Е. В. Лукоянова, Распознавание конечной определенности автоматных мономиальных алгебр, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1995, том 1, выпуск 3, 805–807

Распознавание конечной определенности автоматных мономиальных алгебр

Е. В. ЛУКОЯНОВА
Филиал Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, г. Ульяновск

УДК 512.55

Ключевые слова: мономиальная алгебра, автоматная алгебра.

Аннотация

Получен алгоритм распознавания конечной определенности автоматной мономиальной алгебры.

Abstract

E. V. Lukoyanova, Recognition of definability of automata monomial algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika **1**(1995), 805–807.

An algorithm to recognize the finite definability of an automatic monomial algebra is obtained.

Пусть A — автоматная мономиальная алгебра. Назовем автоматом "нулей" $G_0(A)$ автомат, получающийся из детерминированного автомата алгебры A после объявления всех нефинальных вершин финальными, а всех финальных — нефинальными. Любое надслово слова, которому соответствует маршрут в $G_0(A)$, также лежит в языке, задаваемом этим автоматом. На основании этого свойства можно рассматривать оборванный автомат "нулей". Это конечный автомат, все маршруты которого заканчиваются в первой встреченной финальной вершине. Все остальные слова большей длины, началом которых является данное слово, индуцируются из слов, порождаемых оборванным автоматом "нулей", как их надслова.

Назовем простым маршрутом маршрут без циклов или маршрут, в котором допускается однократное прохождение циклов.

Ясно, что все обструкции содержатся в оборванном автомате "нулей" $G_0'(A)$ и $G_0'(A)$ индуцирует все нулевые слова рассматриваемой алгебры.

Рассмотрим алгоритм распознавания конечной определенности алгебры. Будем строить по $G_0'(A)$ ориентированный граф умножений $P(A)$, вообще говоря, бесконечный. Корнями $P(A)$ будут являться обструкции. Вершины $P(A)$ — это нулевые слова алгебры A. Если u, v — вершины $P(A)$, $\deg u = \deg v - 1$, то дуга от u к v проводится в том и только том случае, если существует маршрут из одного или нескольких корней до вершины в $P(A)$, соответствующей этому слову.

Фундаментальная и прикладная математика 1995, **1**, № 3, 805–807.

Алгоритм 1: *распознавание конечной определенности автоматной мономиальной алгебры.*

Вход: конечный автомат “нулей” $G_0'(A)$ с одной начальной вершиной.

Выход: граф умножений $P(A)$; одно из утверждений:

алгебра A бесконечно определена;

алгебра A конечно определена.

Пусть d — текущая длина маршрута, которая изменяется от длины наименьшего простого маршрута $\ell(A)$ до длины наибольшего простого маршрута $L(A)$.

1. Просматриваем все простые маршруты без циклов длины $\ell(A)$ и объявляем соответствующие им слова корнями $P(A)$.

Сначала будем рассматривать все простые слова без циклов.

2. Рассмотрим маршрут u длины d. Если среди корней $P(A)$ длины меньше, чем d, найдется корень v, являющийся подсловом u, то u не объявляется корнем $P(A)$ и для u строится маршрут в $P(A)$, начинающийся в корне v. В противном случае слово u объявляется корнем $P(A)$.

Рассмотрим теперь все маршруты, содержащие цикл в начале маршрута. Заметим, что все маршруты $c^i u$ будут индуцироваться маршрутами cu.

3. Если любое подслово слова cu является корнем $P(A)$, то для слов $c^i u$ строится маршрут в $P(A)$ из подходящего корня. Если же среди корней $P(A)$ нет ни одного корня, являющегося подсловом слова cu, то слово cu объявляется корнем $P(A)$, а для всех слов $c^i u$ строятся маршруты из этого корня.

Далее будем рассматривать все слова вида $uc^i v$, $i \geqslant 0$, то есть слова, в середине которых встречается ровно один необязательно простой цикл. Пусть d — длина наименьшего из слов ucv, где c — однократное прохождение цикла, u, v — подслова без циклов.

Пусть k — максимальная длина из длин корней графа $P(A)$.

4. Если среди корней $P(A)$ нет ни одного подслова слова ucv, то мы объявляем ucv корнем $P(A)$. Если к тому же длина ucv больше k или длина одного из слов cv, uc, c больше k, то для всех слов $uc^i v$, $i > 1$, также нет подслов среди корней $P(A)$. В этом случае все слова $uc^i v$ объявляются корнями $P(A)$. Мы получили, что в $P(A)$ бесконечное число корней.

Если среди корней $P(A)$ встретилось одно из слов вида u, uc, c, cv, v или какое-то подслово одного из этих слов, то для слова ucv и всех слов $uc^i v$, $i > 1$, строятся маршруты в $P(A)$ из соответствующего корня.

Если среди корней $P(A)$ встретилось слово ucv' или $u'cv$, где u', v' — подслова слов u, v соответственно, то этот корень $P(A)$ индуцирует лишь слово ucv, а уже $uc^2 v$ этим словом не индуцируется. В этом случае будем рассматривать слова $ic^2 v, \ldots, uc^{j-1} v$.

Если все эти слова индуцируются какими-то своими подсловами так, что слова большей длины такого вида не индуцируются этими подсловами, то уже слово uc^jv не индуцируется никаким корнем, индуцирующим предыдущие слова. Рассмотрим слово uc^jv. Нерассмотренными подсловами для него являются слова uc^j, c^j, c^jv, $uc^{j-1}c_1$, $c_2c^{j-1}v$, где c_1, c_2 — первая или последняя буква цикла c соответственно. Выберем из этих слов слово наименьшей длины. Обозначим его w. Если длина w меньше k, то среди корней $P(A)$ будем искать подслова для uc^jv. Пусть длина w больше k и среди корней $P(A)$ нет подслова слова w, тогда для всех остальных подслов слова uc^jv также не существует подслов среди корней $P(A)$. Значит, слова uc^iv, $i \geqslant j$, ничем не индуцируются и объявляются корнями $P(A)$.

Если в цикле имеется кратная вершина, то мы просматриваем последовательно все подслова, как это было описано выше.

Осталось рассмотреть случай, когда в маршруте содержится несколько последовательно расположенных циклов. Рассмотрим сначала слова uc^ivd^jw, где c, d — циклы, u, v, w — простые подмаршруты без циклов. Пусть d — минимальная длина слов $ucvdw$.

5. Рассмотрим слова вида uc^iv, как это было сделано в 4. Если мы нашли корень $P(A)$, который индуцирует слова uc^iv, то он индуцирует и все слова uc^ivd^jw. Если такого корня нет, будем рассматривать подмаршруты vd^jw точно так же. В конце концов мы придем к одной из ситуаций:

1) в $P(A)$ есть корень, порождающий все слова uc^ivd^jw. В этом случае из этого корня строим маршруты для всех таких слов.

2) в $P(A)$ есть корни, порождающие слова uc^ivd^jw до какой-то определенной степени i или j. В этом случае все слова большей длины мы объявляем корнями $P(A)$, их бесконечное число.

6. Случай слов $uc_1^{i_1}v_1c_2^{i_2}v_2\ldots c_k^{i_k}v_k$ рассматривается аналогично.

7. Мы просмотрели все маршруты в $P(A)$. Если число корней графа $P(A)$ конечно, то A конечно определена. Если число корней графа $P(A)$ бесконечно, то A бесконечно определена.

Таким образом, мы получили конечную процедуру, позволяющую определить, является ли автоматная мономиальная алгебра конечно определенной.

Автор благодарен В. Н. Латышеву за постановку задачи и полезные обсуждения.

Литература

[1] Уфнаровский В. А. Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Т. 57. — М.: 1990. — С. 5–177.

[2] Уфнаровский В. А. Об использовании графов для вычисления базиса, роста и ряда Гильберта ассоциативных алгебр // Мат. сб. — 1989. — Т. 180. — № 11. — С. 1548–1555.

Статья поступила в редакцию в январе 1995 г.