dots, E_{\vartheta_{i-1}}(1), \dots,$$
$$E_1(i-1), E_2(i-1), \dots, E_{\vartheta_{i-1}}(i-1)\rangle^{\perp}. \tag{7}$$

Построенный набор в $\mathrm{D}^b(\mathbf{CG})$ состоит из четырех блоков. Общая часть этих четырех блоков состоит из трех расслоений $(\mathscr{O}, \mathscr{U}^\vee, \Lambda^2\mathscr{U}^\vee)$. Будем обозначать за $\mathfrak{E}(i)$ набор из трех расслоений:

$$\mathfrak{E}(i) := (\mathscr{O}(i), \mathscr{U}^\vee(i), \Lambda^2\mathscr{U}^\vee(i)). \tag{8}$$

Для того, чтобы описать оставшуюся часть набора, нам нужно определить два дополнительных векторных расслоения на $\mathbf{CG}$. Первое расслоение определяется следующим образом:

$$\Sigma^{2,1}\mathscr{U}^\vee := (\mathscr{U}^\vee \otimes \Lambda^2\mathscr{U}^\vee)/\Lambda^3\mathscr{U}^\vee. \tag{9}$$

Опишем второе расслоение.

Лемма 1. *На грассманиане Кэли* $\mathbf{CG}$ *имеется вложение векторных расслоений*

$$i_\lambda\colon \Lambda^2\mathscr{U} \hookrightarrow \Lambda^2\mathscr{U}^\perp,$$

заданное 4*-формой* λ.

В частности, на $\mathbf{CG}$ мы можем определить фактор-расслоение $\Lambda^2\mathscr{U}^\perp/\Lambda^2\mathscr{U}$. В исключительном наборе мы будем использовать двойственное к нему расслоение

$$\mathscr{R} := (\Lambda^2\mathscr{U}^\perp/\Lambda^2\mathscr{U})^\vee. \tag{10}$$

Таким образом, по определению $\mathscr{R}$, на $\mathbf{CG}$ имеется следующая точная последовательность

$$0 \to \mathscr{R} \to \Lambda^2\mathscr{Q} \to \Lambda^2\mathscr{U}^\vee \to 0. \tag{11}$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Набор из* 15 *векторных расслоений на грассманиане Кэли* $\mathbf{CG}$

$$(\mathfrak{E}, \mathscr{R}, \Sigma^{2,1}\mathscr{U}^\vee; \mathfrak{E}(1), \mathscr{R}(1); \mathfrak{E}(2); \mathfrak{E}(3)) \tag{12}$$

является полным лефшецевым набором относительно $\mathscr{O}(1)$.

Используя резольвенту Кошуля для структурного пучка $\varrho_*\mathscr{O}_{\mathbf{CG}}$:

$$0 \to \mathscr{O}(-3) \to \Lambda^3\mathscr{Q}(-3) \to \Lambda^2\mathscr{Q}(-2) \to \mathscr{Q}(-1) \to \mathscr{O} \to \varrho_*\mathscr{O}_{\mathbf{CG}} \to 0, \tag{13}$$

где $\varrho\colon \mathbf{CG} \hookrightarrow \mathrm{Gr}(3, V)$ – вложение $\mathbf{CG}$ в $\mathrm{Gr}(3, V)$, доказательство исключительности набора (14) сводится к вычислениям когомологий на $\mathrm{Gr}(3, V)$, которые можно проделать, используя теорему Бореля–Ботта–Вейля.

Опишем идею доказательства полноты набора (14).

Немного удобнее доказывать полноту набора

$$(\mathscr{U}, \mathfrak{E}, \mathscr{R}, \Sigma^{2,1}\mathscr{U}^\vee, \mathfrak{E}(1), \mathscr{R}(1), \mathfrak{E}(2); \mathscr{O}(3), \mathscr{U}^\vee(3)), \tag{14}$$

полученного из (12) удалением последнего объекта $\Lambda^2\mathscr{U}^\vee(3)$ и добавлением вместо него в начало $\mathscr{U} \simeq \Lambda^2\mathscr{U}^\vee(3) \otimes \omega_{\mathbf{CG}}$. По теореме 4.1 в [4] полнота набора (12) эквивалентна полноте (14).

Можно показать, что $\mathbf{CG}$ покрывается семейством подмногообразий $\mathbf{CG}_f \overset{i_f}{\hookrightarrow} \mathbf{CG}$, которые определяются как нули достаточно общих глобальных сечений $f \in \mathrm{H}^0(\mathbf{CG}, \mathscr{U}^\vee)$. Нетрудно показать, что подмногообразия $\mathbf{CG}_f$ изоморфны гладкому гиперплоскому сечению изотропного грассманиана $\mathrm{IGr}(3, 6)$, так что по [5; теорема 2.3] в $\mathrm{D}^b(\mathbf{CG}_f)$ имеется полный исключительный набор. Используя стандартные аргументы из [6], мы сводим задачу к следующей проверке включений для пяти векторных расслоений:

$$S^2\mathscr{U}^\vee(m) \in \mathscr{D}, \quad m = 0, 1, 2, \qquad\qquad \Sigma^{2,1}\mathscr{U}^\vee(1), \Sigma^{2,1}\mathscr{U}^\vee(2) \in \mathscr{D}, \tag{15}$$

где $\mathscr{D} \subset \mathrm{D}^b(\mathbf{CG})$ подкатегория, порожденная (14). Более точно, используя (15), резольвенту Кошуля пучка $i_{f*}\mathscr{O}_{\mathbf{CG}_f}$ на $\mathbf{CG}$ и полный исключительный набор на $\mathbf{CG}_f$, можно проверить, что обратный образ i_f^*F любого объекта $F \in \mathscr{D}^\perp$ равен 0. Из этого следует зануление $F = 0$, так что мы получаем $\mathscr{D}^\perp = 0$ и $\mathscr{D} = \mathrm{D}^b(\mathbf{CG})$.

Доказательство включений (15) – самая важная часть доказательства полноты набора (14). Чтобы доказать (15), нам понадобится операция склейки двух расслоений на квадрики с изоморфными коядрами. Опишем ее.

Напомним, что расслоение на квадрики $\mathbf{Q} \to S$ над схемой S – это собственный морфизм, который можно представить как композицию $\mathbf{Q} \hookrightarrow \mathbb{P}_S(\mathscr{F}) \to S$, где $\mathscr{F}$ – векторное расслоение на S, а $\mathbf{Q} \hookrightarrow \mathbb{P}_S(\mathscr{F})$ – дивизориальное вложение относительной степени 2 над S. Расслоение на квадрики определяется самодвойственным морфизмом

$$\mathscr{F} \xrightarrow{f} \mathscr{F}^\vee \otimes \mathscr{L}, \tag{16}$$

где $\mathscr{L}$ – линейное расслоение. С расслоением на квадрики $\mathbf{Q} \to S$ можно ассоциировать когерентный пучок $\mathrm{Coker}(f)$, который называется коядром расслоения на квадрики. Точное описание нужной нам операции склейки следующее.

Предложение 2. *Существует биекция между множеством классов изоморфизма троек*

$$\{(f_1, f_2, g) \mid f_1\colon \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_1^\vee \otimes \mathscr{L},\ f_2\colon \mathscr{F}_2 \to \mathscr{F}_2^\vee \otimes \mathscr{L}\ g\colon \mathrm{Coker}(f_1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coker}(f_2)\},$$

где f_1 и f_2 самодвойственные морфизмы, и множеством классов изоморфизма пар

$$\{(f, \epsilon) \mid f\colon \mathscr{F} \simeq \mathscr{F}^\vee \otimes \mathscr{L},\ \epsilon\colon 0 \to \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}_2^\vee \otimes \mathscr{L} \to 0\},$$

где f самодвойственный морфизм.

Теперь опишем, каким образом предложение 2 позволяет доказать включения (15).

Вначале опишем доказательство включений $\Sigma^{2,1}\mathscr{U}^\vee(1), \Sigma^{2,1}\mathscr{U}^\vee(2) \in \mathscr{D}$. Используя результаты [1], в проективизациях векторных расслоений $\mathbb{P}_{\mathbf{CG}}(\mathscr{U}^\perp \otimes \Lambda^2\mathscr{U}^\vee)$ и $\mathbb{P}_{\mathbf{CG}}(\mathscr{U}^\vee \oplus \mathscr{O})$ можно построить расслоения на квадрики с изоморфными коядрами. Таким образом по предложению 2 мы получаем, что существует расширение

$$0 \to \mathscr{U}^\perp \otimes \Lambda^2\mathscr{U}^\vee \to \mathscr{E}_{16} \to \Lambda^2\mathscr{U}^\vee \oplus \mathscr{O}(1) \to 0, \tag{17}$$

такое что расслоение $\mathscr{E}_{16}$ является самодвойственным, т.е. $\mathscr{E}_{16} \simeq \mathscr{E}_{16}^\vee(1)$. Легко показать, что $\mathscr{E}_{16}$ является ядром морфизма вычисления на $\mathbf{CG}$:

$$ev\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}(\Lambda^2\mathscr{U}^\vee, \Sigma^{2,1}\mathscr{U}^\vee) \otimes \Lambda^2\mathscr{U}^\vee \to \Sigma^{2,1}\mathscr{U}^\vee,$$

причем $\mathrm{Hom}_{\mathbf{CG}}(\Lambda^2\mathscr{U}^\vee, \Sigma^{2,1}\mathscr{U}^\vee) \simeq V^\vee \oplus \Bbbk$. Таким образом, используя самодвойственность $\mathscr{E}_{16}$, можно получить следующую самодвойственную точную последовательность на $\mathbf{CG}$:

$$0 \to \Sigma^{2,1}\mathscr{U}^\vee(-1) \xrightarrow{ev^\vee} (V \oplus \Bbbk) \otimes \mathscr{U}^\vee \to (V^\vee \oplus \Bbbk) \otimes \Lambda^2\mathscr{U}^\vee \xrightarrow{ev} \Sigma^{2,1}\mathscr{U}^\vee \to 0, \tag{18}$$

где $ev^\vee$ – двойственный к ev морфизм. Включение $\Sigma^{2,1}\mathscr{U}^\vee(1), \Sigma^{2,1}\mathscr{U}^\vee(2) \in \mathscr{D}$ сразу следует из существования (18).

Включения $S^2\mathscr{U}^\vee(1), S^2\mathscr{U}^\vee(2) \in \mathscr{D}$ следуют из стандартных точных последовательностей на $\mathbf{CG}$. Более точно, из последовательности (11) получаем $\Lambda^2\mathscr{Q}, \Lambda^2\mathscr{Q}(1) \in \mathscr{D}$, так что, используя (двойственный) комплекс Кошуля

$$0 \to \Lambda^2\mathscr{Q}(n-1) \to \Lambda^2 V^\vee \otimes \mathscr{O}(n) \to V^\vee \otimes \mathscr{U}^\vee(n) \to S^2\mathscr{U}^\vee(n) \to 0 \tag{19}$$

для $n = 1, 2$, получаем требуемое включение.

Для доказательства включения $S^2\mathscr{U}^\vee \in \mathscr{D}$ снова требуется предложение 2. Используя результаты [1], в проективизациях векторных расслоений $\mathbb{P}_{\mathbf{CG}}(S^2\mathscr{U})$ и $\mathbb{P}_{\mathbf{CG}}(\mathscr{Q})$ можно построить расслоения на квадрики с изоморфными коядрами. Таким образом по предложению 2 мы получаем, что существует расширение

$$0 \to S^2\mathscr{U} \to \mathscr{E}_{10} \to \mathscr{U}^\perp \to 0, \tag{20}$$

такое что расслоение $\mathscr{E}_{10}$ является самодвойственным, т.е. $\mathscr{E}_{10}(1) \simeq \mathscr{E}_{10}^{\vee}$. Из (подкрученного) комлекса Кошуля

$$0 \to S^2\mathscr{U}(1) \to V \otimes \Lambda^2\mathscr{U}^{\vee} \to \Lambda^2 V^{\vee} \otimes \mathscr{O}(1) \to \Lambda^2\mathscr{Q}(1) \to 0 \tag{21}$$

мы видим, что $S^2\mathscr{U}(1) \in \mathscr{D}$. Из точной последовательности (20) и точной последовательности (2), покрученных на $\mathscr{O}(1)$, мы получаем $\mathscr{E}_{10}(1) \in \mathscr{D}$, так что из самодвойственности следует, что $\mathscr{E}_{10}^{\vee} \in \mathscr{D}$. Используя двойственную к (20) точную последовательность

$$0 \to \mathscr{Q} \to \mathscr{E}_{10}^{\vee} \to S^2\mathscr{U}^{\vee} \to 0 \tag{22}$$

и (21), мы получаем требуемое включение $S^2\mathscr{U}^{\vee} \in \mathscr{D}$.

Докажем теперь, что вычетная категория (12) порождается полностью ортогональными объектами. Таким образом гипотеза из работы [3] выполнена для **CG**.

Теорема 2. *Вычетная категория* Res *лефшецева набора* (12) *порождается тремя полностью ортогональными объектами*

$$\mathsf{Res} = \langle \mathbb{L}_{\mathfrak{E}}\mathscr{R}, \Sigma^{2,1}\mathscr{U}^{\vee}(-1), \mathscr{R}(-1)\rangle. \tag{23}$$

Опишем идею доказательства этой теоремы. По определению

$$\mathsf{Res} := \langle \mathfrak{E}, \mathfrak{E}(1), \mathfrak{E}(2), \mathfrak{E}(3)\rangle^{\perp}. \tag{24}$$

Таким образом, Res порождается набором $\langle \mathbb{L}_{\mathfrak{E}}\mathscr{R}, \mathbb{L}_{\mathfrak{E}}\Sigma^{2,1}\mathscr{U}^{\vee}, \mathbb{L}_{\mathfrak{E},\mathfrak{E}(1)}(\mathscr{R}(1))\rangle$.

Изоморфизм $\mathbb{L}_{\mathfrak{E}}\Sigma^{2,1}\mathscr{U}^{\vee} \simeq \Sigma^{2,1}\mathscr{U}^{\vee}(-1)[2]$ следует из точной последовательности (18). Используя те же точные последовательности, что и в доказательстве $S^2\mathscr{U}^{\vee} \in \mathscr{D}$, можно показать включение $\mathscr{R}(-1) \in \langle \mathfrak{E}, \mathfrak{E}(1), \mathscr{R}(1)\rangle$. Таким образом, из исключительности набора (12) мы с точностью до сдвига получаем изоморфизм $\mathbb{L}_{\mathfrak{E},\mathfrak{E}(1)}(\mathscr{R}(1)) \simeq \mathscr{R}(-1)$. Мы доказали (23).

Докажем полную ортогональност обектов, порождающих Res. Напомним, см. теорему 2.8 в [3], что вычетная категория Res для лефшецева набора (12) обладает следующей автоэквивалентностью:

$$\tau(-) := \mathbb{L}_{\mathfrak{E}}(- \otimes \mathscr{O}(1)). \tag{25}$$

По определению, $\tau(\mathscr{R}(-1)) = \mathbb{L}_{\mathfrak{E}}\mathscr{R}$. Из написанного выше с точностью до сдвига получаем

$$\tau(\Sigma^{2,1}\mathscr{U}^{\vee}(-1)) = \Sigma^{2,1}\mathscr{U}^{\vee}(-1), \qquad \tau(\mathbb{L}_{\mathfrak{E}}\mathscr{R}) = \mathscr{R}(-1). \tag{26}$$

Полуортгональность трех объектов, порождающих Res, очевидна. Полная ортогональность следует из того, что τ является автоэквивалентностью.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] L. Manivel, *J. Algebra*, **503** (2018), 277–298. **[2]** V. Benedetti, L. Manivel, *Int. J. Math.*, **31**:3 (2020), 2050019. **[3]** A. Kuznetsov, M. Smirnov, *Proc. London Math. Soc.*, **120**:5 (2020), 617–641. **[4]** А. И. Бондал, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**:1 (1989), 25–44. **[5]** A. Samokhin, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **340**:12 (2005), 889–893. **[6]** A. Kuznetsov, *Proc. London Math. Soc.*, **97**:1 (2008), 155–182.

Л. А. Гусева
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Москва
E-mail: lguseva@hse.ru

Поступило
09.08.2022
Принято к публикации
20.08.2022